



República Bolivariana de Venezuela
Facultad de Ciencias
Departamento de Física
Centro de Física Fundamental

Paredes de Dominio y Condiciones de Convergencia Nulas

Br José Ruiz Torres
Tutor: Dr. Nelson Pantoja

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al grado
académico de Licenciado en Física

Octubre 2019

Resumen

En relatividad general, los espaciotiempos $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ asociados a paredes delgadas se tratan usualmente empleando las condiciones de empalme de Israel, las cuales exigen continuidad en la métrica inducida sobre la pared. En los últimos años, una gran cantidad de trabajos se han dedicado al estudio de mundos brana pared de dominio, que tienen como límite pared delgada al muy conocido escenario Randall-Sundrum. Marolf y Yaida (2005) han sugerido que las condiciones de empalme de Israel se cumplen siempre que se satisfagan las condiciones de energía nulas, y que esas condiciones se violan en el escenario Randall-Sundrum. En el presente trabajo, empleando técnicas distribucionales en varios mundos brana pared de dominio con límite pared delgada completamente riguroso, se estudian las mencionadas condiciones de energía, encontrándose contraejemplos a las afirmaciones de la citada referencia.

Palabras clave: Condiciones de empalme, Condiciones de empalme, Distribuciones tensoriales, Paredes de dominio.

Índice general

1. El punto de partida	6
1.1. Condiciones de Energía y Condiciones de Empalme	6
1.2. Condiciones de Energía	7
1.3. Condiciones de Empalme	7
2. Pilares Matemáticos	9
2.1. Distribuciones y Tensores	9
2.2. Métricas regulares <i>a la</i> Geroch-Traschen	12
3. Espaciotiempos	14
3.1. Paredes de dominio gruesas y límite de pared delgada	15
3.2. Diferentes Warp Factors, una receta	15
3.3. Espaciotiempo no estático	20
3.4. Taub por un lado y plana por el otro	21
4. Conclusiones	23
Bibliografía	25

Introducción

Después de más de un siglo desde que la relatividad general entró oficialmente al mundo de la física, sus predicciones han sido exitosas, e incluso ha encontrado aplicaciones que hoy en día se dan por sentado, como es el caso de los sistemas de navegación satelital. Como si fuera poco, esta ya forma parte de la cultura popular, en particular, las ideas de singularidades espaciotemporales y de agujeros negros. Como toda teoría física, sin embargo, esta tiene sus límites, y los agujeros negros y singularidades espaciotemporales están incluidos dentro de estos límites. Actualmente, el tratamiento riguroso de estos objetos forma un área de estudio en sí misma, y del cual solo veremos la punta del iceberg. Los pioneros de esta área son ahora nombres conocidos en la física teórica, entre los que se encuentran Stephen Hawking, Roger Penrose, Robert Geroch, entre otros. Es claro que es un tema no trivial, ya que la primera vez que la idea de singularidad en relatividad general surgió, fue en los artículos de Schwarzschild [1, 2] en 1916, donde Schwarzschild encontró la primera solución a las ecuaciones de Einstein, por lo que tal solución lleva su nombre.

Otro punto importante introducido por Schwarzschild [3], es el de las condiciones de continuidad en la frontera de una estrella: ¿cómo es la transición de la solución interior a la solución exterior a la estrella? Esto podría parecer algo trivial, pero que no sea actualmente un tema zanjado, es evidencia de lo contrario. A través de los años, han surgido condiciones que intentan dar sentido a esta transición, llamadas condiciones de empalme. Por ahora, mencionaremos la idea básica: Si dos espaciotiempos están separados por una hipersuperficie, ¿qué ocurre al pasar de un espaciotiempo al otro? Debido a la no linealidad de la relatividad general, esta pregunta no es tan fácil de responder, en especial si se hace un tratamiento distribucional, que puede ser necesario en ciertos casos, lo que conlleva a tener incluso un mayor cuidado, ya que se corre el riesgo de que las ecuaciones estén mal definidas.

Un concepto importante en la física teórica que surgió hace relativamente poco, es el de mundo brana. Un ejemplo temprano, quizás el primero, en el que se piensa en que nuestro universo está dentro de uno de estos mundos brana, es propuesto en [4]. El concepto de mundo brana es relevante debido a que las teorías físicas conocidas pueden derivarse en tal caso, y da posibles explicaciones al problema de jerarquía [5]. Sin embargo, en nuestro caso, nos enfocamos en un aspecto de estas: un potencial con ciertas características puede dar origen a un mundo brana pared de dominio, el es solución a las ecuaciones acopladas de Einstein-campo escalar. En el límite *brana* o de pared infinitamente delgada, dicha configuración puede ser llevada a la de una hipersuperficie (si se tiene el cuidado suficiente) que puede separar dos o más espaciotiempos. Esto quiere decir que son sistemas apropiados para estudiar las condiciones de empalme.

A continuación, delineamos el problema que nos ocupará. En primera instancia, se quiere verificar si el cumplimiento o violación de la condición nula de energía tiene efecto alguno

sobre la continuidad de la métrica del espaciotiempo que se esté estudiando, idea adelantada en [6]. Adicionalmente, se verifica si la afirmación de que el escenario Randall-Sundrum (RS) no cumple con las condiciones de convergencia es cierta, mencionada también en [6].

La ruta que se sigue es la de, para distintos espaciotiempos, verificar si la condición nula de energía se cumple. Sin embargo, se requieren varias herramientas técnicas para encarar el problema con rigurosidad. Los primeros dos capítulos cementan las bases sobre las que descansan los resultados encontrados.

En el capítulo uno, se hace una revisión de [6] en la sección 1.1, explicando en mayor detalle el interés que impulsó el presente trabajo. Posteriormente se concretan las nociones de condiciones de energía y de empalme. En la sección 1.2, se definen los conceptos básicos necesarios para derivar las condiciones de energía, en particular, para la condición nula de energía, que requiere ciertos detalles para que esté apropiadamente definida. En 1.3, definimos el trasfondo sobre el que se postulan las condiciones de empalme.

En el capítulo dos, definimos el concepto de distribución tensorial (sección 2.1) y en la sección 2.2 se enuncian resultados importantes debidos a Geroch y Traschen, que serán de utilidad en este trabajo.

El capítulo tres se centra en los resultados obtenidos. Se comienza con una revisión rápida de los espaciotiempos estudiados en este trabajo. Se define el concepto de pared de dominio (sección 3.1), se encuentran las condiciones de energía para cada uno de estos espaciotiempos (secciones 3.2, 3.3, 3.4) y se observan las métricas inducidas para cada espaciotiempo.

www.bdigital.ula.ve

Capítulo 1

El punto de partida

En este capítulo, empezamos haciendo una breve revisión de [6], explicando la razón del interés en las afirmaciones hechas allí. Luego revisamos las nociones de condiciones de energía y de empalme. Para las primeras, se seguirá el tratamiento encontrado en [7] para condiciones nulas. Estas son las protagonistas últimas en el desarrollo del capítulo tres. Para las segundas, se recopiló información de [3, 8], presentándola de manera concisa y adaptada a la notación utilizada en este trabajo.

1.1. Condiciones de Energía y Condiciones de Empalme

En [6] se afirma que no se espera que la métrica de un espaciotiempo en el límite de pared delgada sea continua si no se cumple la condición nula de energía. Además, se afirma que el escenario RS no cumple con esta condición. Que la métrica no sea continua lleva a expresiones mal definidas de cualquier tensor producido por contracciones y derivadas de la métrica. Debido a que en [6] se utilizan las condiciones nulas, aquí también se utilizarán las condiciones nulas, para tener un punto de vista similar en cuanto a posibles interpretaciones y resultados.

Sin embargo, en [6] se propone una métrica con Warp Factors arbitrarios, y se encuentran condiciones sobre las derivadas de estos Warp Factors para asegurar que se cumplan las condiciones, además de utilizar las condiciones de empalme de Israel. Mencionadas condiciones están sostenidas por suposiciones, y se refiere al lector a [6] para los detalles. En el presente trabajo, se utilizó teoría de distribuciones, ya que asegura que se tienen herramientas matemáticas rigurosas, permitiendo encontrar las condiciones nulas de energía sin suposiciones acerca de los Warp Factors ni de los espaciotiempos tratados.

Se enunciará el primer teorema de [6] ya que presenta similitudes con definiciones posteriores, y se refiere al lector a [6] para más detalles. Sea Σ^z una familia de hipersuperficies de co-dimensión uno, con Σ^0 una hipersuperficie singular, a través de la cuál la métrica inducida es continua y la curvatura extrínseca es discontinua, con ambas cantidades tendiendo a un límite bien definido a ambos lados de Σ^0 . Sea una familia de espaciotiempos $(\mathcal{M}, \mathbf{g}_\lambda)$ de dimension $d \geq 3$, con $\lambda \in (0, 1]$. Con $\{\mathbf{g}_\lambda\}$ una familia de métricas suaves con signatura de Lorentz, se desea que el límite $\lambda \rightarrow 0$ defina una pared delgada sobre alguna hipersuperficie de co-dimensión uno Σ^0 , sin requerir que el límite sobre el conjunto de métricas sea suave.

Teorema 1 de Marolf y Yaida *Para una familia monoparamétrica de métricas suaves descritas por el ansatz*

$$\mathbf{g}_\lambda = -e^{2\alpha_\lambda(z)} dt dt + e^{2\beta_\lambda(z)} \sum_{i=1}^{d-2} dx^i dx^i + dz dz \quad (1.1)$$

y que satisfagan

1. El límite $\lambda \rightarrow 0$ de \mathbf{g}_λ define una métrica suave con signatura de Lorentz \mathbf{g}_0 en cualquier punto lejos de Σ^0 , y que se cumpla este límite también para la primera y segunda derivada de la misma.
2. Cada \mathbf{g}_λ con $\lambda > 0$ satisface la condición nula de convergencia: $R_{ab}k^a k^b \geq 0$ para todo k^a nulo.

Entonces la métrica límite \mathbf{g}_0 define métricas inducidas continuas sobre las hipersuperficies Σ^z .

1.2. Condiciones de Energía

Una congruencia en $\mathcal{O} \subset \mathcal{M}$ (\mathcal{O} abierto), en un espaciotiempo $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ es una familia de curvas tal que a través de cada punto $p \in \mathcal{O}$ pasa una y solo una curva dentro de esta familia. Las tangentes a estas curvas proveen un campo vectorial en \mathcal{O} . Estas tangentes pueden ser parametrizadas por vectores tangentes nulos k^a para tener familias de geodésicas nulas, que no son tan fácilmente parametrizables, ya que, al no tener un parámetro afín determinado, se desconoce cómo reescalar tal parámetro para geodésicas distintas.

Lo anterior nos lleva a considerar otras maneras de encontrar una parametrización satisfactoria para las geodésicas nulas. Con v^a un vector de desviación, el cumplimiento de $k^a \nabla_a (k^b v_b) = 0$ (esto es $k^a v_a$ constante a lo largo de la geodésica), lleva a considerar el estudio de vectores de desviación tales que $k^a v_a = 0$, ya que la parte ortogonal puede ser no trivial. Además, si la diferencia entre dos vectores de desviación es proporcional a k_a , se tendrá un desplazamiento dentro de una misma geodésica, por lo que estos son los vectores físicamente interesantes. Esto es debido a que es posible que encontrar una sola geodésica incompleta sea suficiente garantía de la existencia de una singularidad.

Así, sea V_p un espacio vectorial tangente en el punto $p \in M$. Habrá un $\bar{V}_p \subset V_p$, tal que $\forall v^a \in \bar{V}_p$ se cumpla $k^a v_a = 0$. Luego, se define a \hat{V}_p como el subespacio dos dimensional de \bar{V}_p donde $\forall v^a, \mu^a \in \hat{V}_p$ se cumple $v^a - \mu^a = ck^a$, con $c \in \mathbb{R}$. Esto puede generalizarse a tensores de cualquier tipo. Con estas definiciones, puede demostrarse que la condición nula de energía es $R_{ab}k^a k^b \geq 0$, que de cumplirse, asegura que la ecuación de Raychaudhuri alcanza un valor singular. Esta también se cumple por continuidad si se cumplen otras condiciones de energía (débil y fuerte).

1.3. Condiciones de Empalme

Sea Σ una hipersuperficie orientable, no nula, $(n-1)$ -dimensional, que separa dos espaciotiempos n -dimensionales $(\mathcal{M}^1, \mathbf{g}_1)$ y $(\mathcal{M}^2, \mathbf{g}_2)$. Escoger alguna orientación específica de Σ lleva a denotar a alguno de los espaciotiempos como el espaciotiempo $+$, y al otro como el espaciotiempo $-$. La orientación de Σ convencionalmente se escoge de manera que

el vector \mathbf{n} , n -dimensional, perpendicular a Σ , apunte de $(\mathcal{M}^-, \mathbf{g}_-)$ a $(\mathcal{M}^+, \mathbf{g}_+)$. Denotaremos cualquier tensor definido sobre Σ como \mathbf{T}_Σ .

Las condiciones de empalme dependen de la siguiente noción: supóngase que se tiene un tensor \mathbf{W} , definido sobre los dos espaciotiempos separados por Σ , como \mathbf{W}_+ y \mathbf{W}_- . Podría ocurrir que este tensor, tanto en los dos espaciotiempos como su pullback en Σ , sea discontinuo. Esto es

$$[[\mathbf{W}]] \equiv \mathbf{W}_+ - \mathbf{W}_- \neq 0, [[\mathbf{W}_\Sigma]] \equiv \mathbf{W}_{+\Sigma} - \mathbf{W}_{-\Sigma} \neq 0.$$

Es posible, entonces, considerar las siguientes condiciones de empalme:

Condiciones de Lichnerowicz *Existe un sistema de coordenadas admisible, que cubre a Σ , tal que $[[\bar{\mathbf{g}}]] = 0$ y $[[\partial_\alpha \bar{\mathbf{g}}]] = 0$, $\alpha = 1, 2, \dots, n$.*

Condiciones de Darmois *La métrica y la curvatura extrínseca son continuas a través de Σ . Esto es $[[\bar{\mathbf{g}}]] = 0$ y $[[\mathbf{K}]] = 0$.*

Condiciones de Israel *La métrica a través de Σ es continua, pero la curvatura extrínseca es discontinua. Es decir $[[\bar{\mathbf{g}}]] = 0$ y $[[\mathbf{K}]] \neq 0$.*

www.bdigital.ula.ve

Capítulo 2

Pilares Matemáticos

En este capítulo, enunciaremos las bases concretas sobre la que descansan los resultados de este trabajo. Empezamos revisando los conceptos de distribuciones tensoriales en la sección 3.1, y en la sección 3.2 se enuncia la definición de métrica regular, y dos teoremas que se encuentran en el trabajo de Geroch y Traschen [9]. Tratamientos rigurosos de estos temas pueden encontrarse en [10].

2.1. Distribuciones y Tensores

En la teoría de distribuciones escalares, se introduce el espacio $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ como el espacio de las *funciones de prueba* φ . Estas son funciones C^∞ sobre \mathbb{R}^n , y son idénticamente nulas fuera de un conjunto cerrado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Denotaremos Ω al soporte de φ . Además, se introduce la noción de convergencia en \mathcal{D} :

1. Con $K \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto cerrado, para cualquier i se tendrá que los soportes de φ_i cumplen $\Omega_i \subset K$.
2. Para cualquier orden n de las derivadas de φ_i , estas convergen a las derivadas de φ para $i \rightarrow \infty$. Es decir,

$$|\varphi^{(n)}(x) - \varphi_i^{(n)}(x)| \leq \epsilon \text{ para } i \rightarrow \infty,$$

con ϵ tan pequeño como se desee.

Lo siguiente es definir el concepto de *distribución*. Sea F un funcional lineal tal que $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$. La acción de F sobre una función de prueba es entonces un número real, denotado por $\langle F, \varphi \rangle$. Para que F sea una distribución, debe ser continuo. Este requisito se cumple si $\langle F, \varphi_i \rangle$ converge a $\langle F, \varphi \rangle$ siempre que $\{\varphi_i\}$ cumpla con la convergencia mencionada previamente. El espacio de las distribuciones se denota como \mathcal{D}' . Este tiene estructura de espacio vectorial y es el dual topológico de \mathcal{D} . Las distribuciones también pueden tener soporte acotado. Si lo tienen, es el conjunto más pequeño fuera del cual son nulas.

Para definir una *distribución tensorial*, es necesario tener un poco más de cuidado al definir el espacio en el que se encuentran las funciones de prueba y las distribuciones mismas.

Sea $\Phi(\mathcal{M})$ la familia de funciones escalares reales C^∞ , φ , definidas sobre una variedad C^∞ n -dimensional orientable paracompacta, \mathcal{M} , que se anulan fuera de una región

compacta de \mathcal{M} . Supóngase que las funciones dentro de estas familias cumplen con la noción de convergencia dada previamente.

Sea \mathbf{g} una métrica sobre \mathcal{M} con elemento de volumen asociado dado por la n -forma $\omega_{\mathbf{g}} = \sqrt{|\det \mathbf{g}|} \varepsilon$, donde $\varepsilon = \mathbf{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x^n$ es el elemento de volumen coordinado. Considérese el funcional generado por la 0-forma f sobre $\Phi(\mathcal{M})$ a través de

$$\int_{\mathcal{M}} f \varphi \omega_{\mathbf{g}} = \int_{U_{\mathcal{M}}} f(x) \varphi(x) \sqrt{|\det \mathbf{g}|} \varepsilon \quad (2.1)$$

donde $U_{\mathcal{M}}$ es el dominio coordinado correspondiente a \mathcal{M} . Esta identificación no depende de la elección de las coordenadas que cubren el correspondiente dominio, pero depende de la elección de \mathbf{g} a través de $\omega_{\mathbf{g}}$.

Definición 1 Sea η un tensor métrico C^∞ . Endosando a la variedad \mathcal{M} con esta métrica, toda 0-forma f define una distribución a través de (3.1) y escribimos

$$f[\varphi] = \int_{\mathcal{M}} f \varphi \omega_{\eta}. \quad (2.2)$$

Ahora extendemos esto a distribuciones tensoriales. Sea \mathbf{U} un tensor de prueba (suave con soporte compacto) de tipo $\binom{q}{p}$ sobre \mathcal{M} .

Definición 2 Un campo tensorial \mathbf{T} del tipo $\binom{p}{q}$ se identifica con una distribución tensorial via

$$\mathbf{T}[\mathbf{U}] \equiv \int_{\mathcal{M}} (\mathbf{T}|\mathbf{U}) \omega_{\eta}. \quad (2.3)$$

Esta definición también es escrita comúnmente como $\mathbf{T}[\mathbf{U}] \equiv \langle \mathbf{T}, \mathbf{U} \rangle$.

Definición 3 Un campo tensorial \mathbf{T} se dice localmente acotado si $(\mathbf{T}|\mathbf{U})$ está acotada para todo campo tensorial de prueba \mathbf{U} .

Continuaremos ahora definiendo la derivada covariante de una distribución tensorial.

Definición 4 La derivada covariante en la métrica suave η de una distribución tensorial \mathbf{T} es el tensor de tipo $\binom{p}{q+1}$ definido para todo tensor de prueba \mathbf{U} por

$$\langle \nabla \mathbf{T}, \mathbf{U} \rangle \equiv -\langle \mathbf{T}, \eta \cdot \nabla \mathbf{U} \rangle. \quad (2.4)$$

donde, en coordenadas locales, se tiene $(\eta \cdot \nabla \mathbf{U})_{i_1 i_2 \dots} = \nabla_j U^j_{i_1 i_2 \dots}$.

Definición 5 La derivada débil de un campo tensorial localmente integrable \mathbf{T} es el campo tensorial localmente integrable \mathbf{W} del tipo $\binom{p}{q+1}$, si es que existe, tal que

$$\mathbf{W}[\mathbf{U}] = \nabla \mathbf{T}[\mathbf{U}] \quad (2.5)$$

para todo \mathbf{U} .

Definición 6 La distribución de dirac $\delta_a^{(n)}$, con soporte en el punto $a \in \mathcal{M}$, definida por

$$\delta_a^{(n)}[\varphi] \equiv \varphi(a). \quad (2.6)$$

Es posible definir esta distribución en una subvariedad $(n-1)$ -dimensional de \mathcal{M} . Supongamos que \mathcal{M} está orientada, y que la subvariedad Σ está definida por la ecuación $\lambda = 0$, con $\lambda : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ una función C^1 sin puntos críticos. Supongamos, además, que existe en un entorno abierto Ω de Σ en \mathcal{M} dividido en conjuntos abiertos disjuntos $\Omega_+ \equiv \{x \in \Omega, \lambda(x) > 0\}$ y $\Omega_- \equiv \{x \in \Omega, \lambda(x) < 0\}$, y orientemos Σ haciendo $\Sigma \equiv \partial\Omega_-$. Sea σ la $(n-1)$ -forma sobre Σ

$$d\lambda \wedge \sigma \equiv \omega_\eta \quad (2.7)$$

denominada comunmente como la *forma Leray* relativa a Σ .

Definición 7 Denotando como δ_Σ la distribución delta de dirac sobre Σ (esto es, con soporte sobre Σ), se tendrá

$$\delta_\Sigma[\varphi] \equiv \int_\Sigma \varphi \sigma \quad (2.8)$$

En este trabajo, las métricas de los espaciotiempos estudiados son suaves a ambos lados de la pared de dominio, que jugará el papel de la subvariedad Σ . Por lo tanto, las siguientes definiciones serán de particular importancia.

Definición 8 Un tensor \mathbf{T} sobre \mathcal{M} se dice regularmente C^k discontinuo a través de Σ si

1. \mathbf{T} es C^k en Ω_+ y Ω_- ;

2. \mathbf{T} y sus primeras k derivadas

$$\nabla \mathbf{T}, \nabla^2 \mathbf{T}, \dots, \nabla^k \mathbf{T}$$

convergen uniformemente a

$$\nabla \mathbf{T}_\pm, \nabla^2 \mathbf{T}_\pm, \dots, \nabla^k \mathbf{T}_\pm$$

cuando $x \in \Omega_\pm$ tiende a un punto en Σ .

Si \mathbf{T} es C^∞ , es común omitir el grado de diferenciabilidad. Si $\mathbf{T}, \nabla \mathbf{T}, \dots, \nabla^k \mathbf{T}$ son tensores localmente integrables en $\Omega_+ \cup \Omega_-$, le están asociadas distribuciones tensoriales sobre Ω , definidas a continuación.

Definición 9 La discontinuidad $[[\mathbf{T}]]$ de un tensor regularmente C^k discontinuo es el tensor ordinario, continuo sobre Σ , dado por

$$[[\mathbf{T}]] \equiv \mathbf{T}_+ - \mathbf{T}_- \quad (2.9)$$

Los siguientes ejemplos serán de utilidad más adelante.

1. Sea Θ_\pm la función localmente integrable igual a 1 en Ω_\pm e igual a 0 en Ω_\mp . Entonces

$$\nabla\Theta_{\pm} = \pm\lambda\delta_{\Sigma}.$$

A Θ_{\pm} se le conoce usualmente como distribución de Heaviside.

2. Sean \mathbf{T} y $\nabla\mathbf{T}$ tensores regularmente discontinuos a través de Σ , entonces la derivada de la distribución \mathbf{T} viene dada por

$$\nabla\mathbf{T} \equiv \nabla\{\mathbf{T}\} + \nabla\lambda[[\mathbf{T}]]\delta_{\Sigma}$$

donde $\nabla\{\mathbf{T}\}$ denota al tensor localmente integrable en Ω igual a $\nabla\mathbf{T}$ en Ω_+ y en Ω_- . Nótese que la ecuación $\nabla\mathbf{T} = 0$ implica $\nabla\{\mathbf{T}\} = 0$ y $\nabla\lambda[[\mathbf{T}]] = 0$.

2.2. Métricas regulares a la Geroch-Traschen

Para finalizar este capítulo, enunciamos las definiciones y teoremas debidos a Geroch y Traschen.

Definición 10 *Un campo tensorial simétrico \mathbf{g} sobre una variedad \mathcal{M} es una métrica regular si*

1. \mathbf{g} y \mathbf{g}^{-1} existen en todo \mathcal{M} y son localmente acotados;
2. la derivada débil de \mathbf{g} en alguna métrica suave η existe y es localmente de cuadrado integrable.

Esta definición nos asegura que el tensor de Riemann, y sus contracciones con \mathbf{g} y \mathbf{g}^{-1} , tienen sentido como distribuciones, y esto incluye el tensor de Einstein, el tensor de energía-momentum, y otros.

Teorema de convergencia *Sean \mathbf{g}_i ($i = 1, 2, \dots$) y \mathbf{g} métricas regulares. Si se cumple que*

1. \mathbf{g}_i y \mathbf{g}_i^{-1} sean localmente uniformemente acotadas y
2. \mathbf{g}_i , \mathbf{g}_i^{-1} y $\nabla\mathbf{g}_i$ converjan localmente en cuadrado integrable a \mathbf{g} , \mathbf{g}^{-1} y $\nabla\mathbf{g}$ respectivamente.

Con \mathbf{U} un tensor de prueba, se tendrá que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{R}_i[\mathbf{U}] = \mathbf{R}[\mathbf{U}] \quad (2.10)$$

donde \mathbf{R}_i es la curvatura distribucional de \mathbf{g}_i y \mathbf{R} la de \mathbf{g} .

Este teorema también aplica para los tensores de Weyl, Ricci, Einstein, y en general, a aquellos que se obtienen después de tomar un producto tensorial con \mathbf{g} o \mathbf{g}^{-1} , y después de cualquier contracción. El siguiente diagrama muestra esta convergencia [11]:

$$\begin{array}{ccccccc}
\gamma \mathbf{g} & \longrightarrow & \gamma \mathbf{R} & \longrightarrow & \gamma \mathbf{Ric} & \longrightarrow & \gamma \mathbf{G} \\
\downarrow \gamma \rightarrow 0 & & \downarrow \gamma \rightarrow 0 & & \downarrow \gamma \rightarrow 0 & & \downarrow \gamma \rightarrow 0 \\
\mathbf{g} & \longrightarrow & \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{Ric} & \longrightarrow & \mathbf{G}
\end{array}$$

Finalmente, el siguiente teorema nos asegura que curvaturas y fuentes de espaciotiempos con métricas regulares necesariamente tienen partes singulares concentradas sobre subvariedades de co-dimensión uno como máximo, como en el caso de métricas asociadas a capas delgadas. De nuevo, enunciaremos el teorema, y el lector puede referirse a [9] para la demostración.

Teorema de co-dimensión *Sea \mathcal{S} una subvariedad d -dimensional de una variedad n -dimensional \mathcal{M} . Sea \mathbf{T} una distribución tensorial no-nula tal que*

1. *tenga soporte en \mathcal{S} y*

2. *sea la suma de distribuciones asociadas a un tensor localmente integrable y a la derivada de un tensor localmente de cuadrado integrable.*

Entonces $d = n - 1$.

www.bdigital.ula.ve

Capítulo 3

Espaciotiempos

En este capítulo, empezaremos enunciando la definición de una pared de dominio en la sección 3.1. Continuaremos estudiando en la sección 3.2 la forma general de las condiciones nulas de energía para el espaciotiempo $(n + 1)$ -dimensional dado por la métrica de la forma

$$\mathbf{g} = (-\mathbf{d}t\mathbf{d}t + \mathbf{d}x\mathbf{d}x + \mathbf{d}y\mathbf{d}y + \mathbf{d}z\mathbf{d}z)e^{2A(\xi)} + \mathbf{d}\xi\mathbf{d}\xi. \quad (3.1)$$

Esta es asintóticamente AdS_{n+1} . Esta métrica tiene una forma más generalizada del escenario RS-II. Luego de encontrar la forma general de las condiciones de energía, se observa si la métrica inducida de cada espaciotiempo es continua. Comentaremos brevemente estos tres espaciotiempos:

1. El lector es referido a [11] para un estudio de las simetrías del primer espaciotiempo, y a [12] para un estudio de sus características, como el potencial que origina la pared.
2. El segundo espaciotiempo puede encontrarse en [13], el cual viene de un defecto topológico llamado kink. Esta es una de las primeras soluciones de pared gruesa que tiene límite de pared delgada que coincide con el escenario de mundo brana RS.
3. El tercer espaciotiempo puede encontrarse en [14]. Este representa una familia tri-paramétrica de espaciotiempos pared de dominio estáticos con simetría plano paralela, sin simetría de reflexión a lo largo de la dirección perpendicular a la pared, con dos constantes cosmológicas distintas para $\xi < 0$ y $\xi > 0$. Posteriormente, se muestra la métrica inducida para estos espaciotiempos, que resulta ser la misma para todos los Warp Factors.

Finalmente, en la sección 3.3 y 3.4, encontraremos los vectores tangentes nulos, veremos las condiciones de energía y métricas inducidas, para dos métricas encontradas en [11], donde está también el tensor de Ricci de cada métrica, además de su forma en el límite de pared delgada. En el apéndice de [12] se demuestra que la siguiente métrica es una métrica regular y que cumple con el teorema de convergencia:

$$\gamma \mathbf{g} = \operatorname{sech}^{2\gamma} \frac{\beta x}{\gamma} \left(-\mathbf{d}t\mathbf{d}t + \mathbf{d}x\mathbf{d}x + e^{2\beta t}(\mathbf{d}y\mathbf{d}y + \mathbf{d}z\mathbf{d}z) \right), \quad (3.2)$$

cuyo límite de pared delgada es

$$\mathbf{g} = (\Theta_x^- e^{2\beta x} + \Theta_x^+ e^{-2\beta x}) \left(-\mathbf{d}t\mathbf{d}t + \mathbf{d}x\mathbf{d}x + e^{2\beta t}(\mathbf{d}y\mathbf{d}y + \mathbf{d}z\mathbf{d}z) \right). \quad (3.3)$$

La última métrica que se estudiará en este trabajo representa una familia bi-paramétrica de espaciotiempos pared de dominio estáticos con simetría planoparalela, y es asintóticamente plana para $x > 0$, y asintóticamente como el espaciotiempo Taub para $x < 0$. Esta es

$$\gamma \mathbf{g} = \operatorname{sech}^{2\gamma/3} \frac{\beta x}{\gamma} e^{-4\beta x/3} \left(-\mathbf{d}t\mathbf{d}t + e^{2\beta x}(\mathbf{d}y\mathbf{d}y + \mathbf{d}z\mathbf{d}z) \right) + \operatorname{sech}^{2\gamma} \frac{\beta x}{\gamma} \mathbf{d}x\mathbf{d}x, \quad (3.4)$$

con límite de pared delgada

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &= \Theta_x^- \left(-e^{-2\beta x/3} \mathbf{d}t\mathbf{d}t + e^{2\beta x} \mathbf{d}x\mathbf{d}x + e^{4\beta x/3} (\mathbf{d}y\mathbf{d}y + \mathbf{d}z\mathbf{d}z) \right) \\ &\quad + \Theta_x^+ \left(-e^{-2\beta x} \mathbf{d}t\mathbf{d}t + e^{-2\beta x} \mathbf{d}x\mathbf{d}x + \mathbf{d}y\mathbf{d}y + \mathbf{d}z\mathbf{d}z \right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

3.1. Paredes de dominio gruesas y límite de pared delgada

Es común en física estudiar los mínimos de un potencial, ya que ahí pueden encontrarse cosas interesantes, como defectos topológicos. Para que este defecto sea una pared de dominio gruesa, debe ser originado por un campo escalar solución al sistema de ecuaciones Einstein-campo escalar, donde el campo escalar toma valores en \mathbb{R} , y debe existir una autointeracción descrita por un potencial escalar no trivial $V(\phi)$, con el campo escalar interpolando asintóticamente entre mínimos degenerados del potencial. Entonces, tenemos la siguiente definición:

Definición 11 *Un espaciotiempo pared de dominio gruesa es un defecto topológico originado por un campo escalar real $\phi(x)$ que es solución al siguiente sistema de ecuaciones:*

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} R - \frac{1}{2} (\partial\phi|\partial\phi) - V(\phi) \right], \quad (3.6)$$

$$\mathbf{G} = 8\pi\mathbf{T}, \quad (3.7)$$

$$\mathbf{T} = \nabla\phi\nabla\phi - \mathbf{g} \left(\frac{1}{2} (\nabla\phi|\nabla\phi) + V(\phi) \right), \quad (3.8)$$

$$(\nabla\phi|\nabla\phi) - \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0. \quad (3.9)$$

Pueden exigirse requisitos adicionales, como $V(\phi) \geq 0$, $(\partial\phi|\partial\phi) > 0$, y/o $\phi(-x) = \phi(x)$.

Las paredes de dominio tienen un grosor determinado por un parámetro, que en este caso será γ . Este toma valores entre cero y uno. Cuando se hace el límite de pared delgada, es este parámetro el que se hace tender a cero.

3.2. Diferentes Warp Factors, una receta

Empezaremos revisando qué si (3.1) es una métrica regular. Veamos primero si (3.1) y su inversa están localmente acotadas, con \mathbf{U} un tensor de prueba adecuado para cada caso

$$\mathbf{g}[\mathbf{U}] = e^{2A(\xi)} (-\mathbf{d}t\mathbf{d}t + \mathbf{d}x\mathbf{d}x + \mathbf{d}y\mathbf{d}y + \mathbf{d}z\mathbf{d}z)[\mathbf{U}] + \mathbf{d}\xi\mathbf{d}\xi[\mathbf{U}] \quad (3.10a)$$

$$\mathbf{g}^{-1}[\mathbf{U}] = e^{-2A(\xi)} (-\mathbf{d}t\mathbf{d}t + \mathbf{d}x\mathbf{d}x + \mathbf{d}y\mathbf{d}y + \mathbf{d}z\mathbf{d}z)^{-1}[\mathbf{U}] + \partial_\xi\partial_\xi[\mathbf{U}] \quad (3.10b)$$

Vemos entonces que si $e^{\pm 2A(\xi)}$ es localmente acotado, (3.1) es localmente acotada. Este es el caso para las tres $A(\xi)$ que serán utilizadas.

Ahora veremos si $\nabla \mathbf{g}$ en η es de cuadrado integrable (que exista como derivada débil está garantizado por el Warp Factor):

$$\nabla \mathbf{g}[\mathbf{U}] = (\nabla_{\xi} e^{2A(\xi)})(-dtdt + dx dx + dy dy + dz dz)[\mathbf{U}] \quad (3.11)$$

Por lo tanto, es necesario que:

$$\begin{aligned} & (\nabla_{\xi} e^{2A(\xi)})(-dtdt + dx dx + dy dy + dz dz)[\mathbf{U}] \\ \equiv & \int (2e^{2A(\xi)} \frac{dA}{d\xi} d\xi \{-dtdt + dx dx + dy dy + dz dz\}[\mathbf{U}]) \omega_{\eta} \end{aligned} \quad (3.12)$$

sea de cuadrado integrable. En el límite de pared delgada no habrá problema, ya que, como \mathbf{g} es continua, (4.12) podría ser discontinua, pero no singular. Por lo tanto, (3.1) es una métrica regular para las tres $A(\xi)$ presentadas.

Restaría verificar que \mathbf{g} cumple con los requisitos del teorema de convergencia. Sin embargo, es claro que será relativamente fácil encontrar aquellas $f(\xi)$ tal que (3.1) y su inversa sean localmente uniformemente acotadas. Además, como (3.1) es continua tanto en el caso de pared de dominio gruesa como en el límite de pared delgada, está asegurada la convergencia de \mathbf{g} y de \mathbf{g}^{-1} , y así mismo para $\nabla \mathbf{g}$. Entonces, no habrá riesgo de encontrar expresiones mal definidas.

Continuaremos esta sección encontrando la receta para las condiciones de convergencia. Comenzamos encontrando el tensor de curvatura de Ricci. Es fácil ver que, para la métrica (3.1), las conexiones son de la forma

$$\Gamma^{\xi}_{\mu\nu} = -\eta_{\mu\nu} e^{2A(\xi)} \frac{dA}{d\xi}, \quad (3.13)$$

$$\Gamma^{\mu}_{\xi\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} \frac{dA}{d\xi}, \quad (3.14)$$

Estas conexiones son nulas si ξ aparece más de una vez. Ahora, se busca el tensor de curvatura de Ricci. Omitiremos la convención de suma de Einstein para tener claridad en las expresiones finales.

Veamos las componentes no diagonales de

$$R_{\mu\nu} = \sum_{\alpha=0}^{n+1} \left(\partial_{[\alpha} \Gamma^{\alpha}_{\mu]\nu} + \sum_{\rho=0}^{n+1} \Gamma^{\rho}_{\mu[\nu} \Gamma^{\alpha}_{\rho]\alpha} \right). \quad (3.15)$$

Vemos que, como $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = 0$ para $\mu \neq \nu$, esta expresión se simplifica a

$$R_{\mu\nu} = - \sum_{\alpha=0}^{n+1} \left(\partial_{\mu} \Gamma^{\alpha}_{\alpha\nu} + \sum_{\rho=0}^{n+1} \Gamma^{\rho}_{\mu\alpha} \Gamma^{\alpha}_{\nu\rho} \right) \quad (3.16)$$

que solo es distinto de cero si $\mu = \nu = \xi$. Entonces, vemos que el tensor de Ricci es diagonal.

Ahora, veamos los componentes diagonales. Vale destacar que el tensor de Ricci hereda

la estructura de la métrica, esto es, todas las componentes en el subespacio que excluye la coordenada ξ tienen la misma forma, y la componente $R_{\xi\xi}$ es distinta. Luego de expandir la suma del primer término, tendremos

$$R_{\mu\mu} = \partial_\xi \Gamma^\xi_{\mu\mu} + \sum_{\alpha=0}^{n+1} \sum_{\rho=0}^{n+1} \left(\Gamma^\rho_{\mu\mu} \Gamma^\alpha_{\rho\alpha} - \Gamma^\rho_{\mu\alpha} \Gamma^\alpha_{\mu\rho} \right) \quad (3.17)$$

$$= \partial_\xi \Gamma^\xi_{\mu\mu} + \sum_{\alpha=0}^{n+1} \left(\Gamma^\xi_{\mu\mu} \Gamma^\alpha_{\xi\alpha} - \Gamma^\xi_{\mu\alpha} \Gamma^\alpha_{\mu\xi} \right) \quad (3.18)$$

donde encontramos que el segundo término es $n\Gamma^\xi_{\sigma\sigma}\Gamma^\sigma_{\xi\sigma}$, y el tercero es $2\Gamma^\xi_{\sigma\sigma}\Gamma^\sigma_{\xi\sigma}$, sin suma en σ . Con esto, se tendrá

$$R_{\mu\mu} = \partial_\xi \Gamma^\xi_{\mu\mu} + \Gamma^\xi_{\mu\mu} \Gamma^\mu_{\xi\mu} (n-2) \quad (3.19)$$

La componente restante, es (3.16) con $\mu = \nu = \xi$. Haciendo la suma en α y ρ , se tendrá

$$R_{\xi\xi} = -n(\partial_\xi \Gamma^\mu_{\xi\mu} + (\Gamma^\mu_{\xi\mu})^2). \quad (3.20)$$

Insertando (3.13) y (3.14) en (3.19), luego de un poco de álgebra, se obtiene

$$R_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} \left(\frac{d^2 A}{d\xi^2} + n \left(\frac{dA}{d\xi} \right)^2 \right) \quad (3.21)$$

y de igual forma en (3.20)

$$R_{\xi\xi} = -n \left(\frac{d^2 A}{d\xi^2} + \left(\frac{dA}{d\xi} \right)^2 \right). \quad (3.22)$$

Así, el tensor de Ricci es, luego de reagrupar términos, de la forma

$$\mathbf{Ric} = -n \left(\frac{dA}{d\xi} \right)^2 \mathbf{g} - \frac{d^2 A}{d\xi^2} \left((-dt dt + dx dx + dy dy + dz dz) e^{2A(\xi)} + n d\xi d\xi \right). \quad (3.23)$$

que puede presentar problemas por el término cuadrático en el caso distribucional, pero gracias al teorema de convergencia, se puede encontrar este tensor para pared gruesa, y encontrarlo luego haciendo el límite de pared delgada.

Ahora, pueden encontrarse las condiciones nulas de energía en forma general para esta métrica. Para esto, calcularemos los vectores tangentes nulos \mathbf{k}_\perp y \mathbf{k}_\parallel . Es necesario que cada uno satisfaga $k^a \nabla_a k^b = 0$ y $k^a k_a = 0$.

De manera explícita, estas son las condiciones que debe cumplir cada vector (norma nula y la ecuación geodésica respectivamente):

$$e^{2A(\xi)} (-k^t k^t + k^x k^x + k^y k^y + k^z k^z) + k^\xi k^\xi = 0, \quad (3.24)$$

$$\sum_{\mu=0}^{n+1} \left(k^\mu \partial_\mu k^\nu + \sum_{\alpha=0}^{n+1} \Gamma^\nu_{\mu\alpha} k^\mu k^\alpha \right) = 0. \quad (3.25)$$

Como la dinámica de este espaciotiempo está regida por la coordenada ξ , se puede asumir que solo hay dependencia de ξ . Como siempre es posible rotar el sistema de referencia

de manera que los vectores nulos tengan solo dos componentes, asumiremos de ahora en adelante que estamos en tal sistema, con las componentes de la siguiente forma: una a lo largo de ∂_t y otra a lo largo de alguna dirección espacial. Luego, podemos distinguir entre el que tiene dirección espacial ∂_ξ (\mathbf{k}_\perp , perpendicular a la pared de dominio) y todos los demás (\mathbf{k}_\parallel , paralelos a la pared). Así, las expresiones relevantes son:

$$e^{A(\xi)} k_\perp^t = k_\perp^\xi, \quad (3.26)$$

$$\partial_\xi k_\perp^t + \frac{dA}{d\xi} k_\perp^t = 0, \quad (3.27)$$

$$k_\parallel^t = k_\parallel^\mu, \quad \mu \neq \xi. \quad (3.28)$$

Los vectores nulos son entonces

$$\mathbf{k}_\perp = e^{-A(\xi)} \partial_t + \partial_\xi, \quad (3.29)$$

$$\mathbf{k}_{i\parallel} = \partial_t + \partial_{x^i}. \quad (3.30)$$

Vemos también una especie de herencia de la estructura de la métrica a estos vectores. Todas estas herencias son de esperarse, al notar que (3.1) es una transformación conformal, pero con un término adicional $\mathbf{d}\xi\mathbf{d}\xi$. Se adopta la notación $\gamma\mathbf{k}$ para los vectores nulos en el caso de pared gruesa, y \mathbf{k} para el límite de pared delgada, y en general, se usará esta notación para cualquier tensor donde sea aplicable.

Ahora, se encontrará la forma general de $R_{\mu\nu} k^\mu k^\nu \geq 0$. Fácilmente se encuentra que $g_{\mu\nu} k_\parallel^\mu k_\parallel^\nu = 0$, mientras que para \mathbf{k}_\perp se tendrá

$$0 \leq (1-n) \frac{d^2 A}{d\xi^2} \quad (3.31)$$

que se viola siempre que esta segunda derivada sea positiva para todo ξ . En el caso en el que esta segunda derivada es una distribución, se tendrá

$$0 \leq (1-n) \left\langle \frac{d^2 A}{d\xi^2}, \varphi(\xi) \right\rangle \quad (3.32)$$

con $\varphi(\xi)$ una función de prueba, que se asume es definida positiva.

Con este resultado final tan simple, solo es necesario encontrar la segunda derivada de $A(\xi)$. Es claro que el caso distribucional (3.32) será el único caso que tiene sentido considerar para el límite de pared delgada. La rigurosidad de esta condición y de **Ric** en el límite de pared delgada está asegurada gracias a que la métrica es regular, y cumple con los teoremas de [10]. Si no fuese el caso, el límite de pared delgada estaría mal definido, y estos resultados estarían bien definidos exclusivamente en teoría de funciones.

Ahora veremos, para los siguientes tres casos, qué ocurre con las condiciones de energía:

1. Con $n = 3$

$$A(\xi) = -\gamma \ln(\cosh \frac{\beta\xi}{\gamma}) \longrightarrow -\beta|\xi| \quad \text{para } \gamma \rightarrow 0. \quad (3.33)$$

Tendremos que la segunda derivada de esta función es:

$$\frac{d^2 A}{d\xi^2} = -\frac{\beta^2}{\gamma} \operatorname{sech}^2 \frac{\beta\xi}{\gamma} \longrightarrow -2\beta\delta(\xi) \quad \text{para } \gamma \rightarrow 0. \quad (3.34)$$

Con esto, las condiciones nulas son, para pared gruesa y pared delgada respectivamente:

$$0 \leq \frac{2\beta^2}{\gamma} \operatorname{sech}^2 \frac{\beta\xi}{\gamma}, \quad (3.35)$$

$$0 \leq 4\beta\varphi(0). \quad (3.36)$$

Es claro que (3.35) se cumple trivialmente debido a que, en variable real se tiene: $0 \leq \operatorname{sech}^n(x) \leq 1, \forall x$. (3.36) se cumple. Estas dos ecuaciones contradicen la afirmación de [6] que en el escenario RS no se cumple dicha condición de energía.

2. De nuevo con $n = 3$

$$A(\xi) = -\frac{2}{3}\gamma \left[\ln\left(\cosh \frac{\beta\xi}{\gamma}\right) + \frac{1}{4} \tanh^2\left(\frac{\beta\xi}{\gamma}\right) \right] \longrightarrow -\frac{2}{3}\beta|\xi| \quad \text{para } \gamma \rightarrow 0. \quad (3.37)$$

Continuando de manera análoga al primer caso:

$$\frac{d^2 A}{d\xi^2} = -\frac{\beta^2}{\gamma} \operatorname{sech}^4 \frac{\beta\xi}{\gamma} \longrightarrow -\frac{4}{3}\beta\delta(\xi) \quad \text{para } \gamma \rightarrow 0. \quad (3.38)$$

que producirá, en esencia, las condiciones (3.35) y (3.36) respectivamente, salvo por el exponente en el caso de pared gruesa, y el factor multiplicativo en el caso de pared delgada.

3. Para finalizar esta sección, veamos el tercer caso, con $n = 4$

$$A(\xi) = \frac{\alpha}{12}\xi - \frac{\gamma}{12} \exp\left(-2 \exp\left(-\frac{\beta\xi}{\gamma}\right)\right) - \frac{\gamma}{12} \operatorname{Ei}\left(-2 \exp\left(-\frac{\beta\xi}{\gamma}\right)\right), \quad (3.39)$$

donde $\operatorname{Ei}(u) = -\int_{-u}^{\infty} \frac{e^{-\tau}}{\tau}$. El límite de pared delgada del Warp Factor de este espaciotiempo es

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} e^{2A(\xi)} = \Theta_{\xi}^{-} e^{\frac{\alpha}{6}\xi} + \Theta_{\xi}^{+} e^{\frac{(\alpha-\beta)}{6}\xi} \quad (3.40)$$

La segunda derivada de esta función es

$$\frac{d^2 A}{d\xi^2} = \frac{\beta^2}{3\gamma} \exp\left(-2e^{-\frac{\beta\xi}{\gamma}} - 2\frac{\beta\xi}{\gamma}\right) \longrightarrow \frac{\beta}{12}\delta(\xi) \quad \text{para } \gamma \rightarrow 0. \quad (3.41)$$

Así, las condiciones de energía serán, para pared gruesa:

$$0 \leq -\frac{\beta^2}{\gamma} \exp\left(-2e^{-\frac{\beta\xi}{\gamma}} - 2\frac{\beta\xi}{\gamma}\right). \quad (3.42)$$

que se viola trivialmente para $\forall \xi$.

Para el caso de pared delgada, tenemos:

$$0 \leq \frac{-\beta}{4}\varphi(0) \quad (3.43)$$

que es violada trivialmente.

La métrica inducida para los primeros dos espaciotiempos es

$$\bar{\mathbf{g}} = -\mathbf{d}t\mathbf{d}t + \mathbf{d}y\mathbf{d}y + \mathbf{d}z\mathbf{d}z \quad (3.44)$$

por lo que para estos dos espaciotiempos, se tiene una métrica inducida continua y se cumplen las condiciones de energía. Esta también es la métrica inducida para el tercer espaciotiempo en el límite de pared delgada.

La métrica inducida del tercer espaciotiempo para pared gruesa es

$$\bar{\mathbf{g}} = e^{\frac{-1}{12}\gamma}(-\mathbf{d}t\mathbf{d}t + \mathbf{d}x\mathbf{d}x + \mathbf{d}y\mathbf{d}y + \mathbf{d}z\mathbf{d}z). \quad (3.45)$$

Como (3.42) y (3.43) se violan trivialmente, encontramos el primer contraejemplo a la afirmación de que el no cumplimiento de esta condición lleva a no esperar continuidad en la métrica inducida.

3.3. Espaciotiempo no estático

Como se mencionó previamente, en [11] encontraremos el tensor de Ricci para la métrica (3.2) para pared gruesa y para el límite de pared delgada. Estos son

$$\gamma \mathbf{Ric} = \left(2 + \frac{1}{\gamma}\right) \beta^2 \operatorname{sech}^2 \frac{\beta x}{\gamma} \left(-\mathbf{d}t\mathbf{d}t + \frac{3}{1+2\gamma} \mathbf{d}x\mathbf{d}x + e^{2\beta t} (\mathbf{d}y\mathbf{d}y + \mathbf{d}z\mathbf{d}z)\right), \quad (3.46a)$$

$$\mathbf{Ric} = 2\beta\delta(x) \left(-\mathbf{d}t\mathbf{d}t + 3\mathbf{d}x\mathbf{d}x + e^{2\beta t} (\mathbf{d}y\mathbf{d}y + \mathbf{d}z\mathbf{d}z)\right). \quad (3.46b)$$

A continuación, obtendremos los \mathbf{k} para (3.2). Se asume solo dependencia de x en \mathbf{k}_\perp y de t en $\mathbf{k}_{i\parallel}$, aunque esta última se desprende también de las ecuaciones. Esto nos deja con

$$\partial_x \gamma k_\perp^t - 2\beta \tanh \frac{\beta x}{\gamma} \gamma k_\perp^t = 0 \longrightarrow \partial_x k_\perp^t - 2\beta \operatorname{sign}(x) k_\perp^t = 0, \quad \gamma \rightarrow 0; \quad k_\perp^t = k_\perp^x. \quad (3.47)$$

$$\partial_t k_{i\parallel}^t + \beta k_{i\parallel}^t = 0; \quad k_{i\parallel}^t = e^{\beta t} k_{i\parallel}^i. \quad (3.48)$$

donde $i = 2, 3$, que corresponden a y y z respectivamente.

Los vectores nulos son entonces

$$\gamma \mathbf{k}_\perp = \cosh^{2\gamma} \frac{\beta x}{\gamma} (\partial_t + \partial_x), \quad (3.49a)$$

$$\mathbf{k}_\perp = (\Theta_x^- e^{-2\beta x} + \Theta_x^+ e^{2\beta x}) (\partial_t + \partial_x), \quad (3.49b)$$

$$\mathbf{k}_{i\parallel} = e^{-\beta t} (\partial_t + e^{-\beta t} \partial_{x^i}). \quad (3.49c)$$

La condición de energía no trivial es, para pared gruesa

$$\gamma \mathbf{k}_\perp : 0 \leq \frac{2\beta^2}{\gamma} (1 - \gamma) \cosh^{4\gamma-2} \frac{\beta x}{\gamma}, \quad (3.50)$$

Vemos que (3.50) se cumple trivialmente, ya que $0 < \gamma < 1$.

La condición no trivial para el límite de pared delgada es

$$\mathbf{k}_\perp : 0 \leq 4\beta\varphi(0), \quad (3.51)$$

Claramente, (3.51) se cumple.

La métrica inducida para este espaciotiempo es

$$\bar{g} = -dt dt + e^{2\beta t} (dy dy + dz dz) \quad (3.52)$$

que es continua en todo el espaciotiempo.

3.4. Taub por un lado y plana por el otro

Las curvaturas de Ricci para (3.4) y para su límite de pared delgada (3.5) son

$$\begin{aligned} \gamma \mathbf{Ric} = & \frac{\beta^2}{3\gamma} (\cosh \frac{\beta x}{\gamma})^{4\gamma/3-2} \left(-e^{-4\beta x/3} dt dt + e^{2\beta x/3} (dy dy + dz dz) \right) \\ & + \frac{\beta^2}{3\gamma} (3 - 2\gamma) \operatorname{sech}^2 \frac{\beta x}{\gamma} dx dx, \end{aligned} \quad (3.53a)$$

$$\mathbf{Ric} = \frac{1}{3} \beta \delta(x) (-dt dt + 3dx dx + dy dy + dz dz). \quad (3.53b)$$

Los vectores nulos para pared gruesa cumplen con

$$\partial_x \gamma k_\perp^x - \frac{2}{3} \beta \left(2 \tanh \frac{\beta x}{\gamma} + 1 \right) \gamma k_\perp^x = 0, \quad \gamma k_\perp^t = e^{2\beta x/3} \operatorname{sech}^{2\gamma/3} \frac{\beta x}{\gamma} \gamma k_\perp^x \quad (3.54)$$

$$\gamma k_{i\parallel}^t = e^{\beta x \gamma} k_{i\parallel}^{x^i} \quad (3.55)$$

donde, como se ha escogido $k_\parallel^x = 0$, tendremos que la ecuación geodésica para $\mathbf{k}_{i\parallel}$ se anula directamente. Para el límite de pared delgada cumplen con

$$\partial_x k_\perp^t - 2\beta \left(\frac{1}{3} \Theta_x^- + \Theta_x^+ \right) k_\perp^t = 0, \quad (\Theta_x^- e^{-2\beta x/3} + \Theta_x^+) k_\perp^t = k_\perp^x \quad (3.56)$$

$$\left(\Theta_x^- e^{\beta x/3} + \Theta_x^+ e^{-\beta x} \right) k_{i\parallel}^t = k_{i\parallel}^{x^i} \quad (3.57)$$

Así, los vectores nulos serán

$$\gamma \mathbf{k}_\perp = \cosh^{2\gamma} \frac{\beta x}{\gamma} \left(e^{2\beta x/3} \operatorname{sech}^{2\gamma/3} \frac{\beta x}{\gamma} \partial_t + \partial_x \right), \quad (3.58a)$$

$$\mathbf{k}_\perp = \left(\Theta_x^- e^{-2\beta x/3} + \Theta_x^+ e^{-2\beta x} \right) \partial_t + \left(\Theta_x^- e^{-4\beta x/3} + \Theta_x^+ e^{-2\beta x} \right) \partial_x, \quad (3.58b)$$

$$\gamma \mathbf{k}_{i\parallel} = \partial_t + e^{-\beta x} \partial_{x^i}, \quad (3.58c)$$

$$\mathbf{k}_{i\parallel} = \left(\Theta_x^- e^{-\beta x/3} + \Theta_x^+ e^{-\beta x} \right) \partial_t + \partial_{x^i}. \quad (3.58d)$$

Las condiciones de energía no triviales serán entonces:

$$\gamma \mathbf{k}_\perp : 0 \leq \frac{\beta^2}{3\gamma} \left(\cosh \frac{\beta x}{\gamma} \right)^{2\gamma-2} (2 - \gamma) \quad (3.59a)$$

$$\mathbf{k}_\perp : 0 \leq \frac{2\beta}{3} \varphi(0), \quad (3.59b)$$

mientras que para $\mathbf{k}_{i\parallel}$ es fácil comprobar que se anulan. (3.59a) se cumple para $\forall \xi$, al igual que (3.59b). La métrica inducida para este espaciotiempo es (3.44).

www.bdigital.ula.ve

Capítulo 4

Conclusiones

En este trabajo hemos revisado algunos puntos tratados en la Ref. [6], recalcando que en este, se afirma que el no cumplimiento de las condiciones nulas de energía en el límite de pared delgada tienen como consecuencia no esperar continuidad de la métrica inducida en una hipersuperficie infinitamente delgada que separa dos espaciotiempos. Además, en este se afirma que el escenario RS viola estas condiciones.

Luego de haber establecido las condiciones de empalme como aquellas utilizadas para empalmar dos espaciotiempos separados por una pared delgada, se definió la condición nula de energía, presentando previamente ciertas consideraciones necesarias para que su definición fuese rigurosa.

Se ha escogido trabajar con distribuciones tensoriales, para así tener una noción matemática concreta de lo que representa un tensor singular en relatividad general, sin perder rigurosidad. Que las expresiones encontradas estén bien definidas lo aseguran los resultados de [9], que permiten tener un límite de pared delgada que viene de una pared de dominio gruesa. Luego de definir un espaciotiempo pared de dominio gruesa, encontramos las condiciones de energía nulas para cinco espaciotiempos. Finalmente, para cada espaciotiempo, observamos si la métrica inducida era continua.

La métrica inducida para todos los espaciotiempos vistos es continua. Encontramos que la condición nula de energía se cumplía para (3.1) para los primeros dos Warp Factors. Esto es una contradicción directa con la afirmación de que en el escenario RS se viola la condición, ya que el límite de pared delgada del primer Warp Factor es el escenario RS, y se cumple la condición. El segundo Warp Factor difiere en el límite de pared delgada del escenario RS por un factor de $1/3$, por lo que es esencialmente el escenario RS.

El tercer espaciotiempo es el único que presenta violación de las condiciones de energía. Esto lleva a preguntarse qué consecuencias trae este hecho : ¿Se cumplirán otras condiciones de energía? Si la respuesta es negativa, este espaciotiempo nunca cumpliría los teoremas de singularidad en relatividad general. La respuesta puede ser afirmativa para una o más condiciones, y en esos casos, pueden estudiarse otras propiedades de este espaciotiempo requeridas por los teoremas de singularidad.

El cuarto espaciotiempo es el único espaciotiempo no estático. Sin embargo, esto no afectó el cumplimiento de las condiciones nulas, y además, la métrica inducida de este espaciotiempo es continua. El quinto espaciotiempo estudiado también cumplió con las

condiciones de energía y su métrica inducida también es continua. Vemos entonces que un solo espaciotiempo de los estudiados contradice la afirmación de continuidad de [6].

Como extensión de este trabajo, puede explorarse, para el tercer espaciotiempo, qué consecuencias trae la violación de la condición de energía, por ejemplo, sobre las simetrías del mismo. Pueden encontrarse además, otros espaciotiempos que violen la condición de energía pero que su métrica inducida sea continua, que resultará un proceso mecánico, ya que, como se vio en la sección 4.2, basta con que la segunda derivada de $A(\xi)$ sea positiva.

www.bdigital.ula.ve

Bibliografía

- [1] K. Schwarzschild, “On the gravitational field of a sphere of incompressible fluid according to Einstein’s theory,” *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)* **1916**, 424 (1916) [physics/9912033 [physics.hist-ph]].
- [2] K. Schwarzschild, “On the gravitational field of a mass point according to Einstein’s theory,” *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)* **1916**, 189 (1916) [physics/9905030].
- [3] K. Lake, “Revisiting the Darmois and Lichnerowicz junction conditions,” *Gen. Rel. Grav.* **49**, no. 10, 134 (2017) doi:10.1007/s10714-017-2300-1 [arXiv:1705.01090 [gr-qc]].
- [4] V. A. Rubakov and M. E. Shaposhnikov, “Do We Live Inside a Domain Wall?,” *Phys. Lett.* **125B**, 136 (1983). doi:10.1016/0370-2693(83)91253-4
- [5] L. Randall and R. Sundrum, “An Alternative to compactification,” *Phys. Rev. Lett.* **83**, 4690 (1999) doi:10.1103/PhysRevLett.83.4690 [hep-th/9906064].
- [6] D. Marolf and S. Yaida, “Energy conditions and junction conditions,” *Phys. Rev. D* **72**, 044016 (2005) doi:10.1103/PhysRevD.72.044016 [gr-qc/0505048].
- [7] R. M. Wald, “General Relativity,” The University of Chicago Press, 1984.
- [8] K. Lake, “Some notes on the Propagation of Discontinuities in the Solutions of Einstein Equations,” World Scientific. 1987.
- [9] R. P. Geroch and J. H. Traschen, “Strings and Other Distributional Sources in General Relativity,” *Phys. Rev. D* **36**, 1017 (1987) [Conf. Proc. C **861214**, 138 (1986)]. doi:10.1103/PhysRevD.36.1017
- [10] Y. Choquet-Bruhat and C. DeWitt-Morette, “Analysis, Manifolds and Physics,” Elsevier Science B.V. 1982.
- [11] N. Pantoja and A. Sanoja, “Symmetries of distributional domain wall geometries,” *J. Math. Phys.* **46**, 033509 (2005) doi:10.1063/1.1851603 [gr-qc/0312032].
- [12] R. Guerrero, A. Melfo and N. Pantoja, “Selfgravitating domain walls and the thin wall limit,” *Phys. Rev. D* **65**, 125010 (2002) doi:10.1103/PhysRevD.65.125010 [gr-qc/0202011].
- [13] A. Melfo, N. Pantoja and J. D. Tempo, “Fermion localization on thick branes,” *Phys. Rev. D* **73**, 044033 (2006) doi:10.1103/PhysRevD.73.044033 [hep-th/0601161].
- [14] O. Castillo-Felisola, A. Melfo, N. Pantoja and A. Ramirez, “Localizing gravity on exotic thick three-branes,” *Phys. Rev. D* **70**, 104029 (2004) doi:10.1103/PhysRevD.70.104029 [hep-th/0404083].