Publicación en Línea (Semestral) UPEL-Maracay (Venezuela)
DL: PPL201102AR3941
ISSN: 2244-7662
Julio-Diciembre 2019. Vol. 16, N° 2
REVISTA MULTIDISCIPLINARIA Dialógica

Universidad Pedagógica Experimental Libertador
Vicerrectorado de Investigación y Postgrado
Instituto Pedagógico "Rafael Alberto Escobar Lara"
Subdirección de Investigación y Postgrado

ANÁLISIS CONCEPTUAL Y DE INSTRUCCIÓN DE LAS RAZONES Y FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS VISIÓN DESDE LAS CIVILIZACIONES ANTIGUAS

Autor: José A. Mendoza G.
profesorjosemendoza@hotmail.com
Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL)
Maracay – Venezuela

PP. 49-87

Análisis Conceptual y de Instrucción de las Razones y Funciones Trigonométricas Visión desde las Civilizaciones Antiguas

Autor: José A. Mendoza G.
profesorjosemendoza@hotmail.com
Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL)
Maracay – Venezuela

Recibido: Julio 2019 **Aceptado:** Noviembre2019

Resumen

Las razones y funciones trigonométricas son un componente importante que deben conocer los profesores de matemática, ya que son diversos los usos en la actualidad de la trigonometría y está presente en nuestra cotidianidad, pero suelen presentarse dificultades al trabajar con estos contenidos en diferentes niveles educativos, pues, por lo general se aborda un sólo aspecto de la trigonometría plana como lo es el uso excesivo de fórmulas dejando de lado otros aspectos importantes de este tópico, por ende se platean conocer los conceptos, problemas y situaciones que tuvieron lugar en la antigüedad y que son posibles de rescatar y actualizarlos para formalizar conocimientos previos o plantear nuevas situaciones que permitan a los estudiantes contextualizar nuevos conocimientos. Por esta razón se usa el análisis didáctico específicamente el análisis conceptual y análisis de instrucción. Empleando para ello el paradigma postpositivista con el enfoque cualitativo.

Palabras Clave: trigonometría, análisis conceptual, análisis de instrucción.

Conceptual and Instructional Analysis of Trigonometric Reasons and Functions View from Ancient Civilizations

Abstract

Trigonometric ratios and functions are an important component that mathematics teachers should know, since the current uses of trigonometry are diverse and present in our daily lives, but difficulties usually arise when working with these contents at different educational levels, therefore, in general, only one aspect of flat trigonometry is addressed, such as the excessive use of formulas, leaving aside other important aspects of this topic, therefore, it is intended to know the concepts, problems and situations that took place in ancient times and that they can be rescued and updated to formalize previous knowledge or to pose new situations that allow students to contextualize new knowledge. For this reason, didactic analysis is specifically used as conceptual analysis and instructional analysis. Using for this the postpositive paradigm with the qualitative approach.

Key Words: trigonometry, conceptual analysis, instruction analysis.

Publicación en Línea (Semestral) UPEL-Maracay (Venezuela)
DL: PPL201102AR3941
ISSN: 2244-7662
Julio-Diciembre 2019. Vol. 16, N° 2
REVISTA MULTIDISCIPLINARIA Dialógica

Introducción

La Ciencia en nuestra sociedad surgió de forma empírica a través de la interacción del hombre con su entorno y de la capacidad de éste de observar, razonar los fenómenos y hechos que ocurrían tal como lo afirman Kedrov y Spirkin (1967), "la Ciencia es un importante elemento de nuestra cultura espiritual ya que ha desarrollado sistemáticamente conocimientos a través de métodos cognoscitivos que reflejan con veracidad y demuestran con exactitud los conocimientos humanos" (p.7). La Ciencia al relacionar conocimiento, observación, razonamiento, sistematicidad, estructuración principios y leyes que nos guían acerca de los fenómenos y leyes del mundo externo que permiten prever sucesos a beneficio de la sociedad.

La Ciencia es un reflejo de nuestra realidad por ende ella admite gran variedad de objetos de estudio, estos diversos objetos dan lugar a las ciencias particulares, como la Matemática la cual tiene como objeto de estudio formas abstractas que pueden ser observadas y aplicables en el entorno como por ejemplo las formas geométricas que se encuentran presentes en cualquier lugar que nos rodea, así como formas no tan obvias a la vida cotidiana y aplicables a la Matemática en si misma o a otras ciencias por ejemplo los espacios vectoriales que se emplea en Física cuando se estudian las magnitudes escalares y vectoriales y se utiliza en Matemática para estudiar las características de las matrices, los polinomios, las funciones, las n-uplas.

La Matemática como Ciencia ha evolucionado de la interacción del hombre con su entorno y a partir de las abstracciones que ha realizado sobre éste, por ende, ha sido de vital importancia para la humanidad ya que ha favorecido al surgimiento y desarrollo de otras ciencias como la Astronomía, la Mecánica y la Física entre otras, esto ha fortalecido la evolución del hombre en la sociedad ya que ha permitido obtener avances en otras áreas del conocimiento, esto lo afirma Carmona, (2007).

> Nadie duda que vivimos en un mundo de incesantes cambios, determinados por la conquista del espacio, la influencia de las Tecnologías de Información y Comunicación (TIC), la era de la Informática, la Robótica, la Genética, inventos inimaginables, todo lo cual determina nuevas relaciones de convivencia humana, cultural, política, científica… (p. 2).

Es innumerable el número de aportes que tiene la Matemática a otras ciencias como se ha mencionado anteriormente siendo éste el soporte oculto de todos estos avances y que de alguna u otra manera debe ser enseñada a jóvenes y adultos para poder continuar progresivamente con estos avances.

Es por esta razón que se debe considerar a la Matemática como una ciencia dinámica y cambiante, además la enseñanza de ésta, tal como lo afirma De Guzmán, (s/f) "no es de fácil abordaje, ya que se deben involucrar las abstracciones mencionadas anteriormente" (p. 5). Las cuales se hacen presentes en el aula, debido a que curricularmente la Matemática siempre está presente en las diversas carreras y áreas de conocimiento.

La historia nos ha permitido observar el desarrollo de la ciencia, como ha evolucionado y ha sido de vital importancia para el desarrollo de los seres humanos, para dar explicación a algunos fenómenos o la aparición de nuevas tecnologías y teorías, de igual manera la Matemática como parte del conocimiento humano es parte de este crecimiento humano y científico. En especial la Trigonometría es parte fundamental de este conocimiento matemático ya que se hace presente en algunos momentos de la cotidianidad, al igual que permite el estudio de otras situaciones importantes dentro de contextos académicos científicos específicos tales como la navegación, la Geometría espacial, la Astronomía, entre otros, aquí se le dará mayor atención a las razones y funciones trigonométricas los cuales van a permitir dar una idea de la manera en que se pueden relacionar estos conceptos a otras áreas del saber tal como afirma Berrospi, (2012).

> la trigonometría tiene aplicaciones como por ejemplo del estudio de las esferas, en la Geometría del espacio, en Astronomía para medir distancias a estrellas próximas, en la medición de distancias entre puntos geográficos, en sistemas de navegación por satélites, en la construcción de casas o edificaciones las diferentes medidas que se deben hacer, para el cálculo preciso de distancias, ángulos de inclinación o de peralte en una carretera, en la elaboración de métodos numéricos… por parte de matemáticos para realizar una ecuación diferencial o resolver una integral que no se pueda trabajar con los métodos convencionales y en la biogenética para evaluar funciones que dependan de ciertos parámetros trigonométricos. (p. 2).

Estos conocimientos deben ser impartidos en las diferentes carreras según las aplicaciones antes mencionadas, esto quiere decir que los docentes que laboran a nivel universitario en las diferentes carreras deberían manejar este tipo de conocimientos y su relación con las áreas afines, con la finalidad de establecer una correlación entre la trigonometría y sus aplicaciones, tal como afirma Mosquera, (2005) en uno de sus trabajos publicados que, “El futuro profesor de matemática tiene que conocer detalladamente y en profundidad los programas de estudio de matemática para la educación básica y la educación media, diversificada y profesional” (p. 93).

Esto conduce a plantear la importancia de la trigonometría dentro del ámbito de la Matemática y dentro de la formación de profesores de matemática ya que este tema en la experiencia del autor es importante en el desarrollo del profesional en Matemática, sino que además este contenido se imparte en la educación básica. Al respecto se presenta el siguiente ejemplo propuesto por Van Hiele (1957).

> El cálculo de segmentos y ángulos a veces sólo es posible con la ayuda de la trigonometría… En la mayoría de los casos basta con la definición de seno y tangente y el conocimiento de que existen tablas con los valores del seno y la tangente para ángulos entre 0° y 90°. Con ello se abarca realmente todo el contenido geométrico de la trigonometría… Si nos limitamos a lo expuesto anteriormente, puede funcionar muy positivamente de cara a la adquisición de comprensión. Normalmente se suelen enseñar muchas fórmulas. Esto le da la sensación al alumno de que para dominar la trigonometría se necesitan muchas valencias. Y cuando les faltan esas valencias no hacen ningún esfuerzo por alcanzar resultados a pesar de que se pueden alcanzar perfectamente con los medios de que disponen (p. 122).

Por esta misma razón se precisa que es un tema importante y que en la formación de profesores solo se ha considerado el aspecto algebraico del mismo es decir uso exclusivo de fórmulas, dejando de lado el uso de otros sistemas de representación de la trigonometría como por ejemplo el gráfico. Al respecto Van Hiele (1957) afirma lo siguiente:

> Una de las problemáticas de la enseñanza de la trigonometría: el abuso de las fórmulas. Este problema es producto de una enseñanza de la trigonometría caracterizada por un enfoque algebraico consistente en la manipulación de símbolos, operaciones y propiedades abstractas que no ayuda a la

> comprensión de los conceptos y propiedades, a conectar unos y otras, ni a establecer relaciones entre las diferentes representaciones (p.122).

Es decir, el estudiante o docente en formación sólo se apropia en algunos casos de las fórmulas para resolver los problemas planteados, dejando de lado otras representaciones importantes de la trigonometría y que el docente en formación debe conocer; y no sólo identificar un aspecto de la trigonometría (el aspecto algebraico) que como bien se ha mencionado en algunos casos es limitativo al momento de resolver un problema del tema a posteriori al respecto Van Hiele (1957) afirma

> La trigonometría nos enseña lo que, a la larga, puede ocurrir con una enseñanza de este tipo: muchos alumnos que han aprendido a solucionar problemas con cantidad de fórmulas y trucos, se sienten bloqueados en su vida posterior ante cualquier problema trigonométrico porque se dan cuenta de que han olvidado las fórmulas y los trucos y carecen de principios ordenadores para recuperarlos. En cambio, los alumnos que no han aprendido más que las definiciones de seno y tangente están mucho más aventajadas puesto que han aprendido a desenvolverse con un mínimo de material y son conscientes de las posibilidades que ello entraña (p. 86).

De esta manera en la formación de profesores de Matemática en la UPEL-Maracay debería evidenciarse el estudio de este tópico explícitamente en algunos cursos obligatorios de esta carrera y de igual forma sus aplicaciones o relaciones entre las áreas del conocimiento matemático, dentro de la experiencia del investigador como estudiante de la especialidad de Matemática y como docente del departamento de Matemática el tema de trigonometría es importante ya que éste se aplica constantemente y se asume que el estudiante posee conocimientos previos del tema omitiendo así la necesidad de su enseñanza en alguna asignatura del pensum de estudios de esta especialidad.

Por esta razón se estudiarán aquí aspectos importantes de la trigonometría empleando para ello el análisis didáctico propuesto por Rico, por ende, se pretende desarrollar un vínculo entre el análisis conceptual y de instrucción de la trigonometría desde la perspectiva de las civilizaciones antiguas; el contenido desarrollado en este artículo forma una pequeña parte del análisis conceptual y de instrucción del trabajo de grado de maestría desarrollado por el autor.

Bases Teóricas

Análisis Didáctico

El modelo de análisis didáctico propuesto por Rico (2013), describe que es un término de uso común en didáctica de la matemática, ya que permite abordar cuestiones primordiales de lo que se desea enseñar de un tópico de matemática, sustentado en las reglas generales del análisis, concepto evolucionado desde la filosofía y la historia del pensamiento, este modelo está constituido por cinco análisis: conceptual, de contenido, cognitivo, de instrucción y de evaluación.

El Análisis Conceptual

Rico (2013) describe elementos importantes a saber de este análisis ya que el análisis conceptual encarna una definición o conjunto de definiciones involucradas en el objeto matemático a investigar, y es este paso nos permite poder estructurar dichos conocimientos, que a su vez van a encaminar al investigador a poseer un referente teórico, que le permitirá contar con opciones idóneas en la investigación educativa, en este análisis se indagaran todas las definiciones del objeto matemático su lenguaje su naturaleza, su aplicabilidad, complejidad o simplicidad sirviéndose para ellos de la historia y el desarrollo de estos conceptos, es decir, la génesis de este conocimiento con el cual al final de este análisis se podrá construir una red de significados que posibiliten ver la conexión entre los términos.

El Análisis de Contenido

Rico (2013) describe cuatro categorías importantes a destacar en este análisis a nivel de educación matemática, el primero de ellos es la categoría conceptual que debe considerar el momento histórico y marco poblacional es decir debe considerar los contextos en los cuales se desarrolla la investigación, quien la desarrolla y a quienes va dirigida, también incluye la categoría formal y estructural que debe considerar las definiciones involucradas en los textos y su posterior análisis para así permitir la construcción de una estructura formal del objeto matemático que arrojará una referencia de ¿cómo debe ser enseñado el contenido?, luego involucra los sistemas de representación que comprende las diversas notaciones que van a estar presentes en la investigación y por último se debe describir las fenomenologías que se deben estudiar es decir los fenómenos o anomalías que puedan ocurrir en los contextos donde se realiza la investigación, para luego sintetizar en los focos prioritarios.

El Análisis Cognitivo

Rico (2013) describe este análisis desde el punto de vista de síntesis del contenido matemático y ¿qué cosas de este deben ser enseñada y con qué fin?, para esto se deben consideran en este análisis tres categorías que son: las expectativas del docente sobre lo que los estudiantes deben aprender incluida sus riquezas, y como este contenido tiene alcances a largo mediano y corto plazo tomando en cuenta la vinculación con otros niveles educativos. El segundo aspecto son las dificultades presentes en los contextos ya sean documentadas en investigaciones previas o empíricas surgidas en la misma interacción con el contexto escolar o no escolar y la tercera categoría se centra en las demandas cognitivas, es decir, en las tareas propuestas cuyo objetivo es lograr el aprendizaje sobre los asuntos considerados puntuales.

El Análisis de Instrucción

Rico (2013) considera que en este análisis se debe realizar una transformación y adaptación, valorando los análisis anteriores, éste tiene como objetivo precisar ¿Cómo y cuándo se lleva a cabo la formación?, es decir, este análisis presupone una adaptación curricular ya que aquí se considera como es la enseñanza del tópico de matemática para ello se deben tomar en cuenta las siguientes categorías: primero; la función y tipo de tarea junto con su secuenciación, segundo; los materiales y recursos para la enseñanza de la matemática y tercero; la planificación, que indica la secuencia mediante la cual se realizará el proceso de instrucción, en ella es importante involucrar la unidad didáctica para el proceso de síntesis.

El Análisis de Evaluación

Rico (2013) describe aquí cuales son los resultados obtenidos, para ello también establece tres categorías a considerar: en primer lugar los criterios e instrumentos para diagnosticar, orientar y valorar el aprendizaje, segundo; la interpretación del rendimiento y los resultados alcanzados y tercero la síntesis evaluativa que muestra los aprendizajes alcanzados, las fortalezas y debilidades de los escolares al igual que de la planificación, lo cual permitirá establecer mejoras en el proceso de enseñanza y aprendizaje, del tópico de matemática.

A manera de cierre Rico sintetiza el ciclo del análisis didáctico mediante el siguiente esquema.

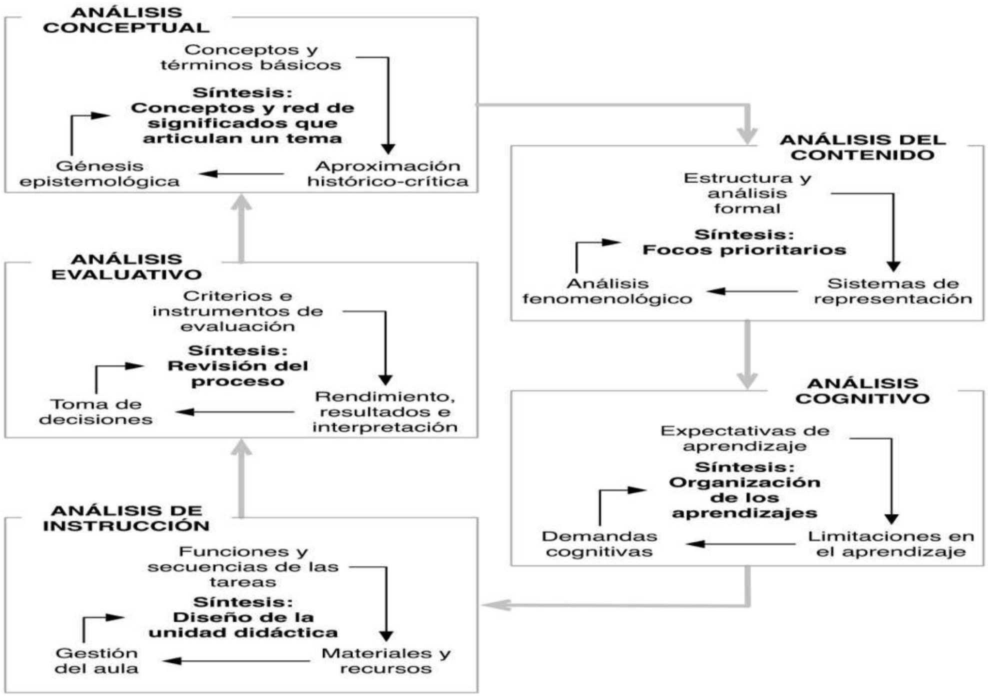


***Gráfico 1*: Estructura y Ciclo del Análisis Didáctico.** Tomado de «El método del Análisis Didáctico» por Rico L. 2013, Revista UNIÓN Número 33 p. 22.

Aplicación de la teoría: análisis conceptual. Se realizará una revisión de los conceptos, propiedades ejercicios involucrados en el tópico de razones y funciones trigonométricas, valorando la evolución histórica de dichos conceptos y el surgimiento de los mismos a través de su epistemología, para ello se consideraran aspectos importantes como el surgimiento de la trigonometría esférica que dio bases para el estudio de la trigonometría plana y que quizás este hecho tendrá alguna repercusión en la enseñanza de la trigonometría, de igual manera se abordarán ejemplos empleados en los momentos históricos que dieron lugar a la teoría que conocemos en la actualidad, que ayudaran posteriormente en el planteamiento de problemas en los análisis siguientes, de igual manera se harán líneas del tiempo que permitirán al autor y los participantes ver la evolución histórica del tema y que podrá nutrirse a lo largo del desarrollo y puesta en práctica de la unidad didáctica, para luego concluir en una red de significados de los conceptos y sus relaciones una vez concluido el análisis.

***Análisis de instrucción*.** En función de lo obtenido en el análisis conceptual como los focos prioritarios y algunos aspectos históricos adaptados a la actualidad se podrán elaborar o considerar las tareas y la finalidad de cada una de ellas, resaltando las expectativas que se desean lograr.

Marco Metodológico

Paradigma de la Investigación

Todo proceso de investigación está enmarcado en un paradigma, descrito por Terán (2006) como: "son sistemas de creencias básicas de acuerdo a una postura ontológica, su enfoque epistemológico y su estrategia metodológica" (p. 2). Es decir, es la postura del investigador y su forma de abordar la situación problema que se le presenta, por lo cual la presente investigación se enmarco en el paradigma postpositivista descrito por Terán (2006):

> El paradigma postpositivista sostiene una postura ontológica más flexible al aceptar que la imperfección de los sensorios y el intelecto humano nos permiten percibir y conocer el mundo y sus causas tal como están ahí afuera…La realidad existe, pero no puede ser totalmente conocida, esta es manejada por leyes universales que no pueden ser totalmente aprehendidas. Para este paradigma, la realidad es holística, global y polifacética, nunca es estática ni tampoco es una realidad que nos viene dada, sino que se crea. Desde el punto de vista epistemológico es subjetiva, se considera que el conocimiento es un producto de la actividad humana, y, por lo tanto, no se descubre, se produce. Los hallazgos emergen dentro de la interacción del investigador y lo investigado, los hallazgos de la investigación deben ser consistentes con la tradición existente en un área y de la comunidad crítica (p. 40).

En este paradigma los fenómenos están allí presentes para el investigador y este solo se encarga de observarlos y estudiarlos tal como se presentan, sin que este pueda modificarlos o alterarlos de algún modo, se considera que es subjetivo ya que las interpretaciones de los fenómenos están sujetas de las vivencias, las actitudes personales y de las percepciones de quien realización la acción investigativa.

Enfoque de la investigación

Esta investigación también está enmarcada en el enfoque denominado cualitativo tal como lo afirma Martínez (2006)

> La investigación cualitativa trata de identificar la naturaleza profunda de las realidades, su estructura dinámica, aquella que da razón plena de su comportamiento y manifestaciones. De aquí, que lo cualitativo (que es el todo integrado) no se opone a lo cuantitativo (que es sólo un aspecto), sino que lo implica e integra, especialmente donde sea importante (p. 128).

La investigación cualitativa indaga sobre la problemática desde un punto de vista más empírico ya que recolecta la información tal como sucede en la realidad, de sus propios actores en su propia cotidianidad donde es posible determinar sus conductas e indagar sobre las problemáticas suscitadas, por ello se pretende describir sus componentes y las cualidades que rodean al fenómeno objeto de estudio.

Método de la investigación

Esta investigación emplea el método hermenéutico y fenomenológico; ya que como lo afirma Husserl (1947) el método fenomenológico “como un método analítico descriptivo de las vivencias del pensamiento depuradas de elementos empíricos, que interpreta la realidad mediante la reducción” (p. 8).

Por otra parte, considerando que la hermenéutica tiene sus bases en la fenomenología de Husserl (1947) descrita por este como “una filosofía, un enfoque y un método, pues enfatiza la vuelta a la reflexión y a la intuición para describir y clarificar la experiencia tal como ella es vivida” (p. 88). Por su parte Arráez (2006) describe lo siguiente.

> El método hermenéutico trata de introducirse en el contenido y la dinámica de la persona estudiada y en sus implicaciones, buscando estructurar una interpretación coherente del todo, mientras que el fenomenológico se centra en el estudio de esas realidades vivenciales, determinantes para la comprensión de su vida psíquica (p.177).

Tipo de Investigación

Además, la presente investigación se enmarca en el tipo de investigación denominada de campo, como lo indica el manual de trabajos de grado de especialización y maestría y tesis doctorales (2006).

> Se entiende por Investigación de Campo, el análisis sistemático de problemas en la realidad, con el propósito bien sea de describirlos, interpretarlos, entender su naturaleza y factores constituyentes, explicar sus causas y efectos, o predecir su ocurrencia, haciendo uso de métodos característicos de cualquiera de los paradigmas o enfoques de investigación conocidos o en desarrollo. Los datos de interés son recogidos en forma directa de la realidad; en este sentido se trata de investigaciones a partir de datos originales o primarios. (p. 18).

Diseño de la Investigación

La investigación tiene un diseño no experimental ya que el investigador solo observará y describirá los hechos que sucedan en la interacción de los participantes dentro del estudio sin que el investigador pueda influir en dichos contextos tal como afirma Sampieri (2006)

> Lo que hacemos en la investigación no experimental es observar fenómenos tal como se dan en su contexto natural para después analizarlos. En un estudio no experimental, no se construyen ninguna situación, sino que se observan situaciones ya existentes, no provocadas intencionalmente en la investigación por quien la realiza (p. 205).

Cabe destacar que es clara la relación entre el paradigma, el método, el tipo de investigación y el diseño ya que el investigador solo va a observar describir y analizar las fenomenologías presentes en este contexto a saber UPEL Maracay y que a partir de allí no podemos hacer inferencias ya que aunque a nivel regional y nacional se estudie la carrera de Educación Matemática los contextos sociales, culturales, cognitivos, éticos y formativos son totalmente distintos, al igual que la importancia del tema, quizás sea otra, quizás en otras instituciones si existan materias dedicadas únicamente al tópico de trigonometría y esa no es la situación presentada en esta investigación.

Análisis Conceptual y de Instrucción

En el desarrollo de esta sesión se abordará la evolución histórica de los conceptos propiedades, ejercicio involucrados en las razones y funciones trigonométricas, de igual manera se aportarán algunas de las actividades a desarrollar en el análisis de instrucción donde se empleó el contenido matemático concreto y los focos prioritarios considerados por el autor para concluir en la red de significados tal como se propone en la teoría de análisis didáctico propuesta por Rico en el 2013.

La Matemática no ha sido fruto de una sola persona, sino que se ha nutrido de muchos aportes de personas y civilizaciones, la trigonometría que conocemos hoy en día también es fruto de ese desarrollo a través del tiempo.

La trigonometría puede abordarse desde diversas perspectivas considerando que la trigonometría se refiere al estudio de las proporciones entre los lados y ángulos de un triángulo ya sea en el plano o una esfera. La trigonometría que hace parte de este estudio es la trigonometría concreta, por su parte la trigonometría abstracta es la que se encarga del estudio de las funciones y sus relaciones con otros aspectos de la Matemática en sí misma y con sus aplicaciones a otras ciencias. Etimológicamente, la palabra procede del griego clásico y significa medición de triángulos. La importancia de esta rama, radica, fundamentalmente, en la medición de campos, la ubicación de barcos en el mar o, más recientemente el posicionamiento por satélite, e, incluso la medición de distancias entre estrellas próximas en la astronomía.

Para el desarrollo de esta sección se mencionaran a continuación los autores y las obras que ayudaron a la reconstrucción de la historia de este tema; Vera F (s/f) breve historia de la matemática, Orellana M (1996) historia de la matemática, Boyer C (1999) historia de la matemática, Heath T (1921) a history of greek mathematics, Ríbnikov K (1987) historia de las matemáticas, Smith (1951) History of mathematics, Moltalvo (2012) historia de la trigonometría y su enseñanza, the aryabhatiya of a Ryabhata (1930) universidad de Chicago.

Civilización Egipcia

La civilización egipcia al igual que la babilónica data de aproximadamente 3000 años a.n.e (antes de nuestra era).

En el antiguo Egipto se destaca la presencia de la trigonometría en la construcción de las pirámides, también fue aplicada en el estudio de astronomía, en la realización de calendarios, en la navegación y cálculo del tiempo sumado a que igual empleaban el sistema sexagesimal, además de medir los ángulos en grados, minutos y segundos.

En el antiguo Egipto existía una notable necesidad de calcular correctamente la superficie de los campos tras la inundación anual causada por el Nilo, que borraban los lindes (línea o límite territorial) de separación de la tierra y era preciso construir ángulos rectos para dibujarlas, 2500 años antes de Cristo lograron trazar perpendiculares, con segmentos que forman un ángulo recto (90 grados), por aquella época el transportador de ángulos no existía.

Dominaban perfectamente los triángulos gracias a los anudadores, los anudadores egipcios hacían nudos igualmente espaciados que servían para medir; fueron los primeros en observar que, uniendo con forma de triángulo, cuerdas de ciertas longitudes se obtiene un ángulo recto, también conseguían mediante estos nudos triángulos rectángulos.

Pitágoras recogió toda esta experiencia geométrica para su teorema. Es decir, los egipcios ya conocían la relación entre la hipotenusa y los catetos en un triángulo rectángulo. Utilizaban el que más tarde se conoció como Teorema de Pitágoras, pero de forma práctica, no sabían demostrarlo.

También podían calcular áreas de las de superficie del cuadrado (a partir del triángulo), La superficie del rectángulo, la del rombo, la del trapecio; podían calcular volúmenes del cilindro, de una pirámide y el tronco de una pirámide, tal como se data el papiro Rhind, lo cual implica un notable conocimiento de la aritmética y la geometría para la época.

Uno de los documentos donde se evidencia la presencia de la trigonometría es en el papiro Rhind, data en fechas similares a la civilización babilónica, el papiro de Ahmes o papiro de Rhind, en honor al anticuario escocés que lo adquirió en un pequeño pueblo del Nilo. Fue encontrado en las ruinas de Tebas, este fue comprado por Henry Rhind en 1858 que tras 5 años de su compra murió y ahora se encuentra el museo británico de Londres. Aunque este se realizó de manera independiente, donde describen problemas de medición de ángulos, donde el uso de la medición de ángulos en grados, minutos y segundos, aspecto que se ha mantenido hasta la actualidad, en el papiro de Ahmes (nombrado así por el escriba que lo copio) se puede destacar el siguiente ejercicio.

¿Cuál es el área de un triángulo de lado 10 jet y base 4 jet?

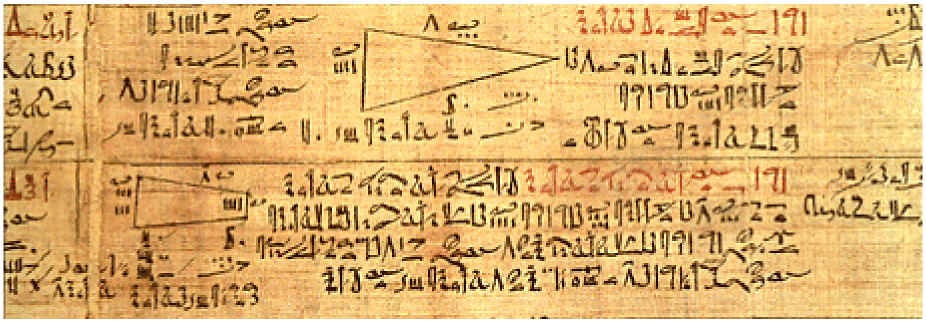


Gráfico 2. **Ubicación del problema en el papiro Rhind** tomado de: http://www.egiptologia.cl/difusion/img/ciencia_01.gif.

Según está resuelto el problema, parece que el triángulo es isósceles y queda dividido en 2 partes iguales por la altura, con las que forma un rectángulo, siendo la altura lo que Ahmes llama lado. El escriba lo resuelve así: “Toma la mitad de 4 para formar un rectángulo. Multiplica 10 veces 2 y el resultado, 20, es el área buscada”.

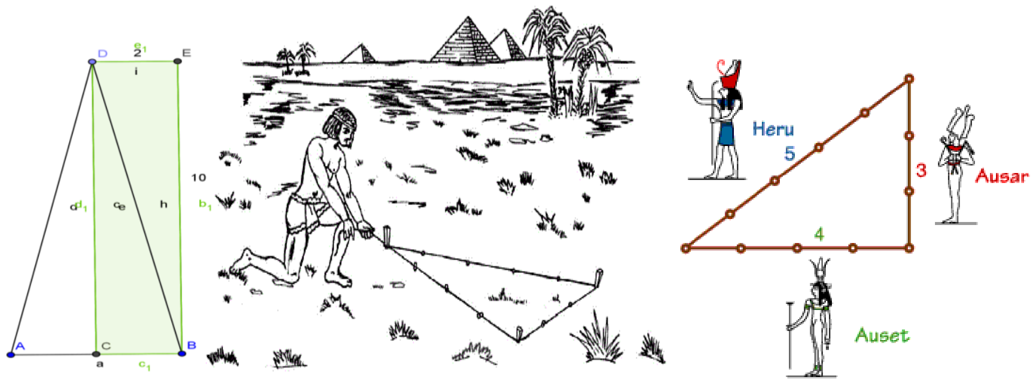


Gráfico 3. **Ejemplo de uso de nudos para construir triángulos rectángulos** imagen tomada de: http://mimosa.pntic.mec.es/jgomez53/matema/practica/ternas-cuerda_egipcia.gif

Para las construcciones utilizaban cuerdas con nudos situados a la misma distancia. Para hacer triángulos rectángulos contaban 12 nudos. Luego hacían un triángulo cuyos lados fuesen 3, 4 y 5, en total 12, tal y como vemos en el dibujo. Pues bien, el ángulo que forman los lados 3 y 4 es recto siempre. Pero también observaron que se podían duplicar, triplicar, y seguía siendo rectángulo. Los egipcios manejaban números del orden de ciento de millar unos 3500 a.n.e. Los primeros libros egipcios, escritos hacia el año 1800 a.n.e muestran un sistema de numeración decimal con distintos símbolos para las sucesivas potencias de 10 (1, 10, 100…), similar al sistema utilizado por los romanos.

En lo que ha trigonometría se refiere en el papiro Rhind destaca el problema 56 que enuncia lo siguiente digamos de manera literal: calcular el seqt de una pirámide de 250 cubits de altura y 360 cubits de lado; el seqt sería $5\frac{1}{25}$manos por codo. Transliteración: Si es una pirámide de 250 codos de alto y el lado de su base de 360 codos de largo, ¿cuál es su seked (inclinación)? (un codo en la actualidad equivale a 45,72cm esta medida de igual manera asumió diversos valores durante el desarrollo de la historia en el antiguo Egipto por ejemplo tenía el valor de 45cm).

Se describirá como se llegó a este resultado, si la pirámide tiene 250 codos de altura, cuya base tiene 360 codos de lado, el escriba dividió primero 360 por 2 y a continuación divide el resultado por 250, obteniendo $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{50}$, medido todo en codos, por ultimo multiplica todo por 7 y da el valor del seqt como $5\frac{1}{25}$, manos por codo.

Si consideramos las grandes edificaciones que llevaron a cabo los egipcios, fundamentalmente la construcción de pirámides, hay que tener en cuenta que, tal y como están construidas, era necesario disponer de algún mecanismo trigonométrico para resolver ciertos problemas de construcción. Un problema esencial en la construcción de estas era el de mantener la pendiente uniforme en cada una de las caras, y a su vez la misma en las 4 caras. Quizás esta necesidad es lo que llevó a los egipcios a emplear lo que denominaron "seqt", equivalente a lo que hoy conocemos por pendiente de una superficie plana inclinada. En mediciones verticales empleaban el "codo" y en horizontales la mano, que equivalía a 1/7 del codo, también se basaban en la representación de un triángulo inscrito en un rectángulo para llegar a la conclusión: área = altura x base/2, por esta razón el escriba inicialmente dividió la base por 2.

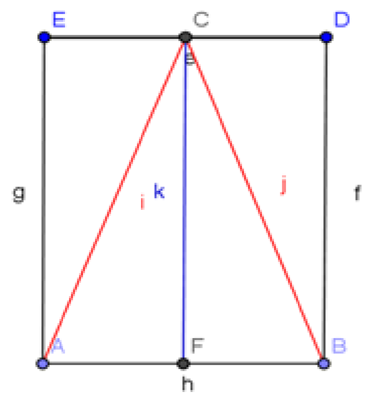


Gráfico 4. **Representación de como calculaban el área de un triángulo en el antiguo Egipto.**

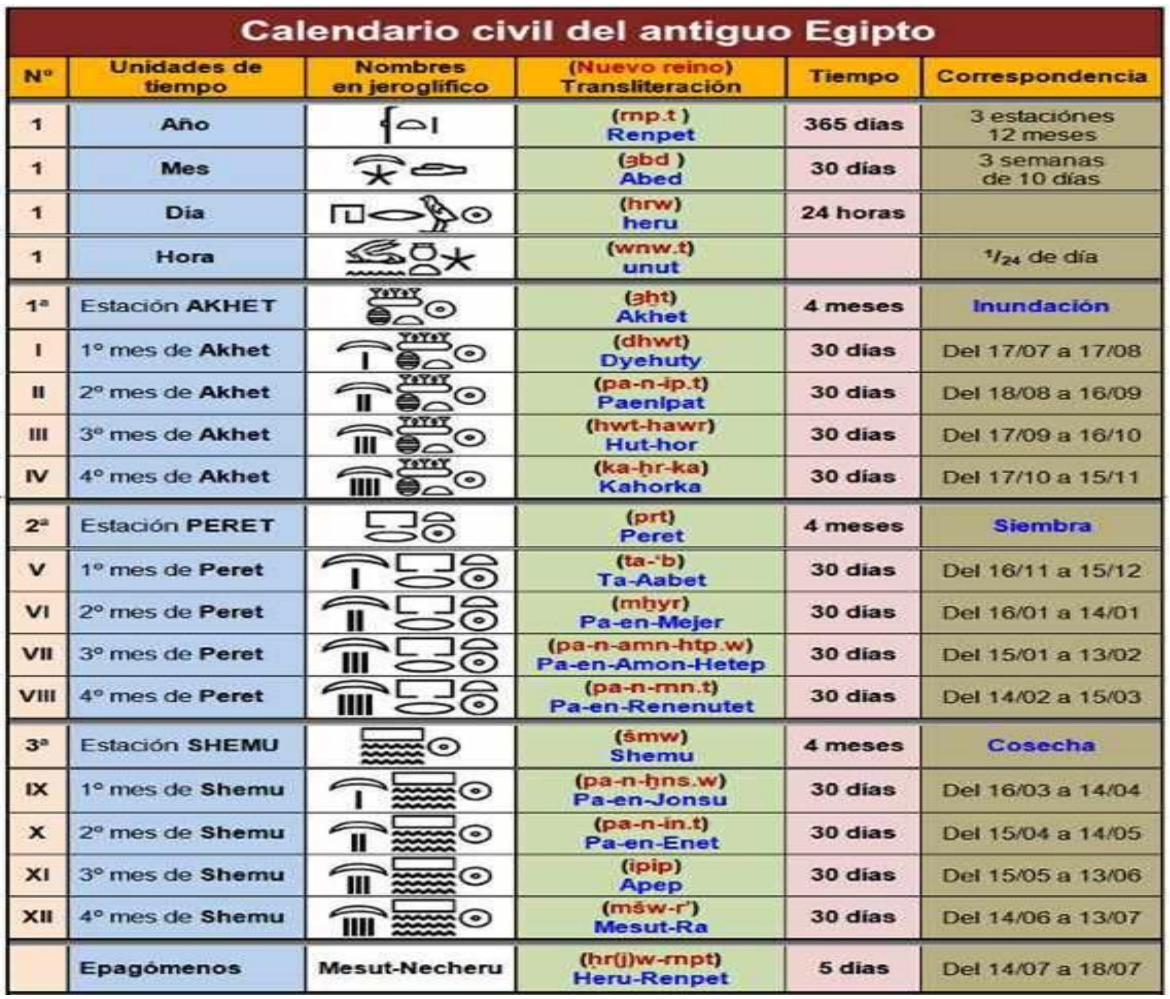
En otros problemas sobre pirámides del papiro de Ahmes el seqt resulta ser de $5\frac{1}{4}$, lo cual está algo más de acuerdo con el caso de la gran pirámide de Cheops, que mide 440 codos de lado de la base y 280 de altura cuyo seqt es por tanto $5\frac{1}{2}$ manos por codo.

El calendario egipcio y su relación con los ángulos. De igual manera como se realizó en la civilización babilónica una descripción de los calendarios empleados por estos, al igual se detallarán aquí el calendario empleado por los egipcios que se consideraron como un aporte también a nuestra civilización actual y a la matemática y la trigonometría.

El calendario civil egipcio estaba compuesto o surgió de acuerdo al ciclo de desbordamiento del Nilo en el día décimo noveno de julio de cada año, según el

Publicación en Línea (Semestral) UPEL-Maracay (Venezuela)
DL: PPL201102AR3941
ISSN: 2244-7662
Julio-Diciembre 2019. Vol. 16, N° 2

calendario juliano, a partir de ese día es el primer día del año para los egipcios y a partir de allí las actividades agrícolas se distribuían en tres estaciones de cuatro meses denominadas Ajet (desbordamiento), Peret (siembra) y Shemu (cosecha) el calendario estaba compuesto a su vez por 365 días mucho más exacto que los babilonios, divididos en 12 meses de 30 días, que sumaban 360 días; los 5 días faltantes se denominaban días festivos llamados Heru-Renpet a continuación se muestra una tabla que contiene la descripción de cada uno de los meses del calendario egipcio (Ver Gráfico 5).



Calendario civil del antiguo Egipto

Nº	Unidades de tiempo	Nombres en jeroglífico	(Nuevo reino) Transliteración	Tiempo	Correspondencia
1	Año		(rnp.t) Renpet	365 días	3 estaciones 12 meses
1	Mes		(ȝbd) Abed	30 días	3 semanas de 10 días
1	Día		(hrw) heru	24 horas	
1	Hora		(wnw.t) unut		1/24 de día
1ª	Estación **AKHET**		(ȝḫt) Akhet	4 meses	Inundación
I	1º mes de **Akhet**		(dḥwt) Dyehuty	30 días	Del 17/07 a 17/08
II	2º mes de **Akhet**		(pa-n-ip.t) Paenipat	30 días	Del 18/08 a 16/09
III	3º mes de **Akhet**		(ḥwt-ḥawr) Hut-hor	30 días	Del 17/09 a 16/10
IV	4º mes de **Akhet**		(ka-ḥr-ka) Kahorka	30 días	Del 17/10 a 15/11
2ª	Estación **PERET**		(prt) Peret	4 meses	Siembra
V	1º mes de **Peret**		(ta-ˁb) Ta-Aabet	30 días	Del 16/11 a 15/12
VI	2º mes de **Peret**		(mḫyr) Pa-en-Mejer	30 días	Del 16/01 a 14/01
VII	3º mes de **Peret**		(pa-n-amn-htp.w) Pa-en-Amon-Hetep	30 días	Del 15/01 a 13/02
VIII	4º mes de **Peret**		(pa-n-rnn.t) Pa-en-Renenutet	30 días	Del 14/02 a 15/03
3ª	Estación **SHEMU**		(šmw) Shemu	4 meses	Cosecha
IX	1º mes de **Shemu**		(pa-n-ḫns.w) Pa-en-Jonsu	30 días	Del 16/03 a 14/04
X	2º mes de **Shemu**		(pa-n-in.t) Pa-en-Enet	30 días	Del 15/04 a 14/05
XI	3º mes de **Shemu**		(ipip) Apep	30 días	Del 15/05 a 13/06
XII	4º mes de **Shemu**		(mšw-rˁ) Mesut-Ra	30 días	Del 14/06 a 13/07
	Epagómenos	Mesut-Necheru	(hr(j)w-rnpt) Heru-Renpet	5 días	Del 14/07 a 18/07

***Gráfico* 5. Tabla con los meses del calendario egipcio**. Fuente: http://www.lavia.org/espanol/archivo/grafica/CALSp.jpg.

La precisión de este calendario era debido a que, se basaban en el orto o surgir helíaco 30 minutos antes del alba de la estrella Sopdet o estrella del perro, la Sothis de los

Publicación en Línea (Semestral) UPEL-Maracay (Venezuela)
DL: PPL201102AR3941
ISSN: 2244-7662
Julio-Diciembre 2019. Vol. 16, N° 2
REVISTA MULTIDISCIPLINARIA Dialógica

griegos y nuestra Sirio pertenece a la constelación Canis major que coincide con más precisión a el año solar también sotico, aquí observaremos una inscripción egipcio que da fe este hecho y la constelación a la que se hace referencia.

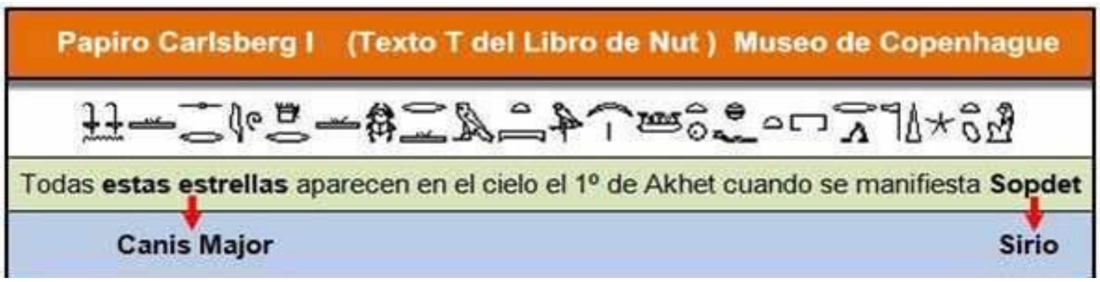


Gráfico 6. **Gráfico con transliteración del inicio del año para los egipcios.** Fuente: http://www.lavia.org/espanol/archivo/grafica/CARLSP.jpg.

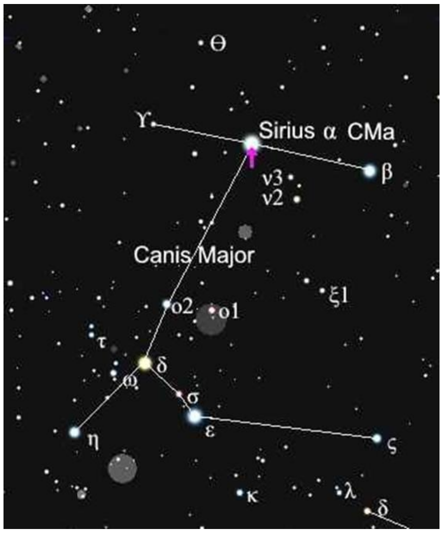


Gráfico 7. **Constelación de Sirius estrellas que marcan el inicio del año en el antiguo Egipto.** Fuente: http://www.lavia.org/espanol/archivo/grafica/SIR.jpg

Tras el largo intervalo de unos 70 días, este evento astronómico puede contemplarse desde el primer día del solsticio de verano hasta el equinoccio de primavera sucesivo, puesto que el orto heliaco de las estrellas se verifica en un ciclo de 365,25 días en el calendario civil egipcio se creaba un retraso de 1 día cada 4 años. La coincidencia entre el orto heliaco de sirio y el primer día del calendario sotico sucedía solamente cada 1460 años.

Publicación en Línea (Semestral) UPEL-Maracay (Venezuela)
DL: PPL201102AR3941
ISSN: 2244-7662
Julio-Diciembre 2019. Vol. 16, N° 2
REVISTA MULTIDISCIPLINARIA Dialógica

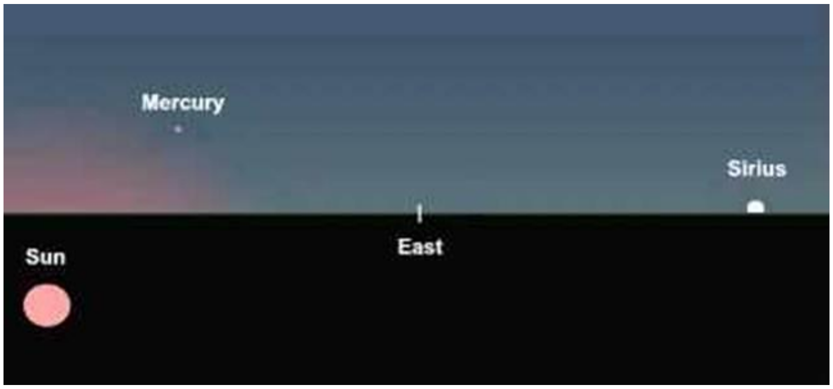


***Gráfico 8.* Grafico muestra el inicio del orto helíaco de sirio.** Fuente: http://www.lavia.org/espanol/archivo/grafica/lev_sirio.jpg.

El año ideal egipcio era aquel en que coincidía con el desbordamiento del Nilo con la ascensión de Sothis 30 minutos antes del alba y puesto que los egipcios nunca introdujeron los años bisiestos, la fiesta de año nuevo ligada a la ascensión de Sothis movía inevitablemente el calendario este año que estos consideraban ideal ocurría únicamente cada 1460 años, el hecho de que los sacerdotes egipcios tuviesen en cuenta el desplazamiento en el calendario del orto de Sirio permite establecer fechas más o menos exactas de los acontecimientos descritos por estos en los registros arqueológicos existentes hasta en nuestra actualidad.

En ambas civilizaciones ya descritas aquí trabajaron con los calendarios que relaciona directamente la medida de un ángulo ya que, por ejemplo, la división de la circunferencia en 12 partes iguales proveniente de la visualización de las 12 constelaciones y condujo a que cada una de dichas partes de la circunferencia sean de 30 grados sexagesimales cada un considerando que este era el sistema de numeración empleado por los babilonios.

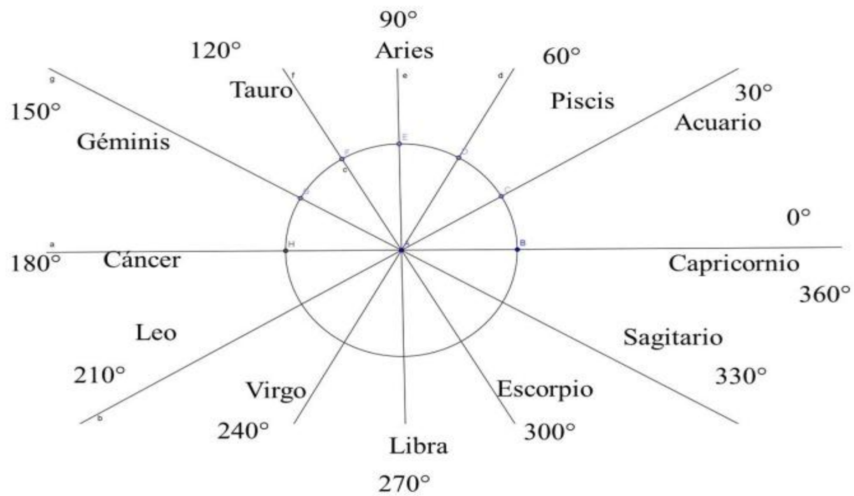


Gráfico 9. **Gráfico muestra la division de la cirncunferancia en 12 partes iguales y las constelaciones que corresponden a cada una de estas**.

De igual manera el uso de grados, minutos y segundos proviene del uso del calendario en Egipto ya que estos empleaban constelaciones para su ubicación pero como se mencionó ellos empleaban el orto de la estrella de Sothis cuando el año iniciaba 30 minutos antes del alba de la estrella, por lo cual, el alba de la estrella seria 0 grados 30 minutos y cero segundos, de esta forma se dio inicio al uso de la medida de los grados de esta manera y lo cual ayudó de forma significativa en sus navegaciones y su posicionamiento en el mar además, en la construcción de las pirámides.

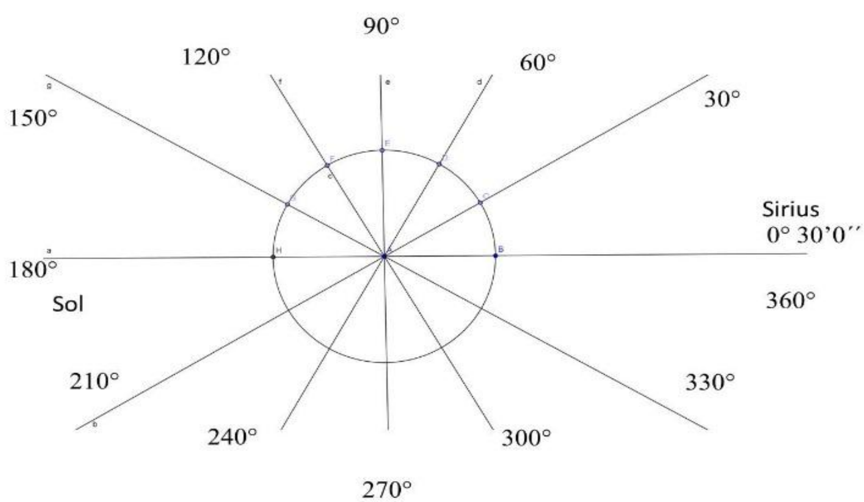


***Gráfico 10*. Gráfico muestra la división de la circunferencia en 12 partes iguales.**

Ejemplificación del Uso de esta Información en la Propuesta Didáctica o Análisis De Instrucción

En este orden de ideas se crearon actividades donde se diera la puesta en práctica de actividades donde se involucra a la historia o elementos descritos anteriormente donde los participantes deben aplicar conocimientos referidos a conversión de medidas en grados, minutos y segundos, a radianes, o ha sistema sexagesimal.

•Los cartógrafos usan una cuadricula que contiene círculos que van de polo a polo, llamados meridianos o líneas de longitud. Existen otros, paralelos al círculo ecuatorial, que recibe el nombre de paralelas o líneas de latitud ambas líneas meridianos y paralelos determinan la posición geográfica de una región.

Si la posición geográfica de Venezuela en términos de su latitud es 4,225° latitud sur y 12,4628° latitud norte expresar cada dato en términos de grados, minutos y segundos.

•Unir con líneas las medidas equivalentes.

$\frac{5\pi}{6}$		125°30´
	140°35´15´´	45°
$\frac{\pi}{4}$		150°
	22°59´60´´	140,5875
$\frac{7\pi}{8}$		23°

Trigonometría en Mesopotamia: Civilización de la Babilonia Antigua

Babilonia es un antiguo reino localizado en la región de Mesopotamia, cerca al actual Irak, fundada aproximadamente en el año 2500 a.n.e (antes de nuestra era) y tuvo su final alrededor del año 550 a.n.e.

Aproximadamente hace 1900-1600 a.n.e. los babilonios ya empleaban la medida de los ángulos y las razones trigonométricas en sus quehaceres de la agricultura, uno de las fuentes que afirma este hecho es la tablilla Plimpton 322 donde se evidencia la presencia

Publicación en Línea (Semestral) UPEL-Maracay (Venezuela)
DL: PPL201102AR3941
ISSN: 2244-7662
Julio-Diciembre 2019. Vol. 16, N° 2

de lo que actualmente conocemos como ternas pitagóricas, es decir, ternas de números que son catetos e hipotenusa de triángulos rectángulos. De igual manera se dice que los babilonios conocían las relaciones existentes entre los lados en triángulos semejantes. La trigonometría o los primeros conocimientos de la misma también fue aplicada por los babilonios en los primeros estudios de astronomía para el cálculo de la posición de cuerpos celestes y la predicción de sus órbitas, en los calendarios, en el cálculo del tiempo, y por supuesto en navegación para mejorar la exactitud de la posición y de las rutas.

La tablilla Plimpton 322 tiene dimensiones de 13 x 9 cm, y un grosor de 2 cm. Como puede leerse en la página web de la Universidad de Columbia, donde se encuentra depositada, está datada entre los años 1600 y 1900 a.n.e. Esta tablilla demuestra que los babilonios conocían las ternas pitagóricas unos 1500 años antes de que el mismísimo Pitágoras naciera.

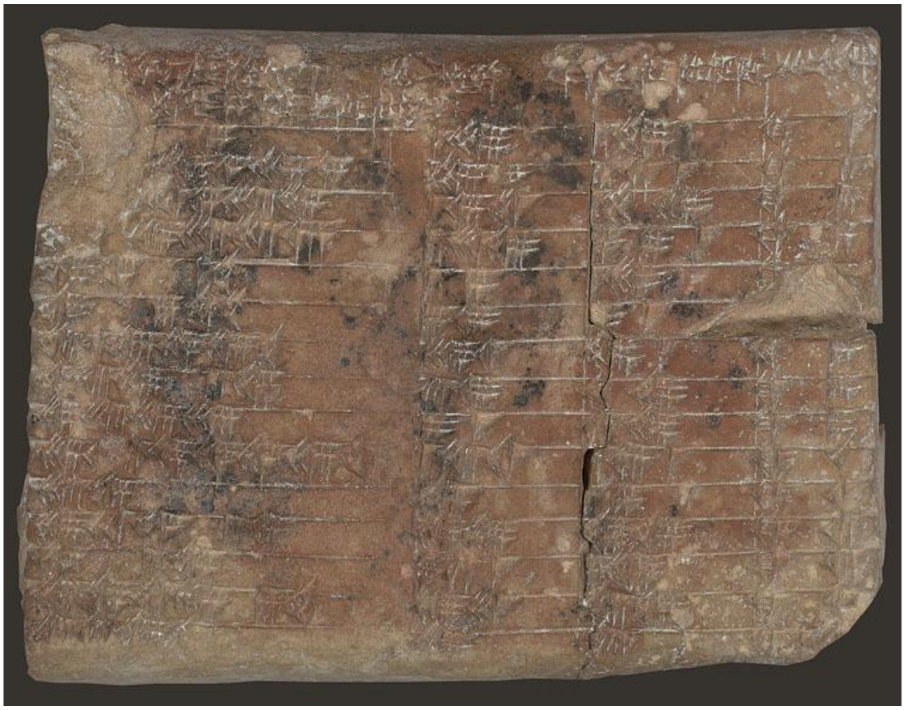


***Gráfico 11*. Tablilla Plimpton**: The University of British Columbia. N.Y. Tomado de: http://www.columbia.edu/cu/lweb/eresources/exhibitions/treasures/images/750/115.jpg

El descifrado de la tablilla corresponde a Neugebauer y Sach (Mathematical Cuneiform Text, 1945). Es importante destacar que la tablilla está escrita (tallada) mediante números cuneiformes en el sistema sexagésimal, para conocer el contenido de la tablilla se realizó una "traducción" a nuestra simbología convencional arábiga se tendría la tablilla como sigue y, posteriormente, se dará su interpretación (Ver Cuadro 1).

Cuadro 1
Transliteración de la Tablilla Plimpton 322 a Numeración Arábiga

C1								C1			C3			C4
1	59	0	15						1	59		2	49	1
1	56	56	58	14	50	6	15		56	7	1	20	25	2
1	55	7	41	15	33	45		1	16	41	1	50	49	3
1	53	10	29	32	52	16		3	31	49	5	9	1	4
1	48	54	1	40					1	5		1	37	5
1	47	6	41	40					5	19		8	1	6
1	43	11	56	28	26	40			38	11		59	1	7
1	41	33	59	3	45				13	19		20	49	8
1	38	33	36	36					8	1		12	49	9
1	35	10	2	28	27	24	26	1	22	41	2	16	1	10
1	33	45								45		1	15	11
1	29	21	54	2	15				27	59		48	49	12
1	27	0	3	45					2	41		4	49	13
1	25	48	51	35	6	40			29	31		53	49	14
1	23	13	46	40						56		1	46	15

Análisis de Instrucción. Interpretación de la Tablilla Plimpton 322

La tablilla está constituida por 4 columnas denominada C1 hasta C4, la columna 4 nos enumera las filas que posee la tablilla, por lo cual esta tablilla tiene 15 filas, la columna 3 nos representa la hipotenusa del triángulo rectángulo, por su parte la columna 2 representa uno de los catetos del triángulo rectángulo, finalmente la columna restante representa el cuadrado del cociente determinado por la hipotenusa y el cateto faltante.

Veamos cómo operamos estos números

Consideremos la fila 8 tenemos lo siguiente

1, 41 33 59 3 45 13 19 20 49

Puesto que estos números están escritos en el sistema sexagesimal debemos realizar la conversión a sistema decimal como sigue

$$1,\ 41\ 33\ 59\ 3\ 45 = 1\cdot60^{0}+41\cdot60^{-1}+33\cdot60^{-2}+59\cdot60^{-3}+3\cdot60^{-4}+45\cdot60^{-5} = 1{,}692773437 \approx 1{,}6927$$

$$13\ 19 = 13\cdot60^{1}+19\cdot60^{0}=799$$

$$20\ 49 = 20\cdot60^{1}+49\cdot60^{0}= 1249$$

Y de esta misma forma los demás números nos quedaría la conversión.

1,692773438	799	1249
	b	c

Resulta que el número 1249 como ya se explico es la hipotenusa de un triángulo rectángulo mientras que el numero 799 representa uno de los catetos llamado b. El cateto restante se puede determinar en la actualidad con el teorema de Pitágoras.

$c^2 = a^2 + b^2$	Por teorema de Pitágoras.
$c^2 - b^2 = a^2$	Sumando el opuesto de b^2 en ambos lados de la igualdad.
$a^2 = 1249^2 - 799^2$	Sustituyendo b=799 y c=1249
$a^2 = 1560001 - 638401$	Determinando el cuadrado de ambos números.
$a^2 = 921600$	Por operaciones usuales en R
$\lvert a\rvert = \sqrt{921600}$	Extrayendo raíz cuadrada en ambos lados de la igualdad
$a = \pm 960$	Calculo de la raíz cuadrada de un número real.
$a = 960$	Se considera sólo el valor positivo ya que se está trabajando con una longitud.

De manera que aplicando el teorema se tendría que él cateto restante posee el valor 960 valga acotar que en la tablilla no aparece el cateto del lado faltante.

Si ahora se realiza el cociente entre la hipotenusa y el cateto que encontramos de último tendríamos lo siguiente 1249/960= 1,301041667. Si este valor se eleva al cuadrado se obtiene 1,692709418≈1,6927 que coincide exactamente al valor descrito en la tablilla.

Sorprende la exactitud de los cálculos que realizaban los babilonios y es una muestra de lo avanzada que estaba la matemática en la época. En síntesis, la columna 1 representa el cuadrado de la secante del ángulo formado entre la hipotenusa del triángulo y el cateto conocido correspondiente con ocho cifras sexagesimales.

Como ya se ha descrito los babilonios conocían las ternas pitagóricas, pero cómo conocían estos valores. Se presupone que conocían el siguiente algoritmo aunque estos están escritos en la notación algebraica actual, parten de dos números p y q, para hallar las ternas pitagóricas, p2 – q2, 2pq y p2 + q2, siendo además p>q ambos primos entre si y positivos, y a triángulos rectángulos en los que a= p2 – q2, b= 2pq y c= p2 + q2 limitándose además a valores de p menores a 60 y a valores de q tales que $1 < \frac{p}{q} < 1 + \sqrt{2}$, es decir triángulos rectángulos en los que a<b, los babilonios descubrieron que existían 38 pares posibles de p y q que satisfacen las condiciones con lo que construyeron las 38 ternas correspondientes. En la tablilla Plimpton 322 aparecen las primeras 15 ordenadas por los valores correspondientes en forma decreciente a la razón $\frac{p^2+q^2}{2pq}$ de los ángulos 45 hasta 31 grados. Los ángulos restantes deben estar en otras tablillas que no se han descubierto aún. Se presume, además, que la tablilla podría contener 4 columnas más con valores de p, q y 2pq que representaría lo que se conoce como el cuadrado de la tangente.

La tablilla Plimpton 322 se descubrió a principios del siglo XX, su nombre proviene del editor neoyorkino George Arthur Plimpton que compro la tablilla al arqueólogo Edgar J Banks, en 1922, siendo donada a su muerte en 1936 a la universidad de Columbia donde se encuentra aún hoy en día depositada. La tablilla proviene de Senkereh, un lugar en el sur del actual Irak, correspondiente a la antigua ciudad de Larsa.

La tablilla Plimpton 322 podría dar la impresión de que es sólo un ejercicio de teoría de números, pero lo más probable es que este aspecto estuviera subordinado al problema de medir áreas de cuadrados c lados de triángulos rectángulos. A los babilonios no les gustaba trabajar con los inversos de los números irregulares, al no poder expresarlos de una manera exacta en forma de fracciones sexagesimales, y por lo tanto se interesaron en los valores de p y q que dieran lugar a enteros regulares como lados de triángulos rectángulos de forma variadas, desde un triángulo rectángulo isósceles a otros con valores menores para la razón a/b.

En la matemática babilónica es tan frecuente encontrarnos con las tablas de inversos que no es sorprendente descubrir que el material de la tablilla está relacionado también con los inversos. Si tomamos, a=1 entonces 1= (c+b)(c-b), de manera que c+b y c-b son inversos uno del otro, y si partimos de c+b=n, donde n es un numero sexagesimal regular, entonces c-b=1/n, luego a=1, b= $\frac{1}{2}\left(n-\frac{1}{n}\right)$ y c= $\frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{n}\right)$ veamos cómo se obtuvo este resultado.

Si a=1 entonces 1= (c+b)(c-b)		c + b y c - b son inversos
Consideremos c + b = n (1)		
c – b = 1/n (2)		
Luego de (1) y (2) despejamos c		
c + b = n → c = n – b	(3)	Suma de opuesto
c – b = 1/n → c = (1/n) + b	(4)	Suma de opuesto
Sumamos (3) y (4)		
c + c = n – b + (1/n) + b		
2c = n + 1/n		
c = ½(n + 1/n)		
Análogamente procedemos con b		
Despejamos b de (1) y (2)		
c + b = n → b = n – c	(5)	Suma de opuesto
c – b = 1/n → b = (c - 1/n)	(6)	Suma de opuesto
Sumamos (5) y (6)		
b + b = n – c + c – 1/n		
2b = n – 1/n		
b = ½(n – 1/n)		

Hecho que podemos comprobar

b + c = ½(n – 1/n) + ½(n + 1/n)	c – b = ½(n + 1/n) - ½(n – 1/n)
b + c = ½ n + ½ n	c – b = ½ 1/n + ½ 1/n
b + c = n	c – b = 1/n

Estos resultados constituyen una terna pitagórica racional, que se convierte en entera multiplicando todos estos por 2n. Todas las ternas de la tablilla Plimpton 322 se pueden obtener fácilmente por este método.

Como se estableció anteriormente se piensa que la tablilla podría ser mucho más amplia de los que se tiene de manera tangible, recordemos que se ha determinado con la tablilla el valor del cuadrado de la secante ya que se toma el valor de la hipotenusa y el cateto llamado b (cateto adyacente) $\frac{c^2}{b^2}$, pero otros autores toman el valor de la columna 3 como el valor del cateto llamado a y realizan la operación $\frac{a^2}{b^2}$ es decir determinan el cuadrado de tangente, y no como la secante como se ha hecho aquí, nótese además que la diferencia entre estas funciones es siempre 1, ya que $\frac{c^2}{b^2} = \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{b^2}$ y lo cierto es que las cuñas que representan las unidades enteras en la columna izquierda de la tablilla Plimpton 322 han desaparecido en la mayor parte de los casos, a causa de la fractura, pero un examen minucioso de este borde de la tablilla parece dar la razón a la interpretación de esta columna como cuadrados de secantes más bien que de tangentes.

La Trigonometría en la Grecia Antigua

La civilización de la Grecia antigua abarca desde el siglo VI a.n.e hasta el siglo III a.n.e estaba constituida por un conjunto de estados (ciudades) donde lo principal era comercio tanto interno como con otras ciudades cercanas a la cuenca del Mar Mediterráneo (Egipto, Fenicia, Persia, etc.) el desarrollo y evolución de la ciencia la técnica y la cultura se preservan aun en nuestra época como los monumentos que ejemplifican el desarrollo de esta sociedad y muchos de sus logros a nivel científico e intelectual fueron la base fundamental para el desarrollo del mundo que conocemos hoy por hoy.

La Grecia Antigua incluía originariamente la península Balcánica, las islas del Mar Jónico, el Mar Egeo y las costas del Asia Menor (Anatolia). La península Balcánica es la más pobre de las grandes penínsulas del Mediterráneo, ya que su clima que posee inviernos crudos y veranos calurosos, es desfavorable para la agricultura.

A nivel matemático ya las civilizaciones egipcia y mesopotámica habían mermado sus producciones intelectuales y ahora existía un impulso más significativo en esta civilización quizás motivado a la cercanía con las otras civilizaciones que ya habían tenido un desarrollo matemático significativo ya que procedía de sus quehaceres diarios y que ayudaba a resolver situaciones de su entorno sin embargo esta civilización formalizó mucho del conocimiento existente no solo en matemática sino también a nivel de la escritura en esta civilización se distinguen cuatro escuelas fundamentales como lo son Los Jonios (los jónicos) siglo VII – VI a.n.e, Los Pitagóricos siglo VI – V a.n.e, Los Eléatas siglo VI – V a.n.e La Escuela de Atenas desde la segunda mitad del siglo V hasta nuestra era. Las obras más importantes que son fuente histórica de la matemática griega son Historia de las Matemáticas antiguas en Grecia escrito por Eudemo de Rodas siglo IV a.n.e y Comentarios de Proclo de Bizancio en 410 – 485.

En las matemáticas de esta época los problemas prácticos relacionados con la necesidad de cálculos aritméticos, mediciones y construcciones geométricas continuaron jugando un gran papel. Sin embargo, lo nuevo era que estos problemas poco a poco se desprendieron en una rama independiente de las matemáticas que obtuvo la denominación de la lógica. A la lógica fueron atribuidas las operaciones con números enteros, las extracciones numéricas de raíces, el cálculo con la ayuda de dispositivos auxiliares como el ábaco, el cálculo de fracciones, las resoluciones numéricas de problemas que conducen a ecuaciones primer y segundo grado, problemas prácticos de cálculo y construcciones de la arquitectura, agrimensura, etc.

Al mismo tiempo, ya en la escuela de Pitágoras se advierte un proceso de recopilación de hechos matemáticos abstractos y la unión de ellos en sistemas teóricos. Así, por ejemplo, de la aritmética fue separada en una rama independiente de la teoría de números, es decir el conjunto de conocimientos matemáticos que se relacionan con las propiedades generales de las operaciones con números naturales.

Tales de Mileto. De la escuela de los Jonio se destaca Tales de Mileto las fechas de su nacimiento y muerte son desconocidas, aunque existen versiones donde la calculan a partir del eclipse del año 585 a.n.e, algo que si es unánime es su excepcional inteligencia que le dio el lugar como el primero de los siete sabios griegos, se considera que este fue discípulo de los egipcios y de los caideos. La proposición que hoy conocemos como el teorema de Tales, es decir, la de que un ángulo inscrito en una semicircunferencia es un ángulo recto, muy bien la pudo aprender Tales durante sus viajes a babilonia, pero la tradición va más lejos. Tales es considerado como un matemático autentico que fue uno de los primeros en organizar la deducción, a él también se le atribuye la demostración de los siguientes teoremas: a) todo circulo queda dividido en dos partes iguales por un diámetro b) los ángulos básicos en un triángulo isósceles son iguales c) los ángulos opuestos por el vértice que se forman al cortarse dos rectas son iguales y d) si dos triángulos son tales que dos ángulos y un lado de uno de ellos son respectivamente iguales a dos ángulos y un lado del otro, entonces los dos triángulos son congruentes.

Es válido acotar que no existe un documento antiguo que verifique que Tales demostró dichas proposiciones de igual manera apuntaremos a la tradición, aunque un siglo después un discípulo de Aristóteles llamado Eudemo de Rodas aunque el manuscrito original de una historia de la matemática se perdió pero antes de su desaparición alguien hizo un resumen de parte de esta obra donde se infiere que Tales demostró dichos teoremas, aunque el original de este resumen se perdió también, pero durante el siglo V de nuestra era el filósofo neoplatónico Proclo incluyó parte de la información que contenía ese resumen en las primeras páginas de su comentario sobre el primer libro de los Elementos de Euclides al respecto Proclo nos informa sobre Tales a manera de introducción lo siguiente tal como afirma Heath (1921).

> …fue en primer lugar a Egipto y de allí introdujo este estudio en Grecia. Descubrió por sí mismo muchas proposiciones e instruyó a sus sucesores en los principios en que se basan muchas otras siendo su método de ataque en algunos casos más general y en otros más empírico (p. 120).

Es básicamente en esta cita de tercera mano donde se evidencia donde Tales es reconocido como un matemático y además por haber demostrado dichos teoremas, en especial se hará énfasis en el cuarto teorema mencionado que hace referencia a la proporcionalidad o mejor dicho es conocido como el teorema de la proporcionalidad de los lados de un triángulo, que surgió tal como relata Plutarco como consecuencia del problema de medir la altura de las pirámides de Egipto, este observó las longitudes de sus sombras en el momento en que la sombra proyectada por un palo vertical era exactamente igual a su altura.

Según la leyenda, Tales trató este problema como un caso de triángulos semejantes. Tal y como especifica su cuarto teorema, uno de los principios básicos de la geometría es:

Publicación en Línea (Semestral) UPEL-Maracay (Venezuela)
DL: PPL201102AR3941
ISSN: 2244-7662
Julio-Diciembre 2019. Vol. 16, N° 2
REVISTA MULTIDISCIPLINARIA Dialógica

“Si en un triángulo se traza una línea paralela a cualquiera de sus lados, se obtienen dos triángulos semejantes (sus ángulos correspondientes son iguales y sus lados son proporcionales entre sí)”. Siendo su gran aplicación el siguiente corolario: “Si dos triángulos son semejantes sus lados son proporcionales”. O lo que es lo mismo: la razón entre la longitud de dos lados en uno de ellos se mantiene constante en el otro; algo que, según Herodoto, el propio Tales empleó para medir en Egipto la altura de la pirámide de Keops.

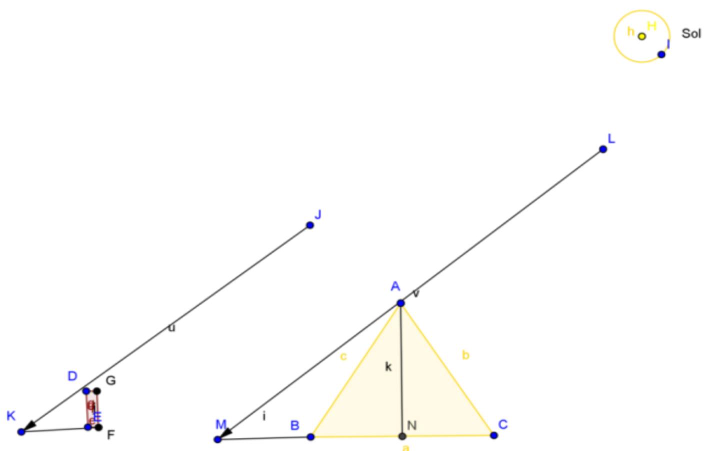


Gráfico 12. **Gráfico empleado para determinar la altura de la pirámide.**

Es el caso de los dos triángulos rectángulos del Gráfico 12: uno de ellos, de catetos MN y NA (longitud de la sombra de la pirámide-conocida- y longitud de su altura- a determinar); y el otro, de catetos FG y KF (longitud de la vara clavada en el suelo- conocida y longitud de su sombra- conocida). Para su resolución solo quedaría realizar las mediciones en una hora del día en que la sombra de la vara sea perpendicular a la base de la cara de la pirámide. La longitud MN será la suma de la longitud de la sombra de la pirámide y la mitad de la longitud de una de sus caras. Como las longitudes de la vara y su sombra, FG y KF, son conocidas, se puede ya calcular la altura de la pirámide $\mathrm{NA} = \frac{\mathrm{MNxFG}}{\mathrm{KF}}$

Existen diversos relatos de cómo Tales midió la altura de las pirámides de Keops. A continuación, se reflejan algunas:

Diógenes Laercio escribió en el siglo II d.C. citando a Jerónimo, un alumno de Aristóteles: Jerónimo dice que Tales hasta tuvo éxito en medir las pirámides mediante la observación de la longitud de su sombra en el momento en que nuestra sombra es igual a nuestra altura.” Era solo una observación empírica de que en el instante cuando la sombra de un objeto coincide con su altura entonces lo mismo debe ser cierto para todos los demás objetos.

Una declaración similar hace Plinio: Tales descubrió cómo obtener la altura de las pirámides y de todos los otros objetos similares, simplemente haciendo la medición de la sombra del objeto en el momento que un cuerpo y su sombra son iguales en longitud.

Sin embargo, Plutarco cuenta la historia de una manera que significaría que Tales se estaba acercando a la idea de los triángulos semejantes: Tales, sin ayuda de ningún instrumento, solo colocó un palo en la extremidad de la sombra producida por la pirámide y habiendo realizado dos triángulos con la luz de los rayos solares, mostró que la pirámide guarda respecto del palo la misma proporción que muestran sus sombras entre sí. Este teorema tal y como está formulado no aparece hasta tres siglos después en el libro VI de los Elementos de Euclides.

Colerus (1972), en su “Breve historia de las Matemáticas”, escenifica cómo Tales pudo medir con exactitud la altura de la Pirámide de Keops: Se echa sobre la arena y determina la longitud de su propio cuerpo. Entonces los sacerdotes le preguntan a Tales en que está pensando, y les explica: “Me pondré sobre un extremo de esta línea que mide la longitud de mi cuerpo y esperaré hasta que mi sombra sea igual de larga. En ese instante, la sombra de la pirámide también ha de medir tantos pasos como su altura”. Desorientados por la sencillez de la solución, le preguntan si acaso no existirá algún error. Más Tales añade: “Pero si queréis que os mida esa altura a cualquier hora, clavaré en la arena mi bastón. ¿Veis?, ahora su sombra es aproximadamente la mitad de su longitud; por tanto, en este momento también la sombra de la pirámide mide la mitad de su altura. Ahora ya sabéis como poder medirla en cualquier momento: bastará comparar la longitud del bastón con la de su sombra para encontrar, mediante división o multiplicación con la sombra de la pirámide, la altura de ésta.

Finalmente, existe una novela, llamada El teorema del loro de Denis Guedj, en la que se cuentan esta y otras muchas historias de las Matemáticas. Acerca de Tales y su medición de la pirámide de Keops dice lo siguiente: La relación que yo establezco con mi sombra es la misma que la pirámide establece con la suya, y por tanto, en el mismo instante que mi sombra sea igual a mi estatura, la sombra de la pirámide será igual a su altura. ¡He aquí la solución que buscaba!

Solo faltaba ponerla en práctica y como Tales no podía hacerlo solo, necesitaban ser dos, el fellah (campesino) que le acompañaba accedió a ayudarlo. Al día siguiente, al alba, el fellah fue hacia el monumento y se sentó bajo su sombra inmensa. Tales, dibujó en la arena un círculo con un radio igual a su propia estatura, se situó en el centro y se puso de pie bien derecho (perpendicular a su sombra). Luego, fijó los ojos en el borde extremo de su sombra. Cuando ésta tocó la circunferencia, es decir, cuando su longitud era igual a su estatura, dio un grito convenido. En ese momento, el fellah, atento, plantó de inmediato un palo en el lugar donde estaba el extremo de la sombra de la pirámide. Tales, corrió hacia el palo y, sin intercambiar una sola palabra, con la ayuda de una cuerda bien tensa midieron la distancia que separaba el palo del centro de la pirámide y supieron su altura pues ambas tenían que ser iguales.

Existe otra versión de que Tales quería determinar la distancia de un barco visto desde la orilla de una torre. Por desgracia, el método utilizado sólo puede conjeturarse. La suposición más habitual es que Tales, observo la nave desde lo alto de una torre en la orilla del mar, para ello se utiliza la práctica equivalente a la proporcionalidad de dos de los lados similares de los triángulos rectángulos, uno pequeño y uno grande.

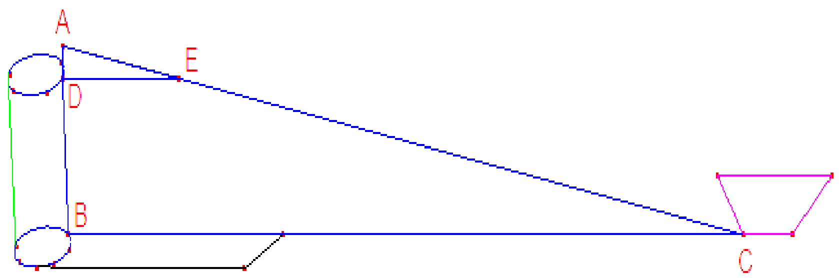


***Gráfico 13.* Gráfico para determinar la distancia de los barcos desde una torre.**

Publicación en Línea (Semestral) UPEL-Maracay (Venezuela)
DL: PPL201102AR3941
ISSN: 2244-7662
Julio-Diciembre 2019. Vol. 16, N° 2

Supongamos que B es la base de la torre, C donde está ubicada la nave. Sólo era necesario para un hombre de pie en la parte superior de la torre, detener un instrumento con dos varas formando un ángulo recto, y colocar una de las varas en posición vertical que llamaremos en este caso como DA en una línea recta con B, y la otra vara que llamaremos DE en la dirección de la nave, se tomar cualquier punto A del segmento DA, y luego marcar en el punto E, para así tener el segmento DE donde la línea de visión desde A hasta C corta el segmento DE. Entonces AD = l y DE = m, y pueden ser medidos, como también es conocida la altura de la torre desde B hasta D, la altura BD = h, además si se observa AB= BD+DA y, por triángulos semejantes. Tendríamos lo siguiente $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AD}} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{DE}} \rightarrow \mathrm{BC} = \frac{\mathrm{AB}\times\mathrm{DE}}{\mathrm{AD}} \rightarrow \mathrm{BC} = \frac{(\mathrm{BD}+\mathrm{DA})\times\mathrm{DE}}{\mathrm{AD}} \rightarrow \mathrm{BC} = \frac{(\mathrm{l}+\mathrm{h})\times\mathrm{m}}{\mathrm{l}}$ de esta manera podría calcularse la distancia del barco visto desde lo alto de una torre. Esta deducción tuvo objeciones ya que no depende directamente de la proposición I.26 de Euclides conocido como el criterio ALA.

Que puede notarse son muchas las anécdotas que preceden el desarrollo de este teorema por una parte en la primera deducción se consideran triángulos rectángulos por separado y que en ellos existe la proporcionalidad lo que podría inferirse la idea también de traslación.

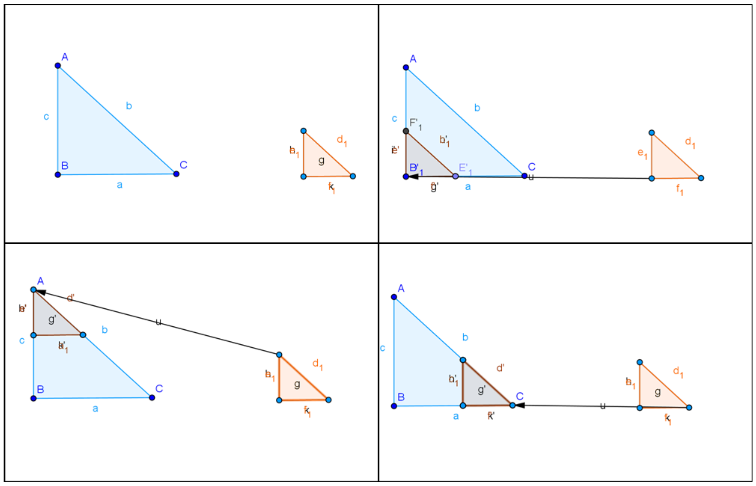


Gráfico 14. **Grafico ilustrativo de las proposiciones de Tales.**

Si se traslada el triángulo dependiendo del vértice se puede observar como en estos sigue cumpliéndose la proposición deducida por Tales, por su parte en la segunda deducción donde se considera la distancia desde la orilla hasta el barco allí se induce la idea del empleo de un instrumento rudimentario de posicionamiento de ángulos y latitudes, que posteriormente dicho instrumento se perfecciono y se denomina en la actualidad como astrolabio. Para cerrar se enuncia el teorema de proporcionalidad.

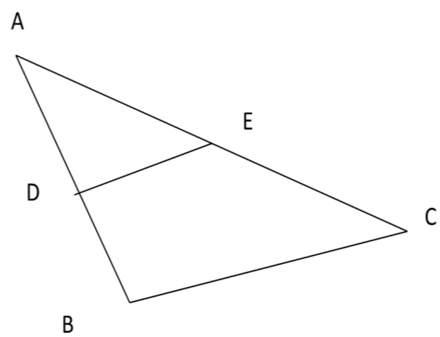


Gráfico 15. **Figura para demostrar el teorema de Thales.**

Sea ABC un triángulo cualquiera, y DE un segmento cuyos extremos están sobre dos lados del triángulo ABC. Supongamos que el punto D esta sobre el segmento AB y el punto E está en el segmento AC, entonces el segmento DE es paralelo al segmento BC si y solo si los triángulos ABC y ADE son semejantes es decir: $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AD}} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{DE}} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AE}}$

Análisis de Instrucción

Donde se aplican los conocimientos desarrollados por Thales en la Grecia antigua.
-¿Cuál es la altura de la montaña?

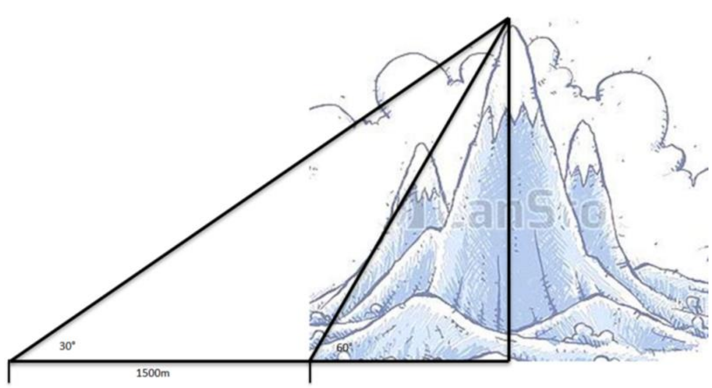


Gráfico 16. **Ilustración del Problema: -¿Cuál es la altura de la montaña?**

Publicación en Línea (Semestral) UPEL-Maracay (Venezuela)
DL: PPL201102AR3941
ISSN: 2244-7662
Julio-Diciembre 2019. Vol. 16, N° 2
REVISTA MULTIDISCIPLINARIA Dialógica

Para resolver el problema se plantea un triángulo similar fuera de contexto como se muestra:

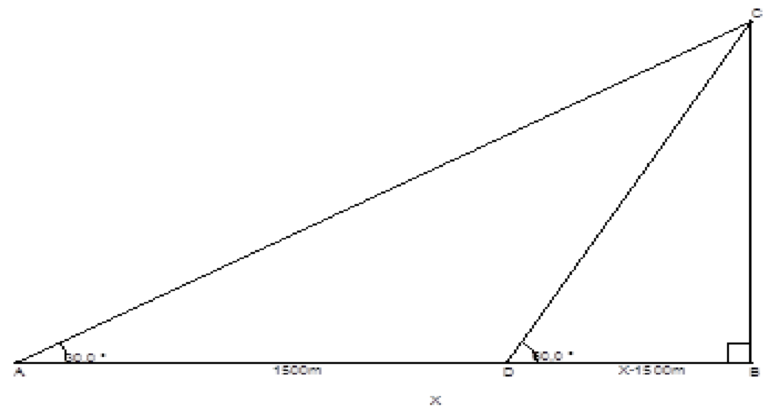


Gráfico 17. **Análisis del Problema: -¿Cuál es la altura de la montaña?**

Ahora bien, se plantearán dos posibles formas de resolver el ejercicio aplicando las razones trigonométricas.

Primera Opción: Considerando que en el triángulo BCD hay un ángulo de 60 y que los ángulos ADC y BDC son ángulos suplementarios por construcción, como el ángulo BDC mide 60, entonces el ángulo ADC mide 120.

Ahora bien, en el triángulo ADC los ángulos internos CAD y ADC miden 30 y 120 respectivamente, como la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es 180, entonces el ángulo DAC mide 30, por lo que el triángulo ADC es un triángulo isósceles cuya base es AC y lados congruentes DA y CD, pero se sabe que DA=1500m por lo tanto CD=1500m.

Nótese que el triángulo BCD es un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es CD, y con un ángulo interno de 60, aplicando la razón del seno se tendría que:

$$sen\ 60 = \frac{C.O}{H} = \frac{BC}{1500m} \Rightarrow BC = 1500m.sen\ 60 \Rightarrow BC = 1500m.\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\Rightarrow BC = 750\sqrt{3}m$ Que sería la altura de la montaña pedida.

Segunda Opción: Nótese que, por construcción, en el Gráfico 16 hay dos triángulos rectángulos, a saber, son los triángulos ABC y BCD con hipotenusas AC y CD respectivamente, además el triángulo ABC tiene un ángulo interno de 30 y el triángulo BCD tiene un ángulo interno de 60, aplicando la razón de la tangente en ambos triángulos se tendría que:

Triángulo ABC:$tg\ 30 = \frac{C.O}{C.A} = \frac{BC}{AB}$. Como se sabe que AD=1500m, se llamará AB=X, así BD=X-1500m, luego $tg\ 30 = \frac{BC}{x} \Rightarrow BC = xtg\ 30 \Rightarrow BC = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ (1)

Triángulo BCD: $tg\ 60 = \frac{C.O}{C.A} = \frac{BC}{X-1500m} \Rightarrow BC = (X - 1500m)tg\ 60 \Rightarrow BC = (X - 1500m)\sqrt{3} \Rightarrow BC = \sqrt{3}X - 1500\sqrt{3}m$ (2). Sustituyendo la expresión (1) en (2) se tiene que:$\frac{\sqrt{3}}{3}X = \sqrt{3}X - 1500\sqrt{3}m \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3}X - \sqrt{3}X = -1500\sqrt{3}m$

$$\Rightarrow \sqrt{3}\left(\frac{X}{3} - X\right) = -1500\sqrt{3}m \Rightarrow \frac{X - 3X}{3} = -1500m \Rightarrow -2X = -4500m$$

$\Rightarrow X = 2250m$, ahora bien, sustituyendo el valor de X en (1) se tiene que:

$BC = \frac{\sqrt{3}}{3}.2250m \Rightarrow BC = 750\sqrt{3}m$ Que es el valor pedido.

Conclusión

A manera de cierre se presentó aquí en primer lugar la revisión histórica del contenido de funciones y razones trigonométricas y como dichos conceptos fueron evolucionando a lo largo del tiempo no sólo en contenido sino también en el uso de algunos signos y símbolos que se emplean en la actualidad y como este tema ha propiciado la evolución en otras áreas de las ciencias, y en segundo lugar fomentar una manera de abordar ciertos aspectos de la trigonometría considerando su historia y también como vincularlas de manera didáctica en nuestras aulas de clases, ya que es importante que el docente en formación o los docentes de Matemática pueden abordar estos conocimientos en educación media general y a nivel universitario y no se vea de forma rutinaria o simplificarlas a un mero hecho de reproducir fórmulas donde el estudiante no se apropia de los conceptos que intervienen en el tema. Por tal motivo se orienta a que los docentes en el área indaguen sobre estas y otras formas de abordar el contenido de la trigonometría para que se fomente el interés en los estudiantes en aprender Matemática.

Referencias

Arráez, M. (2006). *La heurística una actividad interpretativa*. Revista Sapiens. Universidad Pedagógica Experimental Libertador. Venezuela.

Berrospi, K. (2012). La trigonometría en la vida cotidiana. [Documento en línea]. Disponible: http://escolarsta.blogspot.com/2012/06/la-trigonometria-en-la-vida-cotidiana.html

Boyer, C (1999). *Historia de la Matemática*. Editorial Alianza. Madrid España.

Carmona C, (2007). *La matemática y su importancia* [Documento en línea]. Disponible: http://matematicss.blogspot.com/2007/09/la-matemtica-y-su-importancia.html

Colerus, E. (1972). *Breve historia de las Matemáticas*. Doncel. Madrid España.

De Guzmán, M. (s/f). *Enseñanzas de las ciencias y la matemática*. [Documento en Línea]. http://www.oei.es/oeivirt/edumat.htm

Heath, T. (1921). *A History of Greek Mathematics, I y II*. Nueva York: Dover Publications, 1981 1ra Ed. Oxford: Clarendon Press.

Husserl. (1947). *Ideas relativas a una Fenomenología pura y una filosofía fenomenológica (Prolegómenos a la Lógica pura)*. Madrid, 1967. F.C.E. México, 1949.

Kedrov, M y Spirkin, A. (1967). *La ciencia*. Grijabo México.

Manual de Trabajos de Grado de Especialización y Maestría y Tesis Doctorales. (2016) quinta edición. Fondo Editorial de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador.

Martínez, M. (2006). *La investigación cualitativa.* Revista IIPSI. Facultad de psicología UNMSM. Volumen 9 número 1 2006 (pp. 123-146).

Montalvo R (2012) *Historia de la trigonometría y su enseñanza.* Trabajo de Grado. Universidad Autónoma de Puebla. México.

Mosquera, J. (2005). *Didáctica del algebra y la trigonometría. Universidad Nacional Abierta.* Editorial UNA. (p. 93) Caracas, VE: Universidad Nacional Abierta.

Orellana, M. (1996). *Historia de la matemática* (2a. ed.). Universidad Central de Venezuela. Caracas: Venezuela.

Ribnikov, K. (1987). *Historia de las Matemáticas.* Moscú, Rusia: Mir

Rico, L. (2013). *El método de análisis didáctico.* Revista iberoamericana de educación matemática. *Revista UNIÓN*, *33*, 22.

Sampieri, R. (2006). *Metodología de la investigación* (4a. ed.). México, D.F.: Mc Graw Hill

Smith, D. (1951). *History of Mathematics*. New York, Estados Unidos de América: Dover Publications Ine.

Terán, G. (2006). *Paradigmas De Investigación: Concepciones básicas*. Quito, Ecuador: SobocGrafic.

The aryabhatiya of a Ryabhata (1930) Walter, E. (traducción) Universidad de Chicago.

Van Hiele, P. (1957). *El problema de la comprensión en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría.* Tesis doctoral. Universidad Real de Utrecht. 4 de julio de 1957.

Vera F (s/f) Breve Historia de la Matemática (2a. ed.). Buenos Aires, Argentina: Losada.

Síntesis Curricular

José Antonio Mendoza González

Profesor de Matemática egresado de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (2011). Magíster en Educación Mención Enseñanza de la Matemática (2017). Se ha desempeñado como profesor de Matemática, Dibujo Técnico y Física en varios institutos de educación media. , y como profesor de Matemática en la UPEL Maracay, Instituto Tecnológico Carlos Soublette. Es Analista de Sistemas en la UPEL Maracay.