Universidad de Los Andes
Facultad de Ciencias
Postgrado de Matemáticas
Centro Interdisciplinario de Lógica y Álgebra

Estructuras en decisión social

www.bdigital.ula.ve

MSc. Jahn Franklin Leal Hernández[1,2]
Tutor: Dr. Ramón Pino[2]

Trabajo de Grado
Para Optar al Título de
Doctor en Matemáticas

Mérida-Venezuela
Enero 2015

[1]Departamento de Cartografía, Facultad de Ciencias Forestales y Ambientales, Universidad de Los Andes, Mérida 5101, Estado Mérida, Venezuela. e-mail: jleal@ula.ve

[2]Centro Interdisciplinario de Lógica y Álgebra, Departamento de Matemáticas, Edificio Teórico de Ciencias, Facultad de Ciencias, Universidad de Los Andes, La Hechicera, Mérida 5101, Estado Mérida, Venezuela. e-mail: pino@ula.ve

C.C.Reconocimiento

www.bdigital.ula.ve

A mi madre Gaudys...

C.C.Reconocimiento

Agradecimientos

A Dios por permitirme terminar con éxito este trabajo.

A la Universidad de Los Andes.

A mis padres, hermanos y amigos.

Quiero incluir un agradecimiento muy especial para el Profesor Ramón Pino. Fue un pilar fundamental no sólo en este trabajo sino también en mi desarrollo profesional.

www.bdigital.ula.ve

C.C.Reconocimiento

Resumen

Este trabajo se desarrolla dentro del marco de la teoría de decisión. Particularmente estudiamos la teoría de elección social y a la teoría de decisión ordinal (o cualitativa).

En una primera parte realizamos un análisis sobre propiedades de las funciones de elección social. Para esto consideramos las propiedades típicas de la teoría de elección social y adicionalmente proponemos nuevas propiedades.

En el marco de la teoría de elección también estudiamos la manipulabilidad de las funciones de elección social. En otras palabras nos interesamos en saber cuándo un sistema electoral es bueno en el sentido de que no sea dictatorial. Estudiamos, además, cuando un proceso es manipulable.

Finalmente, estudiamos estructuras de decisión y nos planteamos como tomar decisiones colectivas a partir de decisiones de múltiples agentes. Básicamente se trata de cómo decidir cuál candidato o política es la mejor. Estudiamos métodos o mecanismos que permitan escoger una o algunas políticas de un conjunto dado de políticas. Sobre estas estructuras establecemos un resultado que propone condiciones que permiten garantizar la propiedad de Pareto en el marco de decisiones colectivas.

www.bdigital.ula.ve

Palabras Claves: Teoría de elección social, Teoría de decisión ordinal, Levantamientos, Estructuras de decisión, Preórdenes totales, Imposibilidad, Manipulabilidad.

C.C.Reconocimiento

Tabla de contenido

www.bdigital.ula.ve

C.C.Reconocimiento

www.bdigital.ula.ve

C.C.Reconocimiento

CAPÍTULO 1

Introducción

Este trabajo es una contribución a la teoría de decisión en general. Más particularmente a la teoría de elección social y a la Teoría de Decisión Ordinal (o cualitativa).
Las interrogantes que motivan el estudio de estos campos pueden plantearse sencillamente de la siguiente manera: ¿Cómo decidir cuál candidato es mejor? ¿Qué es un buen sistema electoral? ¿Cómo decidir cuál política es la más adecuada? Estos problemas de decisión se pueden formalizar y estudiar desde el punto de vista matemático. Las dos primeras preguntas corresponden a lo que se denomina teoría de elección social y la última a la teoría de decisión propiamente dicha.

www.bdigital.ula.ve

El problema de la elección, en general, consiste, en encontrar algunos métodos o mecanismos que permitan escoger una o algunas alternativas de un conjunto dado de alternativas. La elección está implícita en diversos problemas de naturaleza real. Las más conocidas son la elección de un candidato por un conjunto de individuos (teoría de elección social) y también la escogencia de una política (teoría de decisión), como por ejemplo, qué hacer si los precios del petróleo suben, o si hay depresión económica, cómo distribuir recursos, manejo de recursos humanos en empresas e industrias, en general manejo de subasta o compra de acciones en la bolsa de valores, hasta el tratamiento de imágenes satelitales, entre otros.

La decisión ha venido planteando diversos marcos formales para resolver problemas de elección. Uno de ellos, la teoría de elección social, trata sobre la toma de decisiones colectivas a partir de las preferencias de los individuos que conforman una sociedad. Estas preferencias están representadas mediante relaciones binarias sobre el conjunto de alternativas. Tengamos presente que los individuos, por supuesto, pueden tener opiniones distintas sobre las alternativas. El problema entonces consiste en lo siguiente: dado un grupo de *alternativas* (candidatos) y un grupo de *individuos* (votantes) con sus preferencias sobre los *candidatos* ¿Cómo elegir los *"mejores" candidatos* para todo el grupo de *individuos*?, ¿En qué medida el método escogido es *"bueno"*?

Las respuestas a esas preguntas no son tan simples. Desde el siglo XVIII [5, 10] fueron apareciendo diversos trabajos apuntando a solucionar los problemas de la votación, pero no

C.C.Reconocimiento

tuvieron ni la continuidad esperada ni el desarrollo merecido. Hacia la mitad del Siglo XX comienza una nueva etapa productiva y profunda en esta área. En efecto, en 1951 J. K. Arrow [1] probó un resultado importante que le dio un nuevo vigor y un nuevo enfoque a lo que hoy se llama la "teoría de elección social". Este resultado es conocido como El Teorema de Imposibilidad de Arrow, también llamado la paradoja de Arrow. Allí se demuestra que no es posible diseñar métodos de elección que obedezcan al mismo tiempo a un cierto conjunto de criterios "razonables".

Uno de los temas importantes dentro de la Teoría de Elección Social es el de la *manipulabilidad* de las funciones de elección social. Grosso modo, una función de elección social (un sistema de voto) es manipulable si hay una situación en que uno de los votantes prefiere mentir para hacer que el resultado lo favorezca. Sorprendentemente los trabajos de Gibbard [21] y Satterthwaite [31], nos dicen que todo sistema de voto, mínimamente bueno, es manipulable o dictatorial. Cabe aclarar que ellos se refieren a sistemas de voto que arrojan siempre un único ganador (funciones univaluadas). Ellos no estudian el problema de las funciones generales de elección que pueden arrojar empates (funciones multivaluadas) y que de hecho dependen de dos parámetros: las preferencias de la población de votantes y de un conjunto de candidatos a elegir, que en general es un subconjunto de todos los candidatos posibles.

Más recientemente, Salvador Barberà [3], Duggan-Schwartz [19], y Jean-Pierre Benoit [4] han establecido resultados de manipulabilidad para funciones de elección multivaluadas bajo ciertas condiciones sobre los perfiles de preferencias de los votantes. Sus trabajos son en muchos aspectos similares al trabajo de Gibbard y Satterthwaite. Ellos cambian el tipo de objetos a considerar: en vez de candidatos ellos consideran conjuntos de candidatos. Ese es el espacio de alternativas y es sobre esas alternativas que la población de votantes expresa sus preferencias. De hecho, ellos no consideran todas las preferencias posibles en ese espacio de alternativas, sino que consideran solamente algunas que tienen una estructura muy particular.

www.bdigital.ula.ve

Una pregunta natural es la siguiente: ¿Habrá un resultado de manipulabilidad para funciones de elección generales?

Investigamos nociones de manipulabilidad para funciones de elección generales. Ellas dependerán de la manera de interpretar una preferencia sobre los candidatos, como una preferencia sobre conjuntos de candidatos.

Así, en cuanto a la teoría de elección Social nos concentraremos en tres aspectos fundamentales: Estudio de Nuevas Propiedades y presentación de algunas funciones de elección social definidas a partir de distancias, Estudio de Manipulabilidad Generalizada.

En lo concerniente a la decisión entre políticas, que son funciones de un espacio de estados S en un conjunto de consecuencias X, está el marco clásico de Savage [32] que consiste en el estudio de la Utilidad Esperada. Para ello se debe disponer de una función de utilidad $u : X \longrightarrow \mathrm{R}$ y de una medida de probabilidad $p : \mathcal{A} \longrightarrow [0, 1]$ (donde $\mathcal{A}$ es una sigma álgebra sobre S). Con estos dos elementos se le asocia a cada política $f \in X^S$ un número que no es otra cosa que la esperanza de $u \circ f$ con respecto a la medida de probabilidad p (se supone

C.C.Reconocimiento

que $u \circ f$ es medible). Ese número es la utilidad esperada. Así, una política f es mejor que una política g si la utilidad esperada de f es más grande que la utilidad esperada de g. La axiomática de Savage en la Teoría de la Decisión captura exactamente las decisiones que se pueden hacer, en términos numéricos y en un marco infinito, con una función de utilidad y una función de probabilidad en términos de la utilidad esperada como describimos previamente. En otras palabras, una estructura $(X^S, \succeq)$, con $|S| = \infty$, satisface los axiomas de Savage si, y sólo si, la relación $\succeq$ se construye a partir de una función de utilidad u y una función de probabilidad p. Aquí la mejor política es la que maximiza la utilidad esperada. En este marco la relación $\succeq$, sobre las políticas, viene dada por la utilidad esperada, es decir, $f \succeq g$ si, y sólo si, $UE(f) \geq UE(g)$. Ahora bien, ¿qué pasa cuando no se tienen funciones de probabilidad ni una función de utilidad, sino más bien un marco de preferencias puramente ordinal? En ese marco debemos citar los trabajos pioneros de Dubois et al. [11, 13, 14]. Allí se estudian Estructuras de Decisión Ordinal en el caso finito inspirados de la estructura axiomática de Savage.

En el caso de Teoría de Decisión Ordinal consideramos un conjunto finito S de *estados* y un conjunto finito X de *consecuencias*. Las *políticas* o *actos* son aplicaciones $f : S \longrightarrow X$, es decir, una política es una función f en (X^S). El problema en la teoría de la decisión consiste en saber decidir cuales son las mejores políticas (actos). Ahora bien, en este caso, el problema consiste es construir estructuras puramente ordinales, es decir, ¿será posible debilitar los axiomas de Savage para obtener estructuras $(X^S, \succeq)$ para la toma de decisiones sobre políticas que sean racionales definidas a partir de preferencias $>_p$ sobre X y $\succeq_L$ sobre $\mathcal{P}(S)$?. En los trabajos de Dubois, Fargier, Perny y Prade [11, 13, 14, 15] se encuentran algunas caracterizaciones axiomáticas que tienen relación estrecha con la axiomática de las Lógicas No Monótonas (relaciones preferenciales y racionales) de los trabajos de Kraus, Lehmann y Magidor [29] [27]. Sobre resultados de representación en este marco cualitativo debemos referirnos a los trabajos de Franklin Camacho y Pino Pérez [6, 7, 8] y a la tesis doctoral de Camacho [9].

www.bdigital.ula.ve

Un problema natural es cómo integrar diferentes estructuras de Decisión Ordinal. Esto nos lleva a preguntarnos sobre las relaciones entre Teoría Decisión Ordinal y la Teoría de Elección. En este sentido, estudiaremos estructuras de decisiones múltiples. Básicamente consiste en lo siguiente: supongamos que tenemos un numero finito de individuos que tienen preferencias sobre un conjunto de políticas, es decir, cada individuo posee implícitamente una estructura de decisión sobre esas políticas. Entonces el problema consiste en estudiar mecanismos que permitan tomar una decisión social; es decir, crear una estructura de decisión sobre las políticas considerando la estructura multiple que conforma las estructuras particulares de cada individuo. Además, mostramos un resultado que captura una de las propiedades más importante de la teoría de elección social como lo es la propiedad de Pareto.

Este trabajo esta estructurado en cuatro capítulos fundamentales que siguen a esta pequeña introducción. El capítulo 2, se dedica a presentar los resultados y definiciones básicas utilizadas en los capítulos subsecuentes. En principio se muestran definiciones y resultados sobre relaciones de preferencias y levantamientos. En el capítulo 3 estudiamos la teoría de elección social. Particularmente introducimos algunas funciones de elección social y luego analizamos

C.C.Reconocimiento

el cumplimiento de algunas propiedades importante de la teoría de elección social para estas funciones. Adicionalmente, motivados por la similitud entre esta teoría de elección social y la problemática de la fusión de bases de conocimiento en el marco de la lógica [23, 24] introducimos nuevas propiedades de racionalidad para las funciones de elección social. Se establece una correspondencia precisa entre propiedades que se refieren a la consistencia de perfiles y propiedades que generalizan las propiedades de Pareto. El capítulo 4 está dedicado al estudio de manipulabilidad de funciones de elección social; es decir, estudiamos cuándo puede existir una situación de manipulación para este tipo de funciones. Pudiera pensarse que en el proceso de elección existe un individuo manipulador o pudieran existir varios (una coalición). Nosotros atacaremos el problema sólo cuando hay una situación de manipulabilidad para un único individuo que manipula. El capítulo 5 está dedicado al estudio de decisiones múltiples. Comenzamos por mostrar algunos resultados de la teoría de decisión en el marco cualitativo para luego plantearnos el problema del estudio de estructuras de decisión múltiple. Basándonos en los trabajos de Dubois, Fargier, Perny y Prade [11, 13, 14, 15] , particularmente la Regla de Dominancia Plausible. En este sentido, mostramos dos métodos de agregación global de preferencias sobre estas estructuras y planteamos nuevas funciones de agregación que, bajo ciertas condiciones, nos permita capturar el cumplimiento de la propiedad de Pareto interpretada en estas estructuras a través de los dos métodos.

Finalmente, tenemos un capítulo de conclusiones y perspectivas donde mostramos algunas ideas para trabajo futuro.

www.bdigital.ula.ve

C.C.Reconocimiento

CAPÍTULO 2

Relaciones de preferencia

Este capitulo está dedicado a presentar los resultados y definiciones básicas utilizadas en los capítulos subsecuentes. Inicialmente se muestran definiciones y resultados sobre relaciones de preferencias y levantamientos.

Usaremos las notaciones usuales de la lógica para establecer y enunciar propiedades matemáticas. Así los símbolos $\wedge, \vee, \Longrightarrow, \Longleftrightarrow, \forall, \exists$ y $\neg$, denotarán la conjunción ("y"), la disyunción ("o"), la implicación ("implica"), la doble implicación ("si, y sólo si"), cuantificador universal, ("para todo"), cuantificador existencial ("existe") y la negación ("no") respectivamente.

www.bdigital.ula.ve

Como es usual, cuando R es una relación (binaria) escribiremos $x\ R\ y$ en vez de $[R(x,y)]$ o de $(x,y) \in R$; por ejemplo $x \neq y$, $x \not< y$, $x \not\leq y$, $x \not\prec y$, $x \not\succeq y$, en vez de $\neg(x = y)$, $\neg(x < y)$, $\neg(x \leq y)$, $\neg(x \prec y)$ y $\neg(x \succeq y)$ respectivamente.

2.1 Relaciones modulares y preórdenes totales

En la teoría del orden se estudian varias clases de relaciones binarias que capturan la noción intuitiva del orden matemático. Muchas de las estructuras que son estudiadas emplean relaciones con propiedades adicionales. De hecho, algunas relaciones que no son de orden parcial son de especial interés. Principalmente, el concepto de preorden total o simplemente preorden, tiene que ser mencionado. Un preorden es una relación que es transitiva y total, pero no necesariamente antisimétrica. Cada preorden R induce una relación de equivalencia entre elementos, donde a es equivalente a b, si aRb y bRa. Los preórdenes pueden ser convertidos en órdenes identificando todo elemento equivalente con respecto a esta relación. Las relaciones modulares también se pueden identificar con los preórdenes y de eso se trata esta sección. En general se estudia la relación que existen entre los preórdenes y las relaciones modulares a fin de poder confundirlas en casos necesarios.

Comenzamos formalizando las propiedades que pueden tener las relaciones binarias.

Definición 2.1 *Una relación binaria R sobre un conjunto X es:*

C.C.Reconocimiento

reflexiva	*si*	$\forall x \in X,\ xRx$
irreflexiva	*si*	$\forall x \in X,\ x \not R x$
simétrica	*si*	$\forall x, y \in X,\ xRy \Longrightarrow yRx$
asimétrica	*si*	$\forall x, y \in X,\ xRy \Longrightarrow y \not R x$
antisimétrica	*si*	$\forall x, y \in X,\ xRy \wedge yRx \Longrightarrow x = y$
transitiva	*si*	$\forall x, y, z \in X,\ xRy \wedge yRz \Longrightarrow xRz$
total	*si*	$\forall x, y \in X,\ xRy \vee yRx$

Definición 2.2 *Una relación binaria R sobre un conjunto X es un* ***preorden total*** *(sobre X) si es transitiva y total, y es un* ***orden lineal*** *(sobre X) si además es antisimetrica.*

Definición 2.3 *Dado un orden lineal $\geq$ se define el* ***orden lineal estricto*** *$>$, asociado a $\geq$, de siguiente manera:*

$$x > y \Longleftrightarrow x \geq y \wedge x \neq y,$$

es decir, $> = \geq \setminus \{(x,x) :\ x \in X\}$.

Se puede probar que un orden lineal estricto $>$ esta caracterizado por las siguientes propiedades:

1. Transitividad
2. Cuasi-totalidad (tricotomía): $\forall x, y[x \neq y \Longrightarrow x > y \vee y > x]$
3. Asimetría

www.bdigital.ula.ve

De hecho, si $>$ es un orden lineal estricto entonces la relación $\geq = > \cup \{(x,x) : x \in X\}$ es un orden lineal.

En lo sucesivo, muchas veces diremos *relación* en vez de *relación binaria.*

Definición 2.4 *Una relación R sobre un conjunto X se llama* ***modular-1*** *si existe un orden lineal $>$ sobre un conjunto Y, y existe una aplicación $\gamma : X \longrightarrow Y$, tal que para todos $x, y \in X$ se cumple*

$$xRy \Longleftrightarrow \gamma(x) > \gamma(y). \tag{2.1}$$

Definición 2.5 *Una relación binaria R sobre un conjunto X se llama* ***modular-2*** *si es (i) Irreflexiva, (ii) Transitiva y además satisface*

$$\textit{(iii)}\ \forall x, y, z \in X, \quad [xRz \wedge (x \not R y \wedge y \not R x) \longrightarrow yRz]\ (\text{Estratificación}).$$

Definición 2.6 *Una relación $\succ$ sobre un conjunto X se llama* ***modular-3*** *si satisface*

(m1) $\forall x, y \in X, \quad \neg(x \succ y \wedge y \succ x).$

(m2) $\forall x, y, z \in X, \quad [x \succ z \longrightarrow (x \succ y \vee y \succ z)].$

En el siguiente resultado mostraremos la equivalencia entre las tres definiciones anteriores.

C.C.Reconocimiento

Proposición 2.1 *Las definiciones 2.4, 2.5 y 2.6 son equivalentes. Por consiguiente una relación que satisface cualquiera de ellas, será llamada* ***modular****.*

Demostración. Primero mostraremos que la definición 2.5 se obtiene a partir de la definición 2.4.

(i) Debemos ver la irreflexividad, es decir, se debe cumplir que $\forall x \in X, \quad [x \not\succ x]$.
En efecto, $x \not\succ x \Longleftrightarrow f(x) \not> f(x)$, pero es cierto que $f(x) \not> f(x)$ por ser $>$ irreflexiva, luego $x \not\succ x$.

(ii) Debemos ver la transitividad, es decir, se debe cumplir que:

$$\forall x, y, z \in X \quad [x \succ y \wedge y \succ z \Rightarrow x \succ z].$$

Asumamos que $x \succ y$ e $y \succ z$. Como,

$$[x \succ y \wedge y \succ z] \Longleftrightarrow [f(x) > f(y) \wedge f(y) > f(z)],$$

se tiene que $f(x) > f(y)$ y $f(y) > f(z)$. Por ser $>$ transitiva se tiene que $f(x) > f(z)$, y usando 2.1 se tiene que $x \succ z$.

www.bdigital.ula.ve

(iii) Por último veremos que $\succ$ satisface la estratificación:

$$\forall x \forall y \forall z \quad [x \succ z \wedge (x \not\succ y \wedge y \not\succ x) \longrightarrow y \succ z].$$

Razonemos por reducción al absurdo. Supongamos que $[x \succ z \wedge (x \not\succ y \wedge y \not\succ x)]$ y que $y \not\succ z$. Del hecho $y \not\succ z$ se tiene que $f(y) \not> f(z)$ y como $>$ es total y sabemos que $y \neq z$ (ya que $x \succ z$ pero $y \not\succ z$), se tiene que $f(z) > f(y)$. Además, $x \succ z$ implica que $f(x) > f(z)$ y por ser $>$ transitiva se tiene que $f(x) > f(y)$, es decir, $x \succ y$ lo que contradice el hecho que x e y son incomparables.

Como segundo paso veremos que la definición 2.6 se obtiene a partir de la definición 2.5.

(m1) Debemos ver que $\forall x, y \in X, \quad \neg(x \succ y \wedge y \succ x)$. Razonemos por el absurdo. Supongamos que $x \succ y$ e $y \succ x$. Como $\succ$ es transitiva se tiene que $x \succ x$ lo que contradice la irreflexividad de $\succ$.

(m2) Veamos que $\succ$ satisface la siguiente propiedad:

$$\forall x, y, z \in X, \quad [x \succ z \longrightarrow (x \succ y \vee y \succ z)].$$

En efecto, si y es incomparable con x, se tiene $x \not\succ y \wedge y \not\succ x$, y usando la propiedad de estratificación se tiene $y \succ z$.

Ahora, si y es comparable con x, se tiene $x \succ y$ o $y \succ x$. En el primer caso no hay nada que probar y en el segundo caso, usando la transitividad de $\succ$, se tiene que $y \succ z$.

C.C.Reconocimiento

Finalmente veremos que la definición 2.4 se obtiene a partir de la definición 2.6.

Sea X un conjunto dotado con la relación $\succ$ modular-3. Definamos la relación $x \sim y$ de la siguiente manera:

$$x \sim y \Longleftrightarrow x \not\succ y \wedge y \not\succ x. \tag{2.2}$$

Esta relación $\sim$ es llamada la relación de indiferencia asociada a $\succ$. Probemos que $\sim$ es una relación de equivalencia.

Notemos que la propiedad **(m1)** implica que $x \not\succ x$, así $x \sim x$ para cualquier $x \in X$.

Si $x \sim y \wedge y \sim z$, claramente, usando **(m2)**, se tiene que $x \sim z$, ya que de lo contrario tendríamos $x \succ z$ o $z \succ x$ y en el primer caso **(m2)** implica que $x \succ y$ o $y \succ z$ lo cual viola la hipótesis $x \sim z \wedge y \sim z$; para el segundo caso usando de nuevo **(m2)** se tiene que $z \succ y$ o $y \succ x$ lo que de nuevo viola la hipótesis $x \sim z \wedge y \sim z$.

Finalmente la simetría es evidente por definición.

Ahora definimos $[x]$ como la clase de equivalencia de x con respecto a la relación $\sim$, es decir,

$$[x] = \{y \in X : \ x \sim y\}.$$

Definamos $Y = \{[x] : \ x \in X\}$ y definamos una relación $>$ sobre Y de la siguiente manera:

www.bdigital.ula.ve

$$[x] > [y] \Longleftrightarrow x \succ y. \tag{2.3}$$

Veamos que $>$ esta bien definida, es decir, no depende del representante: si $x \sim x'$ y $y \sim y'$, entonces $x \succ y$ implica $x' \succ y'$. En efecto, como $x \succ y$, usando **(m2)** y el hecho que $x \sim x'$, necesariamente $x' \succ y$; de igual manera, como $x' \succ y$, usando **(m2)** y del hecho que $y \sim y'$, se tiene que $x' \succ y'$.

Ahora veamos que $>$ es un orden lineal sobre Y.

(i) Debemos ver $\forall [x] \in Y$, se cumple que $[x] \not> [x]$. En efecto, $[x] \not> [x] \Longleftrightarrow x \not\succ x$. Así, usando la propiedad **(m1)** y tomando $y = x$ se tiene que $x \not\succ x$, por lo tanto $[x] \not> [x]$.

(ii) Ahora probaremos que $>$ satisface la siguiente propiedad:

$$\forall \, [x], [y], [z] \in Y, \quad [[x] > [y] \wedge [y] > [z]] \Rightarrow [x] > [z].$$

En efecto, $[x] > [y]$ y $[y] > [z]$ si, y sólo si, $x \succ y$ e $y \succ z$. Como $x \succ y$, usando la propiedad **(m2)** se tiene que $x \succ z$ o $z \succ y$, pero en virtud de **(m1)** $z \succ y$ no es posible, por lo tanto se tiene $x \succ z$, es decir, $[x] > [z]$.

(iii) Finalmente debemos ver que $\forall \, [x], [y] \in Y$, con $[x] \neq [y]$, se cumple que $[x] > [y] \vee [y] > [x]$. Razonemos por el absurdo. Supongamos que existen $[x]$ e $[y]$ en Y, con $[x] \neq [y]$ tales que $[x] \not> [y]$ e $[y] \not> [x]$. Por lo tanto $x \not\succ y$ e $y \not\succ x$, es decir $x \sim y$, lo que implica que $[x] = [y]$ lo que es una contradicción.

C.C.Reconocimiento

Para concluir, tenemos Y dotado con un orden lineal $>$ y definimos $f : X \longrightarrow Y$ de la siguiente manera $f(x) = [x]$. Por definición tenemos $x \succ y$ si, y sólo si, $f(x) > f(y)$. Esto termina la prueba.

∎

Sean RM y P los conjuntos de relaciones modulares y preórdenes totales sobre X respectivamente, es decir,

$$\begin{aligned} RM &= \{\succ : \succ \text{ es una relación modular sobre } X\} \\ \mathrm{P} &= \{\succeq : \succeq \text{ es un preorden total sobre } X\}. \end{aligned}$$

Teorema 2.1 *Existe una biyección entre las relaciones modulares y los preórdenes totales sobre un conjunto X.*

Demostración.

- Dada una relación modular $\succ$ definimos una relación $\succeq$ de la siguiente manera:

$$a \succeq b \Longleftrightarrow [a \succ b \vee a \sim b],$$

donde $\sim$ es la relación definida en (2.2) la cual, ya vimos, es una relación de equivalencia.

www.bdigital.ula.ve

Veamos que $\succeq$ es efectivamente un preorden total.

Reflexividad: Claramente esta propiedad es satisfecha ya que para todo $x \in X$ se tiene $x \succeq x$ si, y sólo si, $x \succ x$ o $x \sim x$, pero esto último siempre ocurre, pues $\sim$ es una relación de equivalencia.

Transitividad: Supongamos que $x \succeq y \wedge y \succeq z$. Consideremos cuatro casos:

(i) $x \succ y \wedge y \succ z$, se concluye, usando transitividad de $\succ$, que $x \succ z$, por lo tanto $x \succeq z$.

(ii) $x \succ y \wedge y \sim z$, se concluye, usando **(m2)**, que $x \succ z$ (pues $z \succ y$ está prohibido por $y \sim z$), de donde $x \succeq z$.

(iii) $x \sim y \wedge y \succ z$, se concluye, usando estratificación, que $x \succ z$, de donde $x \succeq z$.

(iv) $x \sim y \wedge y \sim z$. Usando la transitividad de $\sim$ se concluye que $x \sim z$, por lo tanto $x \succeq z$.

Totalidad: Debemos ver que para todo $x, y \in X$ se cumple que $x \succeq y$ o $y \succeq x$. Si $x \sim y$, claramente $x \succeq y$. Si $x \not\sim y$, entonces $x \succ y$ o $y \succ x$. Así, $x \succeq y$ o $y \succeq x$.

Hemos definido una función φ que envía una relación modular $\succ$ en un preorden total $\succeq$, es decir, $\succ \stackrel{\varphi}{\longmapsto} \succeq$.

C.C.Reconocimiento

- Ahora construyamos una función ψ que envía una preorden total $\succeq$ en una relación modular $\succ$, es decir, definimos $\succeq \stackrel{\psi}{\longmapsto} \succ$ de la siguiente manera:

$$a \succ b \Longleftrightarrow [a \succeq b \text{ y } b \not\succeq a]$$

Veamos que $\succ$ es efectivamente un relación modular.

Irreflexividad: Debemos ver que para todo $x \in X$ se cumple que $x \not\succ x$, es decir, $x \not\succeq x$ o $x \succeq x$, pero $x \succeq x$ es cierto por ser $\succeq$ reflexiva. Así, $\succ$ es irreflexiva.

Transitividad: Supongamos que $x \succ y \wedge y \succ z$, es decir, $x \succeq y \wedge y \not\succeq x$, $y \succeq z \wedge z \not\succeq y$. Por transitividad de $\succeq$ se tiene $x \succeq z$. Falta ver que $z \not\succeq x$. En efecto, si suponemos $z \succeq x$, entonces usando la transitividad de $\succeq$ tenemos $z \succeq y$, lo cual contradice la hipótesis $z \not\succeq y$.

Estratificación: Debemos ver que para todo $x, y, z \in X$ se cumple que: $x \succ z$ y y incomparable con x, implica $y \succ z$. Supongamos que $x \succ z$ y y incomparable con x. Esto significa:

$$x \succ z \Longleftrightarrow [x \succeq z \wedge z \not\succeq x] \tag{2.4}$$

y $x \sim y$ es equivalente a $x \succeq y \wedge y \succeq x$. En efecto,

www.bdigital.ula.ve

$$\begin{aligned} x \sim y &\Longleftrightarrow x \not\succ y \wedge y \not\succ x \\ &\Longleftrightarrow (x \not\succeq y \vee y \succeq x) \wedge (y \not\succeq x \vee x \succeq y) \\ &\Longleftrightarrow (x \not\succeq y \wedge y \not\succeq x) \vee (x \not\succeq y \wedge x \succeq y) \vee (y \succeq x \wedge y \not\succeq x) \vee (y \succeq x \wedge x \succeq y) \end{aligned}$$

Pero $(x \not\succeq y \wedge y \not\succeq x)$ no puede ocurrir porque $\succeq$ es total y tampoco puede ocurrir $(x \not\succeq y \wedge x \succeq y)$ o $(y \succeq x \wedge y \not\succeq x)$ por ser contradictorias. Así la única que ocurre es $y \succeq x \wedge x \succeq y)$, por lo tanto

$$x \sim y \Longleftrightarrow x \succeq y \wedge y \succeq x.$$

Así, cuando $x \succ z$ y $x \sim y$ se tiene $x \succeq z$, $z \not\succeq x$, $x \succeq y$ e $y \succeq x$. De allí, $y \succeq z$ (por transitividad de $\succeq$). Falta ver que $z \not\succeq y$. Si no fuese así tendríamos $z \succeq y$ y por transitividad, $z \succeq x$, lo cual es una contradicción. En conclusión tenemos $y \succeq z$ y $z \not\succeq y$, es decir, $y \succ z$.

Hemos probado que $\succ$ es modular. Así, hemos construido dos funciones φ y ψ, tales que

$$\begin{gathered} \varphi : RM \longrightarrow \mathrm{P} \\ \psi : \mathrm{P} \longrightarrow RM. \end{gathered}$$

C.C.Reconocimiento

Para terminar la prueba del teorema, basta notar que

$$\varphi_\circ\psi = id_{\mathrm{P}} \text{ y } \psi_\circ\varphi = id_{RM},$$

es decir φ es una biyección con inversa ψ.

$\blacksquare$

El teorema 2.1 hará que a veces confundamos un preorden total $\succeq$ con su relación modular $\succ$ y viceversa. Más aún, tenemos que estos procesos son el inverso uno del otro. A manera de precisar veamos el siguiente resultado.

Proposición 2.2 *Sean $\succ_{\succeq}$ la relación modular asociada a $\succeq$ y $\succeq_{\succ}$ el preorden total asociado a $\succ$. Entonces $(\succeq)_{\succ_{\succeq}} = \succeq$ y $(\succ)_{\succeq_{\succ}} = \succ$, es decir, que la relación modular $\succ$ origina un único preorden total $\succeq$ que a su vez origina una única relación modular que es $\succ$.*

2.1.1 Representación Gráfica de las relaciones modulares y preórdenes totales

Sean $\succ$ y $\succeq$ la relación modular y el preorden total respectivamente, definidos por:
$\succ = \{(x,z),(x,w),(x,r),(x,t),(y,z),(y,w),(y,r),(y,t),(z,w),(z,r),(z,t),(w,t),(r,t)\}$

$\succeq = \succ \cup \{(x,x),(y,y),(z,z),(w,w),(r,r),(t,t),(x,y),(y,x),(w,r)\}$

www.bdigital.ula.ve

Usaremos la siguiente notación para representar de manera gráfica y abreviada las relaciones anteriores:

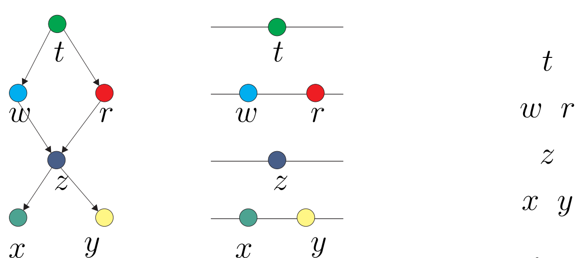


Figura a **Figura b** **Figura c**

El grafo dirigido en la **Figura a** expresa lo siguiente: Las flechas indican el orden de relación, por ejemplo, $t \longrightarrow w$ significa que $t \succ w$ y w y r son incomparables con respecto a la relación modular $\succ$. Así, $\succ$ es la clausura transitiva del grafo de la figura a y $\succeq$ es la clausura transitiva de $\succ \cup \sim$ generadas por la **Figura a**, por ejemplo, se cumple $r \succeq w$ y $w \succeq r$.

El la **Figura b** se expresan $\succ$ y $\succeq$ mediante niveles, donde los elementos que están en el nivel mas alto son "*mejores*" con respecto a la relación modular $\succ$, o al preorden total $\succeq$ que los elementos que están en niveles inferiores por ejemplo, $z \succ x$ y $z \succ y$. Los elementos que están en el mismo nivel son "*indiferentes*" (incomparables), por ejemplo, $x \succeq y$ y $y \succeq x$.

La **Figura c**, es simplemente una abreviación de la **Figura a** y la **Figura b**, y es la que generalmente usaremos posteriormente.

C.C.Reconocimiento

Definición 2.7 *Sean $\succeq_1$ y $\succeq_2$ preórdenes totales sobre un conjunto X. Definimos una relación $lex(\succeq_1, \succeq_2)$ (para simplificar la notación la llamaremos $\succeq_{lex}$) sobre X de la siguiente manera:*

$$\forall a, b \in X, \quad a \succeq_{lex} b \Longleftrightarrow [a \succ_1 b \vee (a \sim_1 b \wedge a \succeq_2 b)] .$$

Lema 2.1 *La relación $\succeq_{lex}$ es un preorden total sobre X.*

Demostración.

Reflexividad: Debemos ver que $\forall x \in X \quad [x \succeq_{\text{lex}} x]$. En efecto, $x \succeq_{\text{lex}} x$ significa

$$[x \succ_1 x \vee (x \sim_1 x \wedge x \succeq_2 x)] .$$

Ya que $\sim_1$ y $\succeq_2$ son reflexivas, ocurre $x \sim_1 x$ y $x \succeq_2 x$. En consecuencia $x \succeq_{\text{lex}} x$.

Transitividad: Debemos ver que $\forall x, y, z \in X$ si $x \succeq_{\text{lex}} y \wedge y \succeq_{\text{lex}} z$ entonces $x \succeq_{\text{lex}} z$, es decir, queremos ver que

$$x \succ_1 z \vee (x \sim_1 z \wedge x \succeq_2 z) \tag{2.5}$$

Notemos que

$$x \succeq_{\text{lex}} y \wedge y \succeq_{\text{lex}} z \Longleftrightarrow [x \succ_1 y \vee (x \sim_1 y \wedge x \succeq_2 y)] \wedge [y \succ_1 z \vee (y \sim_1 z \wedge y \succeq_2 z)] .$$

Veamos los posibles casos:

Caso 1: $x \succ_1 y \wedge y \succ_1 z$. Claramente, por transitividad de $\succeq_1$, se tiene $x \succ_1 z$. Por lo tanto se cumple (2.5).

Caso 2: $x \succ_1 y \wedge (y \sim_1 z \wedge y \succeq_2 z)$. Aquí tenemos que $x \succ_1 y \wedge y \sim_1 z$ implica que $x \succ_1 z$. Por lo tanto se cumple (2.5).

Caso 3: $(x \sim_1 y \wedge x \succeq_2 y) \wedge y \succ_1 z$. En particular tenemos que $x \succ_1 z$. Así, se cumple (2.5).

Caso 4: $(x \sim_1 y \wedge x \succeq_2 y) \wedge (y \sim_1 z \wedge y \succeq_2 z)$. Como $x \sim_1 y \wedge y \sim_1 z$ se tiene que $x \sim_1 z$. Por otra parte, como $x \succeq_2 y \wedge y \succeq_2 z$ se tiene que $x \succeq_2 z$. Por lo tanto tenemos que $x \sim_1 z$ y $x \succeq_2 z$ y de nuevo se cumple (2.5).

Totalidad: Debemos ver que $\forall x, y \in X \quad [x \succeq_{\text{lex}} y \vee y \succeq_{\text{lex}} x]$. Es decir, debemos ver que

$$[x \succ_1 y \vee (x \sim_1 y \wedge x \succeq_2 y)] \vee [y \succ_1 x \vee (y \sim_1 x \wedge y \succeq_2 x)] . \tag{2.6}$$

Como $\succeq_1$ es un preorden total entonces siempre sucede que $x \succ_1 y$ o $y \succ_1 x$ o bien $x \sim_1 y$. También se tiene que $x \succeq_2 y$ o $y \succeq_2 x$, gracias a la totalidad de $\succeq_2$. De este hecho es fácil ver que 2.6 se cumple.

∎

Consideremos un conjunto X. Denotaremos con $\mathcal{P}(X)$ al conjunto $\{V : V \subseteq X\}$ (el conjunto de subconjuntos de X) y denotaremos con $\mathcal{P}^*(X) = \mathcal{P} \setminus \{\emptyset\}$.

www.bdigital.ula.ve

C.C.Reconocimiento

Definición 2.8 *Sea X un conjunto finito y sean $A, B \in \mathcal{P}^*(X)$. Definimos una relación $\geq_{car}$ entre la cardinalidad de dos conjuntos como sigue: $A \geq_{car} B$ si, y sólo si, el número de elementos que tiene el conjunto A es mayor o igual que el número de elementos que tiene el conjunto B.*

Se puede verificar fácilmente que la relación $\geq_{car}$ es un preorden total sobre $\mathcal{P}^*(X)$.

Definición 2.9 *Dado $V \subseteq X$ y $\succeq$ un preorden total sobre X, definimos:*

$$\max(V, \succeq) = \{x \in V : \quad \forall y \in V, \ x \succeq y\}.$$

Los dos siguientes lemas tienen una prueba inmediata.

Lema 2.2 *Si $\succeq$ es un preorden total sobre X y $V \subseteq X$, $a \in V$ se tiene que: si $a \in \max(V, \succeq)$ y $b \in V \setminus \max(V, \succeq)$ entonces $a \succ b$.*

Lema 2.3 *Si $\succeq$ es un preorden total sobre X y $V \subseteq X$, $V \neq \emptyset$ se tiene que: $a \notin \max(V, \succeq)$ si, y sólo si, existe $b \in V$ tal que $b \succ a$.*

Lema 2.4 *Sean $\succeq_1$ y $\succeq_2$ preórdenes totales sobre un conjunto X.*
Consideremos $\succeq_{lex}$ y $V \in \mathcal{P}^*(X)$. Entonces

www.bdigital.ula.ve

$$\max(V, \succeq_{lex}) = \max(\max(V, \succeq_1), \succeq_2).$$

Demostración. Sea $a \in \max(V, \succeq_{lex})$, esto significa que $a \in V$ y para todo $b \in V$ se tiene que $a \succeq_{lex} b$, es decir, $a \succ_1 b$ o $(a \sim_1 b \wedge a \succeq_2 b)$.

Primero notemos que $a \in \max(V, \succeq_1)$; si no, existe $b \in V$ tal que $b \succ_1 a$ (ver Lema 2.3) y esto contradice el hecho que $a \succ_1 b$ o $a \sim_1 b$.

Sea $B = \max(V, \succeq_1)$. Veamos ahora que $a \in \max(B, \succeq_2)$. Si suponemos lo contrario, tenemos que existe $b \in B$ tal que $b \succ_2 a$, pero esto contradice el hecho que $a \succeq_2 b$.

Recíprocamente, si $a \in \max(\max(V, \succeq_1), \succeq_2)$, tenemos que $a \in \max(V, \succeq_1)$, es decir, $\forall b \in V$ se tiene $a \succeq_1 b$.

Ahora bien, los elementos de V se pueden dividir en dos categorías, $B = \max(V, \succeq_1)$ y su complemento, es decir, $V \setminus B$. Así, si $b \in V$ se cumple que, $b \in B$ o bien $b \in V \setminus B$. En el primer caso tenemos que $a \succ_1 b$ (ver Lema 2.2) y en el segundo caso se tiene $a \sim_1 b$, pero como $b \in B$ se tiene $a \succeq_2 b$, pues $a \in \max(B, \succeq_2)$. En resumen, tenemos que para todo $b \in V$ sucede que

$$a \succ_1 b \quad \text{o bien,} \quad (a \sim_1 b \wedge a \succeq_2 b),$$

es decir, $a \succeq_{\text{lex}} b$. Esto implica que $a \in \max(V, \succeq_{\text{lex}})$. ∎

C.C.Reconocimiento

2.2 Algunos preórdenes totales definidos con "distancias".

Definición 2.10 *Sea* $X = \{x_0, \cdots, x_k\}$ *un conjunto finito. Sea*

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{N}$$

una distancia, es decir, una función que satisface:

(i) $d(x, y) = d(y, x) \qquad \forall x, y \in X,$

(ii) $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y \qquad \forall x, y \in X,$

(iii) $d(x, y) \geq d(x, z) + d(z, y) \qquad \forall x, y, z \in X.$

Podemos extender d a una función entre elementos de X y conjuntos formados por elementos de X, de la siguiente manera

www.bdigital.ula.ve

$$\begin{aligned} d^* &: X \times \mathcal{P}^*(X) \longrightarrow \mathbb{N} \\ d^*(x, A) &= \min_{y \in A}(d(x, y)) \end{aligned}$$

Sea $A \subseteq X$ un conjunto no vacío. Se construye una relación $\succeq_A$ sobre X de la manera siguiente:

$$x \succeq_A y \Longleftrightarrow d^*(x, A) \leq d^*(y, A)$$

Es claro que $\succeq_A$ es un preorden total sobre X. Si $\succeq$ es un preorden total sobre X, denotaremos $\max(\succeq)$ al conjunto $\max(X, \succeq)$.

Definición 2.11 *Sea* $\succeq$ *un preorden total sobre* X *y* $A = \max(\succeq)$. *Diremos que* $\succeq$ *es d-consistente si* $\succeq = \succeq_A$.

Si u es un vector, entonces u_k denotará la k-ésima coordenada de u.

Ejemplo 2.1 *Sea* $X = \{0, 1\}^n$, *es decir, los elementos de* X *son vectores de ceros y unos de tamaño* n. *La siguiente distancia es llamada distancia de Hamming (estudiada en la Teoría de Códigos, ver [23], [24], [25] y [26]); y la definimos de la siguiente manera:*

$$\begin{aligned} d &: X \times X \longrightarrow \mathbb{N} \\ d(u, v) &= |\{i : u_i \neq v_i\}| \end{aligned}$$

es decir la distancia entre u *y* v *es el número de coordenadas en que difieren.*

C.C.Reconocimiento

Sea $X = \{(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0),(1,1,0),(1,0,1),(0,0,0),(1,1,1),(0,1,1)\}$. *Consideremos los preórdenes* $\succeq_1$ *y* $\succeq_2$ *dados por:*

$$\begin{array}{cc}
(1,1,0) & (1,1,0)(0,0,0) \\
(0,1,0)(1,0,0)(1,1,1) & (1,0,0)(1,0,1)(0,1,1) \\
(1,0,1)(0,0,0)(0,1,1) & (0,1,0)(1,1,1) \\
(0,0,1) & (0,0,1) \\
\uparrow & \uparrow \\
\succeq_1 & \succeq_2
\end{array}$$

Resulta fácil verificar que el preorden $\succeq_1$ *es d-consistente, mientras que* $\succeq_2$ *no lo es. Se puede observar que en la relación* $\succeq_2$ *los vectores* $(0,0,0)$, $(1,1,0)$ *aparece en el tercer nivel y en el nivel dos aparece el vector* $(1,0,1)$ *que difiere en dos coordenadas de los de los vectores* $(0,0,0)$, $(1,1,0)$.

Si $\succeq$ es un preorden total sobre X, y $V \subseteq X$, denotaremos por $\succeq_{\upharpoonright_V}$ a la restricción de $\succeq$ al conjunto V, es decir.

$$\succeq_{\upharpoonright_V} = \{(x,y) \in V^2 : \ x \succeq y\}.$$

Por extensión, si u es un vector de preórdenes totales sobre X, digamos $u = (\succeq_1, \cdots, \succeq_n)$, y $V \subseteq X$, definimos

www.bdigital.ula.ve

$$u_{\upharpoonright_V} = \left(\succeq_{1_{\upharpoonright_V}}, \cdots, \succeq_{n_{\upharpoonright_V}}\right)$$

Ejemplo 2.2 *Si* $X = \{x,y,z,w\}$, $V = \{x,z\}$ *y* $\succeq$ *está representado por:*

$$\begin{array}{c} z \\ w \\ xw \end{array}$$

entonces $\succeq_{\upharpoonright_V}$ *estará representado por:*

$$\begin{array}{c} z \\ x \end{array}$$

2.3 Levantamientos

Definición 2.12 *Una aplicación* $\succeq \mapsto \sqsupseteq_{\succeq}$ *que envía una relación* $\succeq$ *sobre* X, *a una relación* $\sqsupseteq_{\succeq}$ *sobre* $\mathcal{P}^*(X)$, *es llamada un levantamiento si, y sólo si, para cada par,* $x, y \in X$ *se cumple la siguiente condición:*

$$x \succeq y \iff \{x\} \sqsupseteq_{\succeq} \{y\}$$

Así, si $\succeq \mapsto \sqsupseteq_{\succeq}$ es un levantamiento, la relación $\sqsupseteq_{\succeq}$ es una "extension" de la relación $\succeq$.

Ejemplos 2.1 *Sea* $\succeq$ *un preorden total sobre* X. *Sea* A *y* B *subconjuntos* $\mathcal{P}^*(X)$. *Definimos:*

$A \sqsupseteq^I_{\succeq} B \iff \exists a \in \max(A,\succeq) \wedge \exists b \in \max(B,\succeq)$ *tal que* $a \succeq b$

C.C.Reconocimiento

$A \sqsupseteq_{\succeq}^{II} B \Longleftrightarrow A \sqsupset_{\succeq}^{I} B \;\; o \;\; (A \simeq_{\succeq}^{I} B \;\&\; |A| \leq |B|)$

$A \sqsupseteq_{\succeq}^{III} B \Longleftrightarrow A \sqsupset_{\succeq}^{I} B \;\; o \;\; (A \simeq_{\succeq}^{I} B \;\&\; |\max(A, \succeq)| \leq |\max(B, \succeq)|)$

$A \sqsupseteq_{\succeq}^{IV} B \Longleftrightarrow A \sqsupset_{\succeq}^{III} B \;\; o \;\; (A \simeq_{\succeq}^{III} B \;\&\; |A| \leq |B|)$

Veamos la ilustración de los levantamientos definidos anteriormente.

Ejemplo 2.3

En la figura (a) $\succeq$ es representado por niveles. Así, podemos observar que A y B satisfacen $B \sqsupset_{\succ}^{I} A$, por lo tanto $B \sqsupseteq_{\succeq}^{II} A$, $B \sqsupseteq_{\succeq}^{III} A$ y $B \sqsupseteq_{\succeq}^{IV} A$.

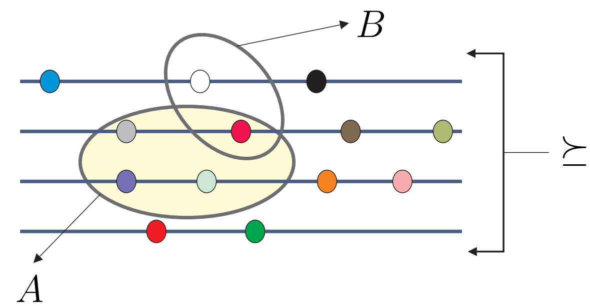


Figure (a)

www.bdigital.ula.ve

En la figura (b) los conjuntos C y D satisfacen las siguientes relaciones: $C \approx_{\succeq}^{I} D$, $|C| = |D|$, por lo tanto $C \approx_{\succeq}^{II} D$ sin embargo, $|\max(C)| < |\max(D)|$, así $C \sqsupseteq_{\succeq}^{III} D$ y $C \sqsupseteq_{\succeq}^{IV} D$.

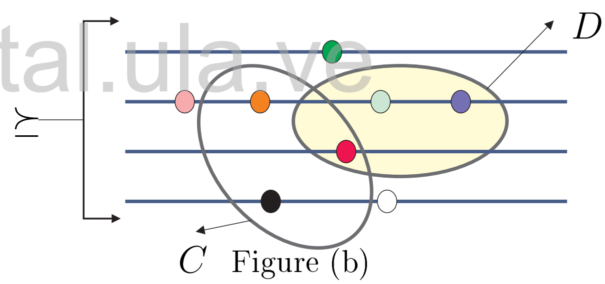


Figure (b)

En la figura (c) los conjuntos E y F satisfacen las siguientes relaciones: $E \approx_{\succeq}^{I} F$ pero $|F| < |E|$, por lo tanto, $F \sqsupseteq_{\succeq}^{II} E$. Como $|\max(E)| = |\max(F)|$, se tiene $E \approx_{\succeq}^{III} F$ sin embargo $F \sqsupseteq_{\succeq}^{IV} E$.

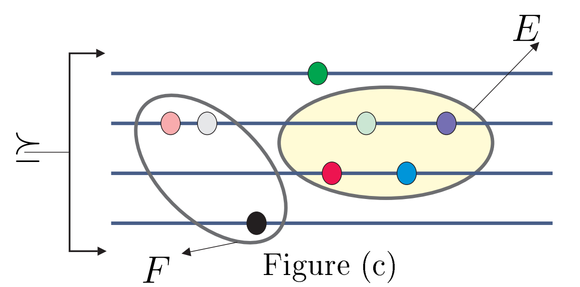


Figure (c)

Proposición 2.3 *Las cuatro aplicaciones $\succeq \mapsto \sqsupseteq_{\succeq}^{\alpha}$, para $\alpha \in \{I, II, III, IV\}$ son levantamientos quer envían preórdenes totales sobre X en preórdenes totales sobre $\mathcal{P}^{*}(X)$.*

C.C.Reconocimiento

Demostración.
Verificar la condición de levantamiento de la definición 4.7 es trivial. El trabajo resulta en chequear que para cada $\alpha \in \{I, II, III, IV\}$, la relación $\sqsupseteq_{\succeq}^{\alpha}$ es un preorden total. Para $\alpha = I$ la demostración es trivial. Para los demás α se debe notar que la relación lexicográfica asociada a dos preórdenes totales también es un preorden total.

La relación $\sqsupseteq_{\succeq}^{I}$ asociada a $\succeq$ trata de extender de manera natural las relaciones de preferencia sobre los elementos de X expresadas por $\succeq$, a relaciones de preferencia sobre $\mathcal{P}^*(X)$ expresada por $\sqsupseteq_{\succeq}^{I}$. En palabras, $A \sqsupseteq_{\succeq}^{I} B$ significa que los mejores elementos de A (relativo a $\succeq$) son preferidos o indiferentes a los mejores elementos de B (relativo a $\succeq$); o gráficamente, los mejores elementos de A en un nivel mas alto o en el mismo nivel que donde están los mejores elementos de B.

La relación $\sqsupseteq_{\succeq}^{II}$ puede explicarse en palabras de la siguiente manera: $A \sqsupseteq_{\succeq} B$ si, y sólo si, los mejores elementos de A (relativo a $\succeq$) son estrictamente preferidos a los mejores elementos de B (relativo a $\succeq$) o en el caso en que los mejores elementos de A y B (relativo a $\succeq$) están en el mismo nivel, A tiene menor o igual cantidad de elementos que B, es decir, cuando los mejores de A y B estan en el mismo nivel, preferimos al conjunto más preciso (el de menor tamaño).

Para las otras relaciones la interpretación es similar. ∎

www.bdigital.ula.ve

Otros levantamientos conocidos en la literatura son los siguientes:

Ejemplo 2.4

1. Levantamiento minimal: *Si es $\succeq$ un preorden total sobre un conjunto X, definimos el **Levantamiento minimal**, denotado por $\sqsupseteq_m$, de la siguiente manera: para cualesquiera $A, B \in \mathcal{P}(X)$*

$$A \sqsupseteq_m B \iff \forall b \in \min(B),\ \exists a \in \min(A), a \succeq b.$$

2. Levantamiento Posibilista: *Si es $\succeq$ un preorden total sobre un conjunto X, definimos el **Levantamiento Posibilista**, denotado por $\sqsupseteq_\Pi$, de la siguiente manera: para cualesquiera $A, B \in \mathcal{P}(X)$*

$$A \sqsupseteq_\Pi B \iff \forall b \in \max(B),\ \exists a \in \max(A), a \succeq b.$$

3. Levantamiento maxmin: *Si $\succeq$ es un preorden total sobre X, definimos el **levantamiento maxmin**, denotado por $\sqsupseteq_{mxm}$, de la siguiente manera: para cualesquiera $A, B \in \mathcal{P}(X)$*

$$A \sqsupseteq_{mxm} B \iff (A \sqsupset_\Pi)B \vee [(A \simeq_P iB) \wedge (A \sqsupseteq_m B)]$$

C.C.Reconocimiento

Otro levantamiento importante es el levantamiento lexicográfico. Previo a su definición daremos algunas definiciones preliminares.

Definición 2.13 *Dado un conjunto A definimos $\mathcal{M}(A)$ como el conjunto formado por todos los multiconjuntos cuyos elementos están en A. Por ejemplo si, $A = \{a, b, c\}$, entonces $\{a, a, a, b, b\} \in \mathcal{M}(A)$.*

Además dados $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}(A)$ denotamos la unión de multiconjuntos por $\mu_1 \sqcup \mu_2$, el cual es el multiconjunto formado por los elementos que están o bien en μ_1, o bien en μ_2. Por ejemplo, $\{a, b, b\} \sqcup \{b, a\} = \{a, a, b, b, b\}$.

Definición 2.14 *Sea $\mathcal{D}$ un conjunto formado por vectores de dimensión finita cuyas entradas son números naturales. Definimos la función $\downarrow : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$, que ordena los vectores de manera decreciente, como sigue:*

$\downarrow (v_1, \cdots, v_n) = (v_{k_1}, \cdots, v_{k_n})$, *donde* $v_{k_i} \geq v_{k_{i+1}}$ *para* $i = 1, \cdots, n-1$ *y* $\{v_{k_1}, \cdots, v_{k_n}\} = \{v_1, \cdots, v_n\}$

(la última igualdad como multiconjunto).

Ejemplo 2.1 *Consideremos un vector $w = (2, 5, 6, 7, 9, 2, 5, 9)$. Así, $\downarrow (w) = (9, 9, 7, 6, 5, 5, 2, 2)$.*

Definición 2.15 *Sean $v = (v_1, \cdots, v_n)$ y $w = (w_1, \cdots, w_n)$ dos vectores de números naturales. Definimos el orden $\geq_l$ lexicográfico entre los vectores v y w, de la siguiente manera:*

$$v >_l w \Longleftrightarrow \exists i \geq n \text{ tal que } v_i > w_i \text{ y } \forall j > i \text{ se tiene } v_j = w_j.$$

es decir, en la primera componente i en que difieren se tiene $v_i > w_i$.

Ahora definimos $\geq_l$ por

$$v \geq_l w \text{ sii } v = w \text{ o bien } v >_l w.$$

Es muy fácil ver que $\geq_l$ es un preorden total y que $>_l$ es un orden lineal.

Ejemplos 2.2

- *Si $v = (3, 6, 5, 9, 1)$ y $w = (3, 5, 8, 1, 1)$, entonces $v >_l w$.*
- *Si $v = (8, 3, 2, 9, 8)$ y $w = (9, 1, 1, 1, 1)$, entonces $v >_l w$.*
- *Si $v = (3, 3, 3, 3, 1)$ y $w = (3, 3, 3, 3, 2)$, entonces $w >_l v$.*

Ahora bien, pasemos a definir el **Levantamiento Lexicográfico** $\sqsupseteq_l$ de la siguiente manera: Sea $\succeq$ un preorden total sobre un conjunto finito X. Para cualesquiera dos subconjuntos A y B de X le asociamos los vectores $v = \downarrow_A$ y $w = \downarrow_B$ que consisten de los elementos de A y B ordenados de manera decreciente, según el preorden $\succeq$, respectivamente. Así,

$$A \sqsupseteq_l B \Longleftrightarrow v \succeq_l w$$

Veamos el siguiente ejemplo.

www.bdigital.ula.ve

C.C.Reconocimiento

Ejemplo 2.5 *Supongamos que* $X = \{a, b, c, s, o, p, j, m, h, d, e, f, g, i, k\}$ *que el el preorden total* $\succeq$ *sobre* X *esta dado de la siguiente manera:*

$$\begin{array}{c} a \quad b \quad c \\ \hline e \quad f \quad g \\ \hline i \quad k \\ \hline j \quad m \quad h \quad d \\ \hline s \quad o \quad p \\ \hline\hline \succeq \end{array}$$

Supongamos que $A = \{m, h, p, i, c, g\}$ *y* $B = \{j, f, b\}$*. Entonces, relativo al preorden* $\succeq$*, los vectores* $v = \downarrow_A$ *y* $w = \downarrow_B$ *resultan de la siguiente manera,* $v = (c, g, i, m, h, p)$ *y* $w = (b, f, j)$ *respectivamente. Note que lexicográficamente se tiene que* $v \succ_l w$*, pues en la primera y segunda componente se cumple que* $b \simeq c$ *y* $f \simeq j$*, pero difieren en la tercera componente ya que* $i \succ j$*. Por lo tanto,* $A \sqsupset_l B$*.*

www.bdigital.ula.ve

C.C.Reconocimiento

www.bdigital.ula.ve

C.C.Reconocimiento

CAPÍTULO 3

Funciones de elección social y propiedades

Este capítulo esta dedicado al estudio de la teoría de elección social. Comenzaremos estudiando funciones de elección social para luego escudriñar sobre algunas propiedades conocidas dentro de la teoría de elección social. Ya que la Teoría de la elección social, que grosso modo estudia cómo seleccionar las mejores alternativas para un grupo de individuos cada uno con sus preferencias particulares [1, 22], se plantea el estudio de similitud entre esta teoría y la problemática de la fusión de bases de conocimiento en el marco de la lógica [23, 24]. Esta similitud aparece en los trabajos de Sebastien Konieczny [26]. Usando esta similitud, se introducen nuevas propiedades de racionalidad para las reglas de elección social. Estas propiedades se inspiran de propiedades análogas estudiadas en el marco de la lógica de la dinámica del conocimiento [25]. Se establece una correspondencia precisa entre propiedades que se refieren a la consistencia de perfiles y propiedades que generalizan las propiedades de Pareto. Otras de las propiedades nuevas conciernen caracterizaciones de reglas mayoritarias. Mostraremos algunos ejemplos de reglas de elección social que satisfacen las propiedades introducidas. Dichas reglas serán definidas a partir de distancias entre las diferentes alternativas.

www.bdigital.ula.ve

3.1 Introducción

La teoría de la elección social trata sobre la toma de decisiones colectivas a partir de las preferencias de los individuos que conforman una sociedad. Consideremos un conjunto de alternativas y una sociedad cuyos individuos tienen preferencias sobre dicho conjunto. Representemos estas preferencias por relaciones binarias, en nuestro caso de estudio preórdenes totales, sobre el conjunto de alternativas; tengamos presente que los individuos pueden tener opiniones distintas sobre las alternativas sociales. La teoría de la elección social estudia el proceso de agregación de las preferencias individuales en una preferencia social.
Las decisiones colectivas, entonces, se tomarán a partir de la relación binaria social que se ha obtenido al agregar las preferencias individuales. Más precisamente, dado un conjunto de alternativas sociales, una función de elección social asigna a un vector de relaciones de preferencia un resultado que consiste de un subconjunto de las alternativas sociales. No es

C.C.Reconocimiento

difícil darse cuenta de que, en general, existen infinidad de procesos de agregación; algunos parecen interesantes y otros lo parecen muy poco. Casos de funciones de elección social, casi triviales, se dan cuando el conjunto de alternativas consiste sólo en dos candidatos. Allí es natural considerar mayoría simple o mayoría absoluta. Los casos de nuestro interés se dan cuando existen tres o mas candidatos.

Comencemos a formalizar lo expuesto anteriormente. Sea $\mathrm{N} = \{1, 2, \cdots, n\}$ un conjunto de n de individuos o votantes que conforman una sociedad, y consideraremos el conjunto de alternativas o *candidatos* representado como $X = \{x, y, z, \cdots\}$. Es importante resaltar que el tamaño del conjunto de votantes esta fijo. En caso de considerar éste variable se indicará oportunamente.

Representaremos las preferencias de cada individuo mediante un preorden total $\succeq_i$. Teniendo las posibles preferencias de cada individuo, podemos representar las preferencias de todos los individuos mediante un vector, el cual llamaremos *perfil*. Es decir, un *perfil* u es un vector de la forma

$$u = (\succeq_1, \cdots, \succeq_n).$$

Gráficamente podemos ilustrar esta información de la siguiente manera. Supongamos que el conjunto de candidatos o alternativas es $X = \{x, y, z, w\}$ y supongamos que el conjunto de votantes o individuos es $\mathrm{N} = \{1, 2, 3\}$; es decir, tenemos cuatro candidatos o alternativas y tres votantes o individuos. Esto pudiera simular una situación de un jurado de concurso que establecen preferencias sobre los candidatos para optar a un cargo en determinada empresa. Es importante hacer notar que, en una situación como ésta no se esta considerando los parámetros o mecanismos que tiene el jurado para ordenar las alternativas. Un posible perfil de votos o preferencias puede representarse así.

$$u = \begin{pmatrix} & z & w \\ xz & x & z \\ w & w & y \\ y & y & x \\ -- & -- & -- \\ \succeq_1 & \succeq_2 & \succeq_3 \end{pmatrix}$$

En general, cada componente $\succeq_i$ es preorden total y representa la preferencia del individuo i. Así, cada componente de u almacena la información respecto al voto de algún individuo. Denotemos con la letra P al conjunto de todos los perfiles sobre X.

Consideraremos el caso que, dado un conjunto de alternativas X la elección se hace sobre un subconjunto de X, en este sentido definiremos una *agenda* $V \neq \emptyset$ como cualquier subconjunto de X no vacío, es decir, $V \subseteq X$. Al conjunto de todas las agendas lo denotaremos así: $\mathcal{P}^*(X) = \{V \subset X : V \neq \emptyset\}$.

Vale comentar que la naturaleza del conjunto de alternativas o candidatos puede ser muy extensa. En particular, las alternativas pudieran ser políticas de alguna empresa, proyectos, etc. Por tal razón usamos las palabras *alternativa* y *candidato*. Notemos que, si usamos solo la palabra candidatos se tiene a pensar en personas y en general el conjunto X no se refiere sólo a ello.

www.bdigital.ula.ve

C.C.Reconocimiento

Definir función de elección social es el próximo paso, pues tenemos los objetos necesarios para ello; es decir, una sociedad (N), un conjuntos de candidatos o alternativas (X) y la información de los votos almacenada en un perfil (u).

3.2 Función de Elección Social

La teoría de elección social tiene como objetivo fundamental el estudio de las reglas que asocian a un perfil de preferencias y a una agenda de candidatos los "mejores" candidatos de esa agenda; es decir, el estudio de los mecanismos que actúen sobre estos dos parámetros y nos den un resultado ganador. Esto fundamentalmente es el estudio de las funciones de elección social. Es importante entender el significado que tiene la afirmación imperativa de elegir un modo de acción social sobre la base de preferencias individuales. Reglas o funciones de elección social mayoritarias son estudiadas desde hace muchos años. Estas reglas mayoritarias pretenden respetar la opinión cuando una mayoría está de acuerdo en que una alternativa es mejor que otra. Las reglas como mayoría simple o mayoría absoluta son usadas frecuentemente.

En este capítulo estudiaremos funciones de elección social y particularmente las mayoritarias. Para esto comenzaremos definiendo formalmente el concepto de función de elección social.

Definición 3.1 *Se define función de elección social, como una función parcial:*

www.bdigital.ula.ve

$$f : \mathrm{P} \times \mathcal{P}^*(X) \longrightarrow \mathcal{P}^*(X),$$

tal que para todo $u \in \mathrm{P}$ *y todo* $V \in \mathcal{P}^*(X)$*, se tiene que* $f(u, V) \subset V$*, siempre que* $f(u, V)$ *exista.*

Es importante notar, que el subconjunto de candidatos alternativas del resultado de la elección sea no vacío, como también que las preferencias individuales están definidas sobre todo el conjunto de alternativas X.

En la época de la revolución francesa, es decir, en el Siglo XVIII, Marie-Jean-Antoine Nicolas de Caritat,un integrante de la realeza francesa, conocido como el Marqués de Condorcet fue uno de los pioneros en en el estudio de la elección social. Condorcet en 1785 Condorcet publicó el "*Ensayo sobre la aplicación del análisis a la probabilidad de las decisiones sometidas a la pluralidad de voces*". Allí, se expone la paradoja conocida ahora como *El Dilema de Condorcet* o *La Paradoja de Condorcet*, que muestra una situación de intransitividad en un proceso de elección.
En este orden de ideas presentamos la paradoja de Condorcet a través de una función que escoge a los *Ganadores de Condorcet*. Veamos su definición formal:

$$\begin{aligned} f(u, V) &= \{x \in V : \forall y \in V,\ N(x \succeq_i y) > N(y \succeq_i x)\} \\ &= \{x \in V : x \text{ es ganador de Condorcet en } V\}. \end{aligned}$$

$N(x \succeq_i y)$ cuenta el número de veces que x le gana o empata con y respecto a la preferencia del individuo i. Sin embargo, ésta no es una función de elección social como la definimos antes

C.C.Reconocimiento

pues se pudiera encontrar una situación donde la elección no pudiera darse. Consideremos el perfil:

$$u = \left(\begin{array}{ccc} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \\ \succeq_1 & \succeq_2 & \succeq_3 \end{array} \right)$$

Claramente, el número de veces que la alternativa x le gana a la alternativa y es 2, el número de veces que la alternativa z le gana a la alternativa x es 2 y el número de veces que la alternativa y le gana a la alternativa z también es 2. Esto crea una situación de indecibilidad y es conocida como la *paradoja del voto*. Es decir, $f(u, X)$ no esta definido.

3.2.1 La función de Borda

La regla de Borda o *Función de Borda* fue propuesta en 1770 por el físico y oficial de marina francés Jean Charles de Borda, de quien toma el nombre. Es una de las funciones de elección más popular dentro de la teoría de elección social. Esta función de elección social consiste esencialmente en establecer rangos de números naturales a los niveles con respecto a las preferencias individuales. De este modo, para cada preferencia individual, una alternativa tendrá un rango asignado dependiendo del nivel en que se encuentre, y en consecuencia, el rango global será la suma de los rangos individuales. Veamos su definición.

www.bdigital.ula.ve

Definición 3.2 *Sean $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$. Para cada elemento $\succeq_i$ de un perfil $u = (\succeq_1, \cdots, \succeq_m)$ existe una función $r_i(x)$ definida por:*

$$r_i(x) = n \Longleftrightarrow n \text{ es el mayor entero tal que } \exists x_o, x_1, \cdots, x_n \in X \text{ con } x_j \prec_i x_{j+1} \text{ y } x_n = x.$$

Así asignamos un rango global para cada elemento $x \in X$ de la siguiente manera:

$$r(x) = \sum_i r_i(x).$$

$r(x)$ es llamada el ingrediente principal de la Función Global de Borda:
Finalmente definimos la función de Borda así:

$$f^B(u, V) = \{x \in V : \ r(x) \geq r(y), \ \forall y \in V\}.$$

Vale resaltar que en el año 1785, tres años después de que Condorcet introdujera el concepto de *ganadores de Condorcet*, Charles Borda mostró la situación de la *paradoja del voto* para luego proponer la función que lleva su nombre.
A propósito de ilustrar la función de Borda mostramos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.1 *Sea $X = \{x, y, z, w\}$ un conjunto de candidatos o alternativas y supongamos que el conjunto* N *consiste de tres individuos o votantes. Consideremos el siguiente perfil de*

C.C.Reconocimiento

preferencias u, donde indicaremos el rango que tiene cada nivel:

$$u = \left(\begin{array}{ccc} x & & w \\ y & zy & y \\ z & w & z \\ w & x & x \\ -- & -- & -- \\ \succeq_1 & \succeq_2 & \succeq_3 \end{array} \right) \begin{array}{l} \longleftarrow 4 \\ \longleftarrow 3 \\ \longleftarrow 2 \\ \longleftarrow 1 \\ \\ \\ \end{array}$$

Veamos los rango de cada candidato:

- $r_1(x) = 4$, $r_2(x) = 1$ *y* $r_3(x) = 1$. *En consecuencia* $r(x) = 6$.
- $r_1(y) = 3$, $r_2(y) = 3$ *y* $r_3(y) = 3$. *En consecuencia* $r(y) = 9$.
- $r_1(z) = 2$, $r_2(z) = 3$ *y* $r_3(z) = 2$. *En consecuencia* $r(z) = 7$.
- $r_1(w) = 1$, $r_2(w) = 2$ *y* $r_3(w) = 4$. *En consecuencia* $r(w) = 7$.

Por lo tanto el resultado de la elección usando la función de Borda es la alternativa y*, es decir;* $f^B(u, X) = \{y\}$.

3.3 Propiedades generales y el teorema de Arrow

www.bdigital.ula.ve

En esta sección enunciaremos ciertas propiedades importantes, estudiadas en la teoría de elección social y el importante Teorema de Imposibilidad de Arrow. Estas propiedades pudieran decirse no sólo son *naturales*, sino racionales y deseables. Cinco de estas intervienen en el teorema de imposibilidad de Arrow. Primero comenzaremos por el planteamiento y análisis de diversas propiedades básicas y algunas relaciones entre ellas.

Dominio Estándar (DE) f *es una función total y* $|X| \geq 3$.
Esta propiedad simplemente dice que no existen restricciones sobre el tamaño de los perfiles y la cardinalidad del número de alternativas es mayor a tres (3), con la condición de que en ambos casos debe ser finito.

Dictador (D) *Existe un individuo* $i \in \mathrm{N}$ *tal que para cualquier perfil* u*, para todo* x*, toda agenda* V*, si* $x \in V$ *y* $x \succ_i y$ *entonces* $y \notin f(u, V)$.
Esencialmente esta propiedad plantea que existe individuo que impone su preferencia de manera excluyente; en otras palabras, las alternativas no preferidas por este individuo no pueden aparecer en el resultado de la elección; no obstante pudiera darse el caso de que una alternativa de sus preferidas tampoco apareciera.

No Dictador (¬D) *Para todo* $i \in \mathrm{N}$ *existe un perfil* u *y existe* V*, con* $x \in V$*, tales que, existe* $y \in V$*, con* $x \succ_i y$*, y* $y \in f(u, V)$.
La propiedad anterior es simplemente la negación de la propiedad del dictador; es decir, ausencia del dictador.

C.C.Reconocimiento

Independencia de Alternativas Irrelevantes (IAI) *f cumple (IAI) si para cualesquiera dos perfiles u, u' y $V \subset X$,*

$$\text{si } u_{|_V} = u'_{|_V} \text{ entonces } f(u, V) = f(u', V).$$

Básicamente, aquí se plantea lo siguiente: si se tienen dos perfiles donde en cada entrada el orden de al menos dos alternativas coinciden para ambos perfiles, entonces el resultado de la elección restringido a estas dos alternativas debe ser el mismo para ambos perfiles.

Esta condición no toma en cuenta el nivel de preferencia de las alternativas en las entradas de los dos perfiles; es decir, sólo considera las relaciones de preferencias individuales entre estos dos elementos de V sin importar la estructura total de las entradas de ambos perfiles. Además, es importante resaltar que esta propiedad es pieza fundamental en la demostración del teorema de Arrow. Así, esta propiedad pudiera resultar una de las propiedades más polémicas dentro del estudio de la teoría de la elección social.

Independencia de Caminos (IC) *Para cualesquiera V, S y T agendas y para cualquier perfil u se tiene que:*

$$si\ V = S \cup T \quad entonces\ f(u, V) = f\left(u, f(u, S) \cup f(u, T)\right).$$

www.bdigital.ula.ve

Independencia de caminos plantea lo siguiente: si se desea elegir sobre una agenda de candidatos y esta agenda pudiera separarla en dos subagendas de candidatos, entonces elegir sobre la agenda total sería igual que elegir primero sobre las subagendas, unir estos resultados y luego elegir sobre ellos.

Propiedad de Consistencia (α) *Para cualesquiera agendas $V, V' \subset X$ y un perfil u, tales que $\forall x$, $V' \subset V$, $x \in V'$ y $x \in f(u, V)$ se tiene $x \in f(u, V')$.*

Podemos ilustrar la propiedad de consistencia en pocas palabras: si una alternativa x resulta ganadora de un grupo de candidatos V, entonces el es el ganador con respecto a cualquier agenda más pequeña que lo contenga.

Explicaciones Transitivas (ET) *Para todo perfil u existe un preorden total $\succeq_u$ tal que para todo V se tiene $f(u, V) = \max(V, \succeq_u)$.*

Particularmente, pudiéramos decir que la propiedad de explicaciones transitivas es la más natural, o racional, dentro de las propiedades de la teoría de elección social. Básicamente, permite que el resultado de la elección pueda ser ordenado a través de un preorden total donde los ganadores de la elección son los maximales con respecto a ese preorden.

Condición Fuerte de Pareto (PF) *Para todo $u = (\succeq_1, \cdots, \succeq_n)$ y para toda agenda V, si $\forall\ i \in \mathrm{N}\ x \succeq_i y$, $\exists j \in \mathrm{N}\ x \succ_j y$, y $x \in V$, entonces $y \notin f(u, V)$.*

La condición de Pareto tiene varias versiones dentro de la literatura de la teoría de elección social. En este capítulo consideraremos una versión fuerte y una versión débil y ambas excluyentes; es decir, si unánimemente una alternativa es preferida a otra alternativa, entonces la no preferida no debe aparecer en el resultado de la elección.

C.C.Reconocimiento

Condición Débil de Pareto (PD) *Para todo u y y toda agenda V, si* $\forall i \in \mathrm{N}\ x \succ_i y$ *y* $x \in V$, *entonces* $y \notin f(u, V)$.

La condición débil de Pareto es similar a la condición fuerte de Pareto excepto que las relaciones de preferencias individuales entre las dos alternativas son estrictas, pero la conclusión es la misma, excluye a la alternativa no preferida unánimemente por todos los agentes o individuos del perfil.

Anonimato (A) *Dados dos perfiles* u, u' *tales que* u' *es cualquier permutación de* u, *se tiene que* $f(u, V) = f(u', V)$.
La propiedad de anonimato establece, como su nombre lo indica, que si en un perfil de preferencias individuales las entradas son permutadas, entonces el resultado de la elección no depende de ese reordenamiento, esto es, que el voto de un individuo pudiera estar en cualquier entrada y no afectar el resultado de la elección. Esta propiedad razonable tiene relaciones importantes con otras propiedades.

Dentro de la teoría de elección social, la paradoja de Arrow o teorema de imposibilidad de Arrow, es considerado uno de los aportes más importantes dentro de este campo. Este teorema fue planteado y demostrado por primera vez por el premio nobel Kenneth Arrow en su tesis doctoral titulada *Social choice and individual values*, y popularizado en su libro, que lleva el mismo nombre, en el año 1951. El artículo donde se publicó por primera vez este resultado lleva por nombre *A Difficulty in the Concept of Social Welfare*, en agosto de 1950 en *The Journal of Political Economy*. La motivación de este trabajo se debe esencialmente en el estudio de comportamientos de agentes económicos individuales, partiendo de que las relaciones de preferencia son racionales. Por racionalidad se entiende que las relaciones de preferencia sobre los agentes son preordenes totales. Este teorema establece que cuando se tienen tres o más alternativas y un cierto número de votantes no es posible conseguir una función de elección social que permita generalizar las preferencias individuales hacia una *preferencia social* de toda la comunidad, de manera tal, que se cumplan ciertos criterios racionales y valores democráticos. O en términos más sencillos: si una función de elección satisface cuatro propiedades, que parecieran razonables, entonces debe existir un dictador. Presentamos a continuación el Teorema de Imposibilidad de Arrow cuya demostración está en el Apéndice A.

Teorema 3.1 ***Teorema de Imposibilidad de Arrow****.*
No existe una función de elección social que satisfaga las siguientes propiedades:

1. *Dominio Estandar,*
2. *Pareto Fuerte,*
3. *Independencia de Alternativas Irrelevantes,*
4. *Explicaciones Transitivas,*
5. *No Dictador.*

El Teorema de Imposibilidad nos dice de manera equivalente que si una función de elección satisface las cuatro primeras condiciones, entonces dicha función posee un dictador.

www.bdigital.ula.ve

C.C.Reconocimiento

3.4 Algunas Propiedades Nuevas

En esta sección introducimos nuevas propiedades en el marco de la teoría de elección social las cuales serán analizadas en la sección siguiente.
Notemos que para las funciones elección social que hemos considerado el dominio es $\mathrm{P} \times \mathcal{P}^*(X)$, donde P consiste en los perfiles de preferencia de tamaño n. Esto corresponde a una población de n votantes o individuos fijo. Ahora vamos a considerar funciones en donde la población es de tamaño variable. Para ello sea $\mathbb{P}$ el conjunto de todos los preórdenes totales sobre el conjunto de alternativas X y $\mathbb{P}^n$ el conjunto de todos los perfiles de tamaño n.
Denotemos por $\mathcal{P} = \bigcup_{n\geq 1} \mathbb{P}^n$, decir; consideramos perfiles de cualquier tamaño. Ahora las funciones que consideraremos son del tipo $f : \mathcal{P} \times \mathcal{P}^*(X) \longrightarrow \mathcal{P}^*(X)$, tales que $f(u, V) \subseteq V$.

Estas nuevas funciones se seguirán llamando funciones de elección social por abuso de lenguaje.

Motivados por el trabajo de Pino-Konieczny [25] en el marco del estudio de la fusión de la información o fusión lógica presentamos una interpretación de algunas propiedades en la teoría de elección social.

Dados dos perfiles $u = (\succeq_1, \cdots, \succeq_n)$ y $u' = (\succeq'_1, \cdots, \succeq'_n)$ definimos la **concatenación** entre perfiles como

$$u \odot u' = (\succeq_1, \cdots, \succeq_n, \succeq'_1, \cdots, \succeq'_n)$$

www.bdigital.ula.ve

Consistencia Fuerte de Perfiles (CFP). *Una función de elección f satisface CFP sii para todos u_1, u_2 perfiles y toda agenda V se tiene que: Si $f(u_1, V) \cap f(u_2, V) \neq \emptyset$ entonces $f(u_1, V) \cap f(u_2, V) = f(u_1 \odot u_2, V)$.*

En palabras sencillas la propiedad CFP establece lo siguiente: si el conjunto de votantes está dividido en dos grupos con sus respectivas preferencias individuales y en cada grupo se hace una elección y en este resultado existen elementos en común, entonces estos elementos en común (ganadores), deberían ser los mismos resultantes de la elección hecha para el grupo en su totalidad.

Consistencia Débil de Perfiles (CDP). *Una función de elección f satisface CDP sii para todos u_1, u_2 perfiles y toda agenda V, si $f(u_1, V) \cap f(u_2, V) \neq \emptyset$ entonces $f(u_1, V) \cap f(u_2, V) \subseteq f(u_1 \odot u_2, V) \subseteq f(u_1, V) \cup f(u_2, V)$.*

Similar a la propiedad CFP, la propiedad CDP establece que el resultado de la intersección de ganadores de los dos grupos de individuos con sus preferencias individuales debe estar al menos contenido dentro del resultado de la elección sobre el grupo total y la del grupo total en la unión del resultado de los subgrupos.

Propiedad K-P (KP). *Dada una función $(u \longmapsto \succeq_u)$ que asocia a cada perfil u un preorden total $\succeq_u$, decimos que esta función satisface la propiedad KP, si:*

(i) Si $x \succeq_{u_1} y$ y $x \succeq_{u_2} y$, entonces $x \succeq_{u_1 \odot u_2} y$.

C.C.Reconocimiento

(ii) Si $x \succ_{u_1} y$ y $x \succeq_{u_2} y$, entonces $x \succ_{u_1 \odot u_2} y$.

(ii) Si $x \succeq_{u_1} y$ y $x \succ_{u_2} y$, entonces $x \succ_{u_1 \odot u_2} y$.

Esta propiedad establece que si se tienen dos grupos de votantes con sus votos (dos perfiles) y con respecto a las preferencias asociadas cada uno de ellos una alternativa x es preferida a otra y, entonces la alternativa x es preferida a una alternativa y, y deben preservar esta relación de preferencia en la relación asociada a la concatenación de estos dos perfiles. En particular, si una de las preferencias de uno de los perfiles es estricta, entonces en la concatenación se preserva esta relación estricta.

Propiedad Débil K-P (KP*). *Dada una función ($u \longmapsto \succeq_u$) que asocia a cada perfil u un preorden total $\succeq_u$, decimos que esta función satisface la propiedad KP*, si:*

(i) Si $x \succeq_{u_1} y$ y $x \succeq_{u_2} y$, entonces $x \succeq_{u_1 \odot u_2} y$.

(ii) Si $x \succ_{u_1} y$ y $x \succ_{u_2} y$, entonces $x \succ_{u_1 \odot u_2} y$.

Esta propiedad es similar a la anterior, excepto que la condición (ii) es más débil, pues requiere en las hipótesis que la relación sea estricta respecto a ambos perfiles.

Las propiedades CFP, CDP, KP KP* aparece por primera vez en los trabajos de S.Konieczny y R. Pino Pérez, desde el punto de vista de la fusión lógica, ver [23], [24], [25], y [26]

www.bdigital.ula.ve

Propiedad de la Identidad (PI). *Una función ($u \longmapsto \succeq_u$), satisface PI sii para un perfil $u = (\succeq_1)$ (constituido por un solo elemento) se tiene $\succeq_u = \succeq_1$.*
Aunque pareciera trivial, la propiedad PI es indispensable a la hora de obtener algunos resultados; básicamente dice que si hay un sólo votante, entonces el resultado de la elección corresponde a la opinión de ese votante.

Propiedad de Pareto Indiferencia (PPI). Una función de elección social f satisface la Propiedad de Pareto Indiferencia si se cumple la siguiente condición:

$$\forall i \in \mathrm{N}, \;\; x \sim_i y \Longrightarrow f(u, \{x, y\}) = \{x, y\}.$$

3.5 Análisis de las nuevas propiedades

En esta sección estudiaremos algunas interrelaciones entre las propiedades antes mencionadas así como algunas consecuencias de ellas.
La siguiente proposición forma parte del folklore de la Teoría de Elección Social, y esencialmente caracteriza las funciones de elección social que satisfacen la propiedad de explicaciones transitivas.

C.C.Reconocimiento

Proposición 3.1 *Suponga que una función de elección f tiene Explicaciones Transitivas y es total. Para cada perfil u definimos $\succeq_u$ de la siguiente manera:*

$$x \succeq_u y \Longleftrightarrow x \in f(u, \{x, y\}).$$

entonces $\succeq_u$ es el único preorden que satisface $f(u, V) = \max(V, \succeq_u)$.

Demostración. Veamos que es un preorden total. Para esto verifiquemos la transitividad; si $x \succeq_u y$ y $y \succeq_u z$ entonces $x \succeq_u z$. En efecto, $x \succeq_u y$ si y sólo si $x \in f(u, \{x, y\})$ y $y \succeq_u z$ si y sólo si $y \in f(u, \{y, z\})$. Como f tiene Explicaciones Transitivas, para cada u existe un preorden total $\succeq'_u$ tal que para cualquier agenda $V \in \mathcal{P}(X)$ se tiene que

$$f(u, V) = \max(V,) \succeq'_u \tag{3.1}$$

Como asumimos que $x \succeq_u y$ y que $y \succeq_u z$ entonces por definición se tiene que $x \in f(u, \{x, y\})$ y $y \in f(u, \{y, z\})$; es decir, usando 3.1, que $x \succeq'_u y$ y $y \succeq'_u z$. Así, por transitividad de $\succeq'_u$ se tiene que $x \succeq'_u z$. De esto último y de 3.1 tenemos que $x \in f(u, \{x, z\})$; es decir, $x \succeq_u z$, por definición.

Veamos que la relación es total. En efecto, como f satisface es total entonces $f(u, \{x, y\}) \neq \emptyset$. Luego siempre sucede que $x \in f(u, \{x, y\})$ ó $y \in f(u, \{x, y\})$, es decir, $x \succeq_u y$ ó $y \succeq_u x$. Veamos ahora que $f(u, V) = \max(V, \succeq_u)$ y que $\succeq_u$ es el único preorden con esta propiedad. Para todo preorden total $\succeq'_u$ tal que $f(u, V) = \max(V, \succeq'_u)$, mostraremos que $\succeq'_u = \succeq_u$. Veamos las dos contenciones:

www.bdigital.ula.ve

a.- Como $x \succeq_u y$, $x \in f(u, \{x, y\})$ esto implica que $x \in \max(\{x, y\}, \succeq'_u)$, es decir $x \succeq'_u y$.

b.- Sean $x, y \in V$. Supongamos $x \succeq'_u y$. Queremos ver $x \succeq_u y$. Como $x \succeq'_u y$ se tiene $x \in f(u, \{x, y\})$ y esto implica, por la definición de $\succeq_u$, que $x \succeq_u y$.

∎

La proposición precedente nos permite decir que en presencia de explicaciones transitivas, hay una única función $u \longmapsto \succeq_u$ que determina a f en el sentido de la siguiente ecuación:

$$f(u, V) = \max(V, \succeq_u)$$

En este caso simplemente diremos que $u \longmapsto \succeq_u$ es la función que determina a f.

Teorema 3.2 *Sea f una función de elección que satisface Explicaciones Transitivas y sea $u \longmapsto \succeq_u$ la función que determina a f. La función $u \longmapsto \succeq_u$ satisface KP, si, y sólo si, f satisface Consistencia Fuerte de Perfiles.*

Demostración.
($\Longrightarrow$) Supongamos que f cumple con Explicaciones Transitivas y supongamos además que $u \longmapsto \succeq_u$ satisface las propiedades KP.
Queremos ver que f satisface la propiedad de Consistencia Fuerte de Perfiles. Para esto, sean u_1, u_2 perfiles y una agenda $V \subset X$, tales que $f(u_1, V) \cap f(u_2, V) \neq \emptyset$.
Queremos ver que $f(u_1 \odot u_2, V) = f(u_1, V) \cap f(u_2, V)$. Demostremos la doble contención:

C.C.Reconocimiento

(a) Veamos que $f(u_1 \odot u_2, V) \subseteq f(u_1, V) \cap f(u_2, V)$. Sea $x \in f(u_1 \odot u_2, V)$, es decir

$$x \succeq_{u_1 \odot u_2} y, \qquad \forall y \in V \tag{3.2}$$

Sabemos que $\exists x_0 \in f(u_1, V) \cap f(u_2, V)$. Razonemos por el absurdo. Supongamos que $x \notin f(u_1, V) \cap f(u_2, V)$, es decir $x \notin f(u_1, V)$ ó $x \notin f(u_2, V)$. Hay dos casos:

(a.1) Supongamos que $x \notin f(u_1, V)$. Como $\succeq_{u_1}$ y $\succeq_{u_2}$ son totales y x_0 es maximal con respecto a ambos, necesariamente

$$x_0 \succeq_{u_1} x \text{ y } x_0 \succeq_{u_2} x$$

pero además $x_0 \succ_{u_1} x$. En efecto basta ver que $x \not\succeq_{u_1} x_0$. De lo contrario, $\forall y \in V$ $x \succeq_{u_1} x_0 \succeq_{u_1} y$. Esto implica que $x \in f(u_1, V)$, lo que es una contradicción.
Así $x_0 \succ_{u_1} x$ y $x_0 \succeq_{u_2} x$, de donde se tiene, usando KP (ii), que $x_0 \succ_{u_1 \odot u_2} x$, lo que contradice el hecho de que ocurre (3.2).

(a.2) El caso en que $x \notin f(u_2, V)$ es análogo. Usando KP (iii) en vez de KP ii.

(b) Veamos ahora que $f(u_1 \odot u_2, V) \supseteq f(u_1, V) \cap f_{u_2}(V)$. Sea $x \in f(u_1, V) \cap f(u_2, V)$, es decir

$$x \succeq_{u_1} y \text{ y } x \succeq_{u_2} y \qquad \forall y \in V.$$

Luego por KP (i), se tiene $x \succeq_{u_1 \odot u_2} y \quad \forall y \in V$. Así $x \in f(u_1 \odot u_2, V)$.

www.bdigital.ula.ve

($\Longleftarrow$) Sean u_1, u_2 dos perfiles cualesquiera. Debemos ver que se cumplen:

(i) Si $x \succeq_{u_1} y$ y $x \succeq_{u_2} y$, entonces $x \succeq_{u_1 \odot u_2} y$ y,

(ii) Si $x \succ_{u_1} y$ y $x \succeq_{u_2} y$, entonces $x \succ_{u_1 \odot u_2} y$.

(iii) Si $x \succeq_{u_1} y$ y $x \succeq_{u_2} y$, entonces $x \succ_{u_1 \odot u_2} y$.

Sabemos que f cumple con CFP, es decir

$$\forall u_1, u_2, \quad \forall V \subseteq X, \quad [f(u_1, V) \cap f(u_2, V) \neq \emptyset \Longrightarrow f(u_1, V) \cap f(u_2, V) = f(u_1 \odot u_2, V)],$$

Además sabemos que f satisface ET y usando 4.1, podemos decir que $x \in f(u, \{x, y\}) \Longleftrightarrow x \succeq_u y$. Supongamos $x \succeq_{u_1} y$ y $x \succeq_{u_2} y$. Entonces $x \in f(u_1, \{x, y\})$ y $x \in f(u_2, \{x, y\})$. Por lo tanto $x \in f(u_1, \{x, y\}) \cap f(u_2, \{x, y\})$. Luego por CFP, $x \in f(u_1 \odot u_2, \{x, y\})$, de donde se tiene $x \succeq_{u_1 \odot u_2} y$. Esto prueba (i).
Ahora supongamos $x \succ_{u_1} y$ y $x \succeq_{u_2} y$. Entonces $x \in f(u_1, \{x, y\})$, $y \notin f(u_1, \{x, y\})$ y $x \in f(u_2, \{x, y\})$. Así, $\{x\} = f(u_1, \{x, y\}) \cap f(u_2, \{x, y\})$. Usando CFP se tiene que $f(u_1 \odot u_2, \{x, y\}) = \{x\}$, es decir; $x \succ_{u_1 \odot u_2} y$. Esto prueba (ii).
La prueba de (iii) es similar.
Así concluimos la demostración del teorema. ∎

Teorema 3.3 *Sea f una función de elección que satisface Explicaciones Transitivas y sea $u \longmapsto \succeq_u$ la función que determina a f. La función $u \longmapsto \succeq_u$ satisface KP*, si, y sólo si, f satisface Consistencia Débil de Perfiles (CDP).*

C.C.Reconocimiento

Demostración.
($\Longrightarrow$) Supongamos que f satisface ET y que $u \longmapsto \succeq_u$ satisface KP*, es decir

(i) Si $x \succeq_{u_1} y$ y $x \succeq_{u_2} y$, entonces $x \succeq_{u_1 \odot u_2} y$.

(ii) Si $x \succ_{u_1} y$ y $x \succ_{u_2} y$, entonces $x \succ_{u_1 \odot u_2} y$.

Debemos ver que si $f(u_1, V) \cap f(u_2, V) \neq \emptyset$ entonces

$$f(u_1, V) \cap f(u_2, V) \subseteq f_{u_1 \odot u_2}(V) \subseteq f(u_1, V) \cup f(u_2, V)$$

Veamos que $f(u_1, V) \cap f(u_2, V) \subseteq f_{u_1 \odot u_2}(V)$. Sea $x \in f(u_1, V) \cap f(u_2, V)$, luego $x \in f(u_1, V)$ y $x \in f(u_2, V)$, esto quiere decir, que para todo $y \in V$, se tiene que $x \succeq_{u_1} y$ y $x \succeq_{u_2} y$. Luego por KP*(i), se tiene que $x \succeq_{u_1 \odot u_2} y$ para todo $y \in V$. Así $x \in f(u_1 \odot u_2, V)$.
Veamos que $f(u_1 \odot u_2, V) \subseteq f(u_1, V) \cup f(u_2, V)$. Sea $x \in f(u_1 \odot u_2, V)$, luego $x \succeq_{u_1 \odot u_2} y$, $\forall y \in V$. Como $f(u_1, V) \cap f(u_2, V) \neq \emptyset$, se tiene que existe $x_0 \in V$ tal que, para todo $y \in V$, $x_0 \succeq_{u_1} y$ y $x_0 \succeq_{u_2} y$.
Supongamos que $x \notin f(u_1, V) \cup f(u_2, V)$, es decir, $x \notin f(u_1, V)$ y $x \notin f(u_2, V)$, así en particular, x_0 satisface que $x_0 \succ_{u_1} x$ y $x_0 \succ_{u_2} x$. Luego por KP*(ii) $x_0 \succ_{u_1 \odot u_2} x$, lo que contradice el hecho de que $x \in f(u_1 \odot u_2, V)$.
($\Longleftarrow$) Supongamos que la función, $u \longmapsto \succeq_u$, tiene satisface Consistencia Débil de Perfiles.
Sean u_1, u_2 dos perfiles cualesquiera y sea $V = \{x, y\}$. Debemos ver que

(i) Si $x \succeq_{u_1} y$ y $x \succeq_{u_2} y$, entonces $x \succeq_{u_1 \odot u_2} y$.

(ii) Si $x \succ_{u_1} y$ y $x \succ_{u_2} y$, entonces $x \succ_{u_1 \odot u_2} y$.

Como f tiene ET entonces, y en virtud de la Proposición 4.1, podemos decir que

$$x \in f(u, \{x, y\}) \Longleftrightarrow x \succeq_u y.$$

Así, como $x \succeq_{u_1} y$ y $x \succeq_{u_2} y$, se tiene que $x \in f(u_1, \{x, y\})$ y $x \in f(u_2, \{x, y\})$. Luego $x \in f(u_1, \{x, y\}) \cap f(u_2, \{x, y\})$. Por lo tanto, por CDP, se tiene $x \in f(u_1 \odot u_2, \{x, y\})$, es decir $x \succeq_{u_1 \odot u_2}$.

Como $x \succ_{u_1} y$ y $x \succ_{u_2} y$ se tiene que $\{x\} = f(u_1, \{x, y\})$ y $\{x\} = f(u_2, \{x, y\})$, de donde, $\{x\} = f(u_1, \{x, y\}) \cap f(u_2, \{x, y\})$. Además $\{x\} = f(u_1, \{x, y\}) \cup f(u_2, \{x, y\})$. Así, usando CDP podemos decir que

$$\{x\} = f(u_1, \{x, y\}) \cap f(u_2, \{x, y\}) \subseteq f(u_1 \odot u_2, \{x, y\}) \subseteq f(u_1, \{x, y\}) \cup f(u_2, \{x, y\}) = \{x\}$$

de donde tenemos que $f(u_1 \odot u_2, \{x, y\}) = \{x\}$, es decir, $x \succ_{u_1 \odot u_2} y$.

∎

Las siguientes dos proposiciones tienen una prueba inmediata:

Proposición 3.2 *Si una función f satisface Consistencia Fuerte de Perfiles entonces f satisface la propiedad de Consistencia Débil de Perfiles.*

Proposición 3.3 *Si una función $(u \longmapsto \succeq_u)$ que asocia a cada perfil u un preorden total $\succeq_u$, satisface KP entonces f satisface la propiedad de KP*.*

www.bdigital.ula.ve

C.C.Reconocimiento

Lema 3.1 *Sea $u' \longmapsto \succeq_{u'}$ una función que a cada perfil u' asocia un preorden total $\succeq_{u'}$. Supongamos que para cualesquiera u_1, u_2 perfiles, esta función satisface la propiedad (i) de KP, es decir,*

$$\text{si } x \succeq_{u_1} y \text{ y } x \succeq_{u_2} y, \text{ entonces } x \succeq_{u_1 \odot u_2} y, \tag{1}$$

y además satisface la Propiedad de la Identidad (PI)). Sea $u = (\succeq_1, \cdots, \succeq_n)$ tal que $x \succeq_i y$ para $i = 1, \cdots, n$. Entonces $x \succeq_u y$.

Demostración. Aplicamos inducción sobre n. Para $n = 1$ es inmediato en virtud de PI. Supongamos que es cierto para $n = k$, probemos que es cierto para $n = k + 1$.
En efecto. Sea $u = (\succeq_1, \cdots, \succeq_k, \succeq_{k+1})$. Consideremos $u_1 = (\succeq_1, \cdots, \succeq_k)$ y $u_2 = (\succeq_{k+1})$. Es claro que $u = u_1 \odot u_2$. Como para $n = k$ y $n = 1$ se satisface el resultado, se tiene que $x \succeq_{u_1} y$ y $x \succeq_{u_2} y$. Así por (1) se tiene que $x \succeq_{u_1 \odot u_2} y$, es decir, $x \succeq_u y$. ∎
La proposición siguiente formaliza una afirmación hecha en los trabajos de S. Konieczny y R. Pino Pérez [23]. Ellos afirmas que la propiedad KP es una generalización de Pareto.

Proposición 3.4 *Si una función $u' \longmapsto \succeq_{u'}$ satisface la Propiedad KP y además $\succeq_{u'}$ satisface la Propiedad de la Identidad, entonces la función de elección definida por $\succeq_{u'}$ satisface la Propiedad de Pareto Fuerte.*

Demostración. Sean $\mathrm{N} = \{1, 2, \cdots, n\}$, V una agenda, $u = (\succeq_1, \cdots, \succeq_n)$ un perfil y $\succeq_u$ el preorden total asociado a u. Supongamos las hipótesis de Pareto Fuerte, es decir,

a) $\forall\, i \in \mathrm{N}$, $x \succeq_i y$,

b) $\exists j \in \mathrm{N}$ tal que $x \succ_j y$,

c) $x \in V$.

Consideremos $u_1 = (\succeq_1, \cdots, \succeq_{j-1})$, $u_2 = (\succ_j)$, y $u_3 = (\succeq_{j+1}, \cdots, \succeq_n)$. Es claro que $u = u_1 \odot u_2 \odot u_3$.

Sea f la función determinada por$u \longmapsto \succeq_u$, es decir, $f(u, V) = \max(V, \succeq_u)$. Por el Lema 3.1, la hipótesis (a) y por definición de u_1, se tiene que $x \succeq_{u_1} y$. Pero además en virtud de PI y por definición de u_2 se tiene que $x \succ_{u_2} y$.
Luego por la Propiedad KP(ii) se tiene que $x \succ_{u_1 \odot u_2} y$. Por otra parte, de nuevo por Lema 3.1, la hipótesis (a) y por definición de u_3 se tiene que $x \succeq_{u_3} y$, así de nuevo en virtud de la Propiedad KP(ii) se tiene que $x \succ_{u_1 \odot u_2 \odot u_3} y$, es decir, $x \succ_u y$. Luego $y \notin f(u, V)$.

∎

Más adelante veremos que la condición PI es necesaria para obtener la obtener la proposición precedente.
Usando una técnica de prueba similar a la del resultado precedente se puede probar lo siguiente:

Proposición 3.5 *Si una función $u' \longmapsto \succeq_{u'}$ satisface la Propiedad KP* y además $\succeq_{u'}$ satisface la Propiedad de la Identidad, entonces la función de elección determinada por $u' \longmapsto \succeq_{u'}$ satisface la Propiedad de Pareto Débil.*

www.bdigital.ula.ve

C.C.Reconocimiento

Se pudiera, a primera vista, pensar que un resultado inmediato sería en siguiente hecho: *Si una función de elección f satisface la propiedad de Pareto Fuerte y Explicaciones Transitivas, entonces f satisface la Propiedad de la Identidad.* Sin embargo, tal afirmación no es cierta. Para ver esto consideremos lo siguiente. Sea $\geq^*$ un orden lineal sobre X. Definamos una función que a un preorden total $\succeq$ le asocia un orden lineal $\succeq^l$, $(\succeq \longmapsto \succeq^l)$, que cumple lo siguiente:

- Si $x \succeq y$, entonces $x \succ^l y$.
- Si $x \sim y$ con $x \neq y$, entonces $x \succ^l y$ si, y sólo si $x >^* y$.

Ahora definimos la función de elección social f determinada por $u \longmapsto \succeq_u$ de manera tal que $\succeq_u = (\succeq_1)^l$. En esta construcción se verifica que f determinada por $u \longmapsto \succeq_u$ cumple ET, PF y D pero claramente no cumple PI.

Proposición 3.6 *Si una función de elección social satisface PD, ET y PPI, entonces f satisface PI.*

Demostración. Sea $u = (\succeq_1)$ un perfil de un sólo elemento. Como f satisface ET, consideremos la función que determina a f, $u \longmapsto \succeq_u$; es decir, $f(u, V) = \max(V, \succeq_u)$. Queremos ver que $f(u, V) = \max(V, \succeq_1)$; es decir, $x \succeq_1 y \iff x \succeq_u y$. Veamos la doble contención. Supongamos que $x \succeq_1 y$, es decir $x \succ_1 y$ ó $x \sim_1 y$. Si $x \succ_1 y$ entonces por PD se tiene que $y \notin f(u, V)$; es decir, $y \notin \max(V, \succeq_u)$ lo que implica que $x \succ_u y$. Ahora bien, si $x \sim_1 y$, entonces por PPI se tiene que $\{x, y\} = \max(\{x, y\}, \succeq_u)$, lo que implica que $x \sim_u y$. Veamos la otra contención. Supongamos que $x \succeq_u y$ y supongamos que $x \not\succeq_1 y$, es decir que $y \succ_1 x$. Como f satisface PD entonces $x \notin \max(V, \succeq_u)$, lo que contradice el hecho de que $x \succeq_u y$. ■

www.bdigital.ula.ve

3.6 Funciones de Elección que cumplen las nuevas propiedades

Definiremos funciones de elección a partir de una distancia entre las alternativas y analizaremos cuales de las nuevas propiedades son satisfechas. Es bueno notar que estas funciones son estudiadas desde otro punto de vista como lo es la fusión lógica, ver [23, 24, 25, 26].
Sea $d : X^2 \longrightarrow \mathrm{N}$ una distancia. Esta distancia se extiende a una función $d^* : X \times \mathcal{P}^*(X) \longrightarrow \mathrm{N}$ de la siguiente manera:

$$d^*(x, A) = \min\{d(x, y) : \ y \in A\}.$$

Recordemos que X es finito y en consecuencia d^* esta bien definida. $\mathcal{V}(\mathcal{P}(X))$ denota el conjunto de vectores finitos de $\mathcal{P}(X)$.

Definición 3.3 *Definimos la distancia-Σ entre un elemento de X y un un vector finito de $\mathcal{P}(X)$ de la siguiente manera:*

$$\begin{gathered} d^{\Sigma} : X \times \mathcal{V}(\mathcal{P}(X)) \longrightarrow \mathbb{N} \\ d^{\Sigma}(x, \mu) = \sum_{A \in \mu} d^*(x, A) \end{gathered}$$

C.C.Reconocimiento

Dado un perfil $u = (\succeq_1, \cdots, \succeq_k)$ se le puede asociar un elemento $\rho_u \in \mathcal{V}(\mathcal{P}(X))$, llamado el conjunto de preferencias principales, de la siguiente manera:

$$\rho_u = (\{\max(\succeq_1)\}, \cdots, \{\max(\succeq_k)\}) \tag{3.3}$$

Se le puede asociar a un elemento $\rho \in \mathcal{V}(\mathcal{P}(X))$ un perfil u_ρ, como describimos a continuación:

Observación 3.1 *d^* permite construir preferencias de la siguiente manera: Sea $A \subseteq \mathcal{P}(X)$, se construye $\succeq_A$ un preorden total de la manera siguiente:*

$$x \succeq_A y \Longleftrightarrow d^*(x, A) \leq d^*(y, A)$$

Observación 3.2 *Dado un vector de $\mathcal{P}(X)$ $\rho = (A_1, \cdots, A_k)$, de la observación anterior podemos construir un perfil $u_\rho = (\succeq_{A_1}, \cdots, \succeq_{A_k})$.*

Definición 3.4 *Un perfil u es $d-$consistente si $u = u_{\rho_u}$, es decir, si $u = (\succeq_1, \succeq_2, \cdots, \succeq_n)$ entonces $u = u_{\rho_u}$, donde $\rho_u = (\max(\succeq_1), \cdots, \max(\succeq_n))$.*

Ejemplo 3.2 *Sea $X = \{0, 1\}^n$, es decir, los elementos de X son vectores de ceros y unos de tamaño n. Consideremos la distancia de Hamming.*
Sean $X = \{(0,0,1), (0,1,0), (1,0,0), (1,1,0), (1,0,1), (0,0,0), (1,1,1), (0,1,1)\}$, $A_1 = \{(1,1,0)\}$ y $A_2 = \{(1,1,0)(0,0,0)\}$. Consideremos los perfiles u y u', de tamaño dos, de la siguiente manera:

www.bdigital.ula.ve

$$u = \left(\begin{array}{cc} (1,1,0) & (1,1,0)(0,0,0) \\ (0,1,0)(1,0,0)(1,1,1) & (0,0,1)(0,1,0)(1,1,1)(1,0,0) \\ (1,0,1)(0,0,0)(0,1,1) & (0,1,1)(1,0,1) \\ (0,0,1) & \\ \uparrow & \uparrow \\ \succeq_{A_1} & \succeq_{A_2} \end{array} \right)$$

$$u' = \left(\begin{array}{cc} (1,1,0) & (1,1,0)(0,0,0) \\ (0,1,0)(1,0,0)(1,1,1) & (1,0,0)(1,0,1)(0,1,1) \\ (1,0,1)(0,0,0)(0,1,1) & (0,1,0)(1,1,1) \\ (0,0,1) & (0,0,1) \\ \uparrow & \uparrow \\ \succeq'_{A_1} & \succeq'_{A_2} \end{array} \right)$$

El perfil u es d-consistente, mientras que el perfil u' no lo es. En efecto, para $\succeq'_{A_2}$ los vectores $(0,0,0)$, $(1,1,0)$ aparece en el tercer nivel y en el nivel dos aparece el vector $(1,0,1)$ que difiere en dos coordenadas de los de los vectores $(0,0,0)$, $(1,1,0)$. es decir no están a distancia minimal.

Ahora se define $\succeq_u^\Sigma$ asociado a un perfil d-consistente u:

$$x \succeq_u^\Sigma y \Longleftrightarrow d^\Sigma(x, \rho_u) \leq d^\Sigma(y, \rho_u).$$

Observación 3.3 *Es fácil ver que $\succeq_u^\Sigma$ es un preorden total, pues está definido por una función de rango en los números naturales.*

C.C.Reconocimiento

3.7 La función f^{Σ}

Definición 3.5 *Sean* $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$. *Para cada elemento* $\succeq_i$ *de un perfil* $u = (\succeq_1, \cdots, \succeq_m)$ *definimos una función de rango* $r_u^i(x) : X \longrightarrow \mathrm{R}^+$ *que satisface lo siguiente:*

$$r_u^i(x) \geq r_u^i(y) \Longleftrightarrow x \succeq_i y$$

Dado un perfil u*, asignamos un rango global para cada elemento* $x \in X$ *de la siguiente manera:*

$$r_u(x) = \sum_i r_u^i(x).$$

Ahora bien, dado un perfil u *podemos definir* $u \longmapsto \succeq_u^{\Sigma}$ *tal que*

$$x \succeq_u^{\Sigma} y \Longleftrightarrow r_u(x) \geq r_u(y).$$

Ahora podemos definir la función f_u^{Σ} *como la función de elección asociada a* $\succeq_u^{\Sigma}$*, es decir,*

$$f^{\Sigma}(u, V) = \max(V, \succeq_u^{\Sigma}).$$

Veamos el siguiente ejemplo.

www.bdigital.ula.ve

Ejemplo 3.3 *Sea* $X = \{x_0, \cdots, x_{15}\}$ *un conjunto de dieciséis alternativas y* $\mathrm{N} = \{1, 2, 3, 4\}$ *cuatro votantes.*
Codifiquemos las alternativas de la siguiente manera:

$$\begin{array}{llll} x_0 = (0,0,0,0) & x_1 = (0,0,0,1) & x_2 = (0,0,1,0) & x_3 = (0,0,1,1) \\ x_4 = (0,1,0,0) & x_5 = (0,1,0,1) & x_6 = (0,1,1,0) & x_7 = (0,1,1,1) \\ x_8 = (1,0,0,0) & x_9 = (1,0,0,1) & x_{10} = (1,0,1,0) & x_{11} = (1,0,1,1) \\ x_{12} = (1,1,0,0) & x_{13} = (1,1,0,1) & x_{14} = (1,1,1,0) & x_{15} = (1,1,1,1) \end{array}$$

Sea $u = (\succeq_1, \succeq_2, \succeq_3, \succeq_4)$ *un perfil d-consistente, tal que el vector de preferencias principales asociado* $\rho_u = (\max(\succeq_1), \cdots, \max(\succeq_4))$ *viene dado de la siguiente manera:*

$$\begin{array}{ll} \max(\succeq_1) = \{(1,1,1,1),(1,1,1,0)\} & \max(\succeq_2) = \{(1,1,1,1),(1,1,1,0)\} \\ \max(\succeq_3) = \{(0,0,0,0)\} & \max(\succeq_4) = \{(0,1,1,0),(1,1,1,0)\} \end{array}$$

Sea $V = X \setminus \{(0,1,1,0),(1,0,1,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0)\}$ *y para cada* $i = 1, \cdots, 4$*, sea* $A_i = \max(\succeq_i)$. *Veremos que* $f_u^{\Sigma}(V) = \{(1,1,1,1)\}$. *Para ello usaremos la siguiente tabla, donde en la primera columna tenemos las alternativas, en las entradas de las siguientes cuatro columnas tenemos la distancia de cada alternativa a cada* A_i *y en la última, la distancia al multiconjunto correspondiente (la suma de las cuatro entradas precedentes de la fila en cuestión). El resultado consiste en el conjunto de alternativas que minimizan la última columna.*

C.C.Reconocimiento

	A_1	A_2	A_3	A_4	d^{Σ}
(0,0,0,0)	*3*	*3*	*0*	*2*	*8*
(0,0,0,1)	*3*	*3*	*1*	*3*	*10*
(0,0,1,0)	*2*	*2*	*1*	*1*	*6*
(0,0,1,1)	*2*	*2*	*2*	*2*	*8*
(0,1,0,0)	*2*	*2*	*1*	*1*	*6*
(0,1,0,1)	*2*	*2*	*2*	*2*	*8*
(0,1,1,1)	*1*	*1*	*3*	*1*	*6*
(1,0,0,0)	*2*	*2*	*1*	*2*	*7*
(1,0,0,1)	*2*	*2*	*2*	*3*	*9*
(1,0,1,1)	*1*	*1*	*3*	*2*	*7*
(1,1,0,1)	*1*	*1*	*3*	*2*	*7*
(1,1,1,1)	*0*	*0*	*4*	*1*	***5***

Así, $f_u^{\Sigma}(V) = \{(1,1,1,1)\}$.

Ahora nuestra meta es ver cuales propiedades satisface f^{Σ} restringida a los perfiles $d-$consistentes.

3.7.1 Análisis de la función f^{Σ} restringida a los perfiles $d-$consistentes.

www.bdigital.ula.ve

Es importante notar que esta función cumple con Explicaciones Transitivas, pues f^{Σ} está definida a partir de $\succeq_u^{\Sigma}$.
Veamos a continuación, mediante los siguientes resultados, las ventajas que nos produce trabajar restringiendo esta función a los perfiles $d-$consistentes.

Proposición 3.7 *La función* $u \longmapsto \succeq_u^{\Sigma}$*, satisface la propiedad KP.*

Demostración. A fin de hacer la prueba más amena la demostración consideremos, sin perdida de generalidad, $u_1 = (\succeq_1, \cdots, \succeq_n)$ y $u_2 = (\succeq_{n+1}, \cdots, \succeq_m)$ dos perfiles. Ahora bien, el perfil concatenado $u_1 \odot u_2$ tiene tamaño m y lo podemos expresar así: $u_1 \odot u_2 = (\succeq_1, \cdots, \succeq_n, \succeq_{n+1}, \succeq_m)$.

Recordemos que

$$x \succeq_u^{\Sigma} y \Longleftrightarrow r_u(x) \geq r_u(y)$$

donde $r_u(x) = \displaystyle\sum_i r_u^i(x)$.

En primer lugar veamos que si $x \succeq_{u_1}^{\Sigma} y$ y $x \succeq_{u_2}^{\Sigma} y$ entonces $x \succeq_{u_1 \odot u_2}^{\Sigma} y$. Esto es equivalente a

$$[r_{u_1}(x) \geq r_{u_1}(y)] \wedge [r_{u_2}(x) \geq r_{u_2}(y)] \Longrightarrow r_{u_1 \odot u_2}(x) \geq r_{u_1 \odot u_2}(y) \tag{3.4}$$

y esto último es una consecuencia de la siguiente afirmación.

C.C.Reconocimiento

Afirmación: $r_{u_1 \odot u_2}(x) = r_{u_1}(x) + r_{u_2}(x)$. En efecto.

$$\begin{aligned} r_{u_1 \odot u_2}(x) &= \sum_{k=1}^{t} r_{u_1 \odot u_2}(x) \\ &= \sum_{k=1}^{n} r_{u_1 \odot u_2}(x) + \sum_{k=n+1}^{m} r_{u_1 \odot u_2}(x) \\ &= r_{u_1}(x) + r_{u_2}(x) \end{aligned}$$

Ahora bien, de las hipótesis de 3.4 y por monotonía de la adición, se tiene

$$r_{u_1}(x) + r_{u_2}(x) \geq r_{u_1}(y) + r_{u_2}(y)$$

luego, por la afirmación, $r_{u_1 \odot u_2}(x) \geq r_{u_1 \odot u_2}(x)$, por lo tanto $x \succeq^{\Sigma}_{u_1 \odot u_2} y$.

En segundo lugar veamos que si $x \succ^{\Sigma}_{u_1} y$ y $x \succeq^{\Sigma}_{u_2} y$ entonces $x \succ^{\Sigma}_{u_1 \odot u_2} y$.
Esto es equivalente a

$$[r_{u_1}(x) > r_{u_1}(y)] \wedge [r_{u_2}(x) \geq r_{u_1}(x)] \Longrightarrow r_{u_1 \odot u_2}(x) > r_{u_1 \odot u_2}(y) \tag{3.5}$$

Pero esto es claro, pues de las hipótesis de (3.5) y por monotonía estricta de la adición, se obtiene $r_{u_1}(x) + r_{u_2}(x) > r_{u_1}(y) + r_{u_2}(y)$, luego, por la afirmación

www.bdigital.ula.ve

$$r_{u_1 \odot u_2}(x) > r_{u_1 \odot u_2}(y)$$

por lo tanto $x \succ^{\Sigma}_{\rho_{u_1} \odot \rho_{u_2}} y$.
La tercera propiedad de KP se prueba de manera análoga a la propiedad precedente.

∎

De los Teoremas 3.2, 3.3 y de las Proposiciones 3.2, 3.3, se tiene que esta función de elección social f^{Σ} satisface las propiedades de Consistencia Fuerte de Perfiles, Consistencia Débil de Perfiles, y KP*.

Proposición 3.8 *La función $u \longmapsto \succeq^{\Sigma}_{u}$ satisface la Propiedad de la Identidad.*

Demostración. Sea $u = (\succeq_1)$. Luego

$$\begin{aligned} x \succeq^{\Sigma}_{u} y &\iff \sum_{i=1}^{1} r^i_u(x) \geq \sum_{i=1}^{1} r^i_u(y) \\ &\iff r^1_u(x) \leq r^1_u(y) \iff x \succeq_1 y. \end{aligned}$$

Así $\succeq^{\Sigma}_{u} = \succeq_1$. ∎

Proposición 3.9 *f^{Σ} restringida satisface Pareto Fuerte.*

C.C.Reconocimiento

Demostración. Sea u un perfil y $\succeq_u^{\Sigma}$ el preorden asociado a u. Por el Lema 3.8 de tiene que $u \longmapsto \succeq_u^{\Sigma}$ satisface la Propiedad de la Identidad; además por la Proposición 3.7 la función $u \longmapsto \succeq_u^{\Sigma}$ satisface la Propiedad KP.
Luego por la Proposición 3.4 se tiene que f^{Σ} satisface la propiedad de Pareto Fuerte. ∎

Claramente como la suma es conmutativa la función f^{Σ} satisface anonimato. Como consecuencia de esto f^{Σ} es no dictatorial.

En el cuadro siguiente resumimos los resultados del análisis de f^{Σ}.

ET	PF	CFP	CDP	KP	KP*	PI	A	ND
✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Demostraremos que si repetimos cierta cantidad k veces un mismo preorden (voto), entonces el resultado de la elección esta sujeto a la preferencia es ese preorden. En este sentido, sobre preferencias estrictas, la función f^{Σ} tiene un comportamiento que refleja un aspecto mayoritario. Esto se expresa con precisión en la proposición 3.10.

Definición 3.6 *Dado un preorden $\succeq$, definimos $(\succeq)^k$, como*

$$(\succeq)^k = \left(\underbrace{\succeq \odot \succeq \odot \cdots, \odot \succeq}_{k-veces}\right)$$

www.bdigital.ula.ve

Proposición 3.10 *Sea X un conjunto finito de alternativas. Para todo preorden total $(\succeq)$, y para todo perfil u, existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k' \geq k$ se tiene que*

$$si\ x \succ y \ \ entonces \quad x \succ^{\Sigma}_{u \odot (\succeq)^{k'}} y.$$

Demostración. Sean $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{p}$, el conjunto de todos lo posibles pares de alternativas tales que $x_i \succ y_i$. Sean $\{\max(\succeq)\} = A$, y $\rho_u = (A_1, \cdots, A_n)$ donde cada $A_i = \{\max(\succeq_i)\}$, $i = 1, \cdots, n$, y además consideremos $u' = u \odot (\succeq)^{k'}$, con $\rho_{u'} = \left(A_1, \cdots, A_n, \underbrace{A, \cdots, A}_{k'-veces}\right)$.

Fijemos un par (x_j, y_j). Luego

$$d^{\Sigma}(x_j, \rho_u) = \sum_{i=1}^{n} d^*(x_j, A_i) = a \quad \text{y} \quad d^{\Sigma}(y_j, \rho_u) = \sum_{i=1}^{n} d^*(y_j, A_i) = b.$$

Por otra parte $d^{\Sigma}(x_j, \rho_{u'}) = \sum_{i=1}^{n} d^*(x_j, A_i) + \sum_{i=1}^{k'} d^*(x_j, A) = a + k'd^*(x_j, A)$, análogamente $d^{\Sigma}(y_j, \rho_{u'}) = b + k'd^*(y_j, A)$,.

Ahora como $(\succeq)$ es $d-$consistente y $x_j < y_j$, se tiene que $d^*(x_j, A) < d^*(y_j, A)$. Así tenemos que

$$d^{\Sigma}(x_j, \rho_{u'}) = a + k'd^*(x_j, A) \text{ y } d^{\Sigma}(y_j, \rho_{u'}) = b + k'd^*(y_j, A).$$

C.C.Reconocimiento

Ambas expresiones se pueden ver como funciones lineales (rectas) en k', donde la pendiente de la primera es estrictamente menor que la pendiente de la segunda.
Por lo tanto, existe $k_j \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k' > k_j$ se tiene que

$$a + k'd^*(x_j, A) < b + k'd^*(y_j, A).$$

Definamos $k = \max\{k_1, \cdots, k_p\}$ y sea $k' > k$ y $u' = u \odot (\succeq)^{k'}$. Luego, si $x \succ y$, entonces existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $x = x_j$ y $y = y_j$. Así

$$d^{\Sigma}(x_j, \rho_{u'}) = a + k'd^*(x_j, A) < b + k'd^*(y_j, A) = d^{\Sigma}(y_j, \rho_{u'})$$

de donde se tiene que $x \succ^{\Sigma}_{u\odot(\succeq)^{k'}} y$.

∎

3.8 La función f^{GMax}

Comenzaremos dando más definiciones preliminares:

Definición 3.7 *Sea $\mathcal{D}$ un conjunto formado por vectores de dimensión finita cuyas entradas son elementos de un conjunto ordenado. Definimos la función $\downarrow: \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$, que ordena los vectores de manera decreciente, como sigue:*

$$\downarrow (v_1, \cdots, v_n) = (v_{k_1}, \cdots, v_{k_n}),\ \textit{donde } v_{k_i} \geq v_{k_{i+1}} \textit{ para } i = 1, \cdots, n-1 \textit{ y } \{v_{k_1}, \cdots, v_{k_n}\} = \{v_1, \cdots, v_n\}$$

(La última igualdad como multiconjunto).

Observación 3.4 *Note que si v y w son dos vectores finitos, entonces $\downarrow (v \odot w) = \downarrow (w \odot v)$.*

Definición 3.8 *Sea $\rho = (A_1, \cdots, A_k)$ un conjunto de preferencias, y sea $x \in X$, definimos*

$$d^{GMax}(x, \rho) = \downarrow (d^*(x, A_1), \cdots, d^*(x, A_k)).$$

Para la siguiente definición consideremos el orden lineal $\leq_l$ de la definición 2.15.

Definición 3.9 *Sea u un perfil y sea $\rho_u = (A_1, \cdots, A_k)$ el vector de preferencias, asociado a u. Definimos $\succeq^{GMax}_u$, un preorden total asociado a u, de la siguiente manera*

$$x \succeq^{GMax}_u y \Longleftrightarrow d^{GMax}(x, \rho) \leq_l d^{GMax}(y, \rho),$$

Así dada una agenda $V \subset X$ podemos expresar una función de elección de la siguiente manera:

$$f^{GMax}(u, V) = \max\left(V, \succeq^{GMax}_u\right)$$

www.bdigital.ula.ve

C.C.Reconocimiento

Proposición 3.11 *La relación $\succ_u^{GMax}$ es un preorden total.*

Demostración. Es inmediato pues $\leq_l$ es un orden lineal.

Ejemplo 3.4 *Sea $X = \{(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0),(1,1,0),(1,0,1),(0,0,0),(1,1,1),(0,1,1)\}$, d la distancia de Hamming y $u = (\succeq_1, \succeq_2, \succeq_3)$ un perfil dado por:*

$$u = \left\{ \begin{array}{ccc} (0,0,1) & (1,0,0) & (1,0,0) \\ (1,0,1)(0,0,0)(0,1,1) & (1,0,1)(0,0,0)(1,1,0) & (1,0,1)(0,0,0)(1,1,0) \\ (0,1,0)(1,0,0)(1,1,1) & (0,1,0)(0,0,1)(1,1,1) & (0,1,0)(0,0,1)(1,1,1) \\ (1,1,0) & (0,1,1) & (0,1,1) \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \succeq_1 & \succeq_2 & \succeq_3 \end{array} \right.$$

Sea $\rho_u = (A_1, A_2, A_3)$, donde $A_1 = \{(0,0,1)\}$, $A_2 = \{(1,0,0)\}$ y $A_3 = \{(1,0,0)\}$ el perfil asociado a u, y consideremos $V = X$. Observando, mediante la tabla, el comportamiento de la distancia podemos concluir que

$$f_u^{Gmax}(X) = \{(0,0,0),(1,0,1)\}.$$

	A_1	A_2	A_3	d^{GMax}
$(0,0,0)$	*1*	*1*	*1*	***(1,1,1)***
$(0,0,1)$	*0*	*2*	*2*	$(2,2,0)$
$(0,1,1)$	*1*	*3*	*3*	$(3,3,1)$
$(0,1,0)$	*2*	*2*	*2*	$(2,2,2)$
$(1,0,1)$	*1*	*1*	*1*	***(1,1,1)***
$(1,1,0)$	*3*	*1*	*1*	*(3,1,1)*
$(1,0,0)$	*2*	*0*	*0*	*(2,0,0)*
$(1,1,1)$	*2*	*2*	*2*	*(2,2,2)*

www.bdigital.ula.ve

Analicemos a continuación las propiedades para la función f^{Gmax}.

3.8.1 Análisis de las propiedades para la función f^{GMax}

Comencemos notando que f^{GMax} esta definida a partir de un preorden total $\succeq_u^{GMax}$, por lo tanto satisface Explicaciones Transitivas.

Para hacer la notación menos pesada denotaremos $v \odot (a)$ por $v \odot a$.

Lema 3.2 *Sean $v = (v_1, \cdots, v_n)$ y $w = (w_1, \cdots, w_n)$ dos vectores cuyas componentes son numeros naturales.*

(i) *Si $\downarrow (v) <_l \downarrow (w)$ entonces $\downarrow (v \odot a) <_l \downarrow (w \odot a)$, donde $a \in \mathbb{N}$*

(ii) *Si $\downarrow (v) \leq_l \downarrow (w)$ entonces $\downarrow (v \odot a) \leq_l \downarrow (w \odot a)$, donde $a \in \mathbb{N}$*

C.C.Reconocimiento

Demostración. **(i)** Sin pérdida de generalidad supongamos que $v =\downarrow(v)$ y $w =\downarrow(w)$. Como $v <_l w$, entonces por la definición 2.15 se tiene que

$$\exists i \leq n \text{ tal que } v_i < w_i \text{ y } \forall j < i \text{ se tiene } v_j = w_j.$$

En virtud de lo anterior podemos escribir

$$v = (v_1 \cdots, v_{i-1}) \odot (v_i) \odot (v_{i+1}, \cdots, v_n), \text{ y } w = (w_1 \cdots, w_{i-1}) \odot (w_i) \odot (w_{i+1}, \cdots, w_n)$$

Veamos los casos, donde pueda aparecer ubicado a. Usaremos la siguiente notación: Para la i-ésima componente de $\downarrow(s)$ es denotada $\downarrow(s)_i$

Caso 1: Si $a \geq v_{i-1}$ tenemos que:

$$\downarrow(v \odot a) =\downarrow(v_1 \cdots, v_{i-1}, a) \odot (v_i) \odot (v_{i+1}, \cdots, v_n), \text{ y}$$

$$\downarrow(w \odot a) =\downarrow(w_1 \cdots, w_{i-1}, a) \odot (w_i) \odot (w_{i+1}, \cdots, w_n)$$

Luego por la definición 2.15, claramente $\downarrow(v \odot a) < l \downarrow(w \odot a)$, ya que $\downarrow(v_1, \cdots, v_{i-1}, a) =\downarrow(w_1, \cdots, w_{i-1}, a)$.

Caso 2: Si $v_{i-1} > a > v_i$ tenemos que:

$$\downarrow(v \odot a) = (v_1 \cdots, v_{i-1}) \odot (a) \odot (v_i) \odot (v_{i+1}, \cdots, v_n), \qquad (I)$$

$$\text{si } a \geq w_i \ \downarrow(w \odot a) = (w_1 \cdots, w_{i-1}) \odot (a) \odot (w_i) \odot (w_{i+1}, \cdots, w_n) \qquad (II) \quad \text{o bien,}$$

$$\text{si } a < w_i \ \downarrow(w \odot a) = (w_1 \cdots, w_{i-1}) \odot (w_i) \odot \downarrow(w_{i+1}, \cdots, w_n, a) \qquad (III).$$

www.bdigital.ula.ve

Cuando se cumple (I) y (II) la primera componente donde difieren es en $i+1$, es decir

$$\downarrow(v \odot a)_{i+1} = v_i < w_i =\downarrow(w \odot a)_{i+1},$$

donde $\downarrow(v \odot a)_{i+1}$ y $\downarrow(w \odot a)_{i+1}$ denotan a las componentes $i+1$ de los vectores $\downarrow(v \odot a)$ y $\downarrow(w \odot a)$ respectivamente. Luego, de nuevo por la definición 2.15, se tiene que $\downarrow(v \odot a) <_l \downarrow(w \odot a)$.

Cuando se cumple (I) y (III), la primera componente donde difieren es en i, y se tiene

$$\downarrow(v \odot a)_i = a < w_i =\downarrow(w \odot a)_i,$$

así $\downarrow(v \odot a) <_l \downarrow(w \odot a)$.

Caso 3: Si $a \leq v_i$, tenemos que $a < w_i$ y

$$\downarrow(v \odot a) = (v_1, \cdots, v_i) \odot \downarrow(v_{i+1}, \cdots, v_n, a), \text{ y}$$

$$\downarrow(w \odot a) = (w_1, \cdots, w_i) \odot \downarrow(w_{i+1}, \cdots, w_n, a)$$

Luego la primera componente en que difieren es i, es decir

$$\downarrow(v \odot a)_i = v_i < w_i =\downarrow(w \odot a)_i,$$

Así $\downarrow(v \odot a) <_l \downarrow(w \odot a)$.

La propiedad (ii) se deduce inmediatamente de (i) y de la definición 2.15. ∎

Un corolario del del lema precedente es el siguiente.

C.C.Reconocimiento

Corolario 3.1 *Sean v, v' y w vectores de números reales tales que v y v' tienen la misma dimensión. Entonces*

(i) *si* $\downarrow (v) <_l \downarrow (v')$, *entonces* $\downarrow (v \odot w) <_l \downarrow (v' \odot w)$

(ii) *si* $\downarrow (v) \leq_l \downarrow (v')$, *entonces* $\downarrow (v \odot w) \leq_l \downarrow (v' \odot w)$

Demostración. Demostraremos (i) (la prueba de (ii) es análoga). Para ello procedemos por inducción en n la dimensión de w. Primero supongamos que $w = (a_1)$. Entonces por el lema 3.2, parte (i), se tiene que $\downarrow (v \odot a_1) <_l \downarrow (v' \odot a_1)$, es decir $\downarrow (v \odot w) <_l \downarrow (v' \odot w)$. Supongamos ahora que (i) es cierto para vectores w' de longitud n. Sea $w = (a_1, \cdots, a_n, a_{n+1})$ y consideremos $w' = (a_1, \cdots, a_n)$. Por hipótesis de inducción $\downarrow (v \odot w') <_l \downarrow (v' \odot w')$ y por el lema 3.2, parte (i), se tiene que $\downarrow (v \odot w' \odot a_{n+1}) <_l \downarrow (v' \odot w' \odot a_{n+1})$, es decir, $\downarrow (v \odot w) <_l \downarrow (v' \odot w)$. ∎

Proposición 3.12 *Sean* $v = (v_1, \cdots, v_n)$, $v' = (v'_1, \cdots, v'_n)$, $w' = (w'_1, \cdots, w'_m)$ *y* $w = (w_1, \cdots, w_m)$ *vectores cuyas componentes son numeros reales.*

(i) *Si* $\downarrow (v) \leq_l \downarrow (v')$ *y* $\downarrow (w) \leq_l \downarrow (w')$, *entonces* $\downarrow (v \odot w) \leq_l \downarrow (v' \odot w')$.

(ii) *Si* $\downarrow (v) \leq_l \downarrow (v')$ *y* $\downarrow (w) <_l \downarrow (w')$, *entonces* $\downarrow (v \odot w) <_l \downarrow (v' \odot w')$.

Demostración. Vamos a demostrar (ii) (la demostración de (i) es análoga).
Suponga que $\downarrow (v) \leq_l \downarrow (v')$ y $\downarrow (w) <_l \downarrow (w')$. Por el corolario 3.1 (parte (i)) se tiene que

$$\downarrow (w \odot v) <_l \downarrow (w' \odot v) \tag{3.6}$$

Por el corolario 3.1 (parte (ii)) se tiene que

$$\downarrow (v \odot w') \leq_l \downarrow (v' \odot w') \tag{3.7}$$

Pero por la observación 3.4 se tiene que

$$\downarrow (v \odot w) = \downarrow (w \odot v) \quad \text{y} \quad \downarrow (w' \odot v) = \downarrow (v \odot w')$$

Así, de (3.6) y (3.7), por transitividad se tiene que

$$\downarrow (v \odot w) <_l \downarrow (v' \odot w')$$

∎

Como corolario de la proposición 3.12 se tiene la siguiente proposición.

Proposición 3.13 *La función* $u \longmapsto \succeq_u^{GMax}$ *satisface la propiedad KP.*

De los Teoremas 3.2, 3.3 y de las Proposiciones 3.2, 3.3, se tiene que esta función de elección satisface las propiedades de Consistencia Fuerte de Perfiles, Consistencia Débil de Perfiles, y KP*.

www.bdigital.ula.ve

C.C.Reconocimiento

Proposición 3.14 *El preorden $\succeq_u^{GMax}$ asociado a perfiles $d-$consistentes, satisface la Propiedad de la Identidad.*

Demostración. En efecto. Sea $u = (\succeq_1)$ un perfil $d-$consistente. Sea $\rho_u = (A_1)$ donde $A_1 = \max(\succeq_1)$. De las observaciones 3.1 y 3.2 podemos construir $u_{\rho_u} = (\succeq_{A_1})$. Como u es $d-$consistente se tiene que $\succeq_1 = \succeq_{A_1}$. Luego

$$\begin{aligned} x \succeq_u^{GMax} y &\iff \downarrow (d^*(x, A_1)) \leq_l \downarrow (d^*(y, A_1)) \\ &\iff x \succeq_{A_1} y \iff x \succeq_1 y. \end{aligned}$$

Así $\succeq_u^{GMax} = \succeq_1$.

∎

Observación 3.5 *Por la proposición anterior se tiene que la función $u \longmapsto \succeq_u^{GMax}$ satisface la Propiedad de la Identidad y además por la Proposición 3.13 la función $u \longmapsto \succeq_u^{GMax}$ satisface la Propiedad KP. Luego por la Proposición 3.4 se tiene que f^{GMax} satisface la propiedad de Pareto Fuerte.*

Notemos que, si v es un vector de números reales y v' es un vector obtenido como permutación de v, entonces

$$\downarrow (v) = \downarrow (v')$$

Como consecuencia de esto tenemos la siguiente observación:

www.bdigital.ula.ve

Observación 3.6 *La función f^{Gmax} satisface anonimato y por lo tanto no puede ser dictatorial.*

Veamos el resultado del análisis de f^{GMax} restringida a perfiles d-consistentes mediante la siguiente tabla.

ET	PF	CFP	CDP	KP	KP*	PI	A	ND
✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

C.C.Reconocimiento

CAPÍTULO 4

El Teorema de manipulabilidad

Dentro del estudio de la teoría de elección social es inevitable no toparse con el problema de la manipulabilidad de mecanismos de elección. Para nosotros estos mecanismos no serán mas que los esquemas de voto, funciones de elección social o funciones de bienestar social. El problema de la manipulabilidad, en palabras simples, plantea cuándo puede existir una situación de manipulabilidad. Pudiera pensarse que en el proceso de elección existe un individuo manipulador o pudieran existir varios. Nosotros atacaremos el problema sólo cuando hay una situación de manipulabilidad con un sólo individuo que manipula.

www.bdigital.ula.ve

Los resultados importantes con respecto a este tema plantean que que bajo ciertas propiedades los mecanismos de elección son vulnerables a la manipulabilidad o bien tienen un dictador.

Con el fin de que este trabajo sea autocontenido exponemos en este capítulo la prueba del teorema de manipulabilidad para esquemas de votos que son funciones univaluadas (como lo veremos más adelante). Hemos escogido exponer la prueba original de Gibbard [21], por su simplicidad.

En este capítulo, las letras u, s, v, w, t representarán perfiles y u_i, s_i, v_i, w_i, t_i representarán relaciones modulares sobre X y V representará el conjunto de las posibles salidas. P denota el conjunto de todos los preórdenes totales sobre X y P^n denota los perfiles de tamaño n.

4.1 Manipulabilidad sobre esquemas de voto

Comenzaremos formalizando lo que es una situación de manipulabilidad para funciones de elección particulares. Estas funciones de elección son conocidas como *esquemas de voto*, cuya característica principal es que son funciones univaluadas. Esto lo formalizamos en la siguiente definición.

Definición 4.1 *Una función g que asigna a cada elemento $u = (u_1, \cdots, u_n) \in \mathrm{P}^n$ una alternativa, la llamaremos* Esquema de Voto o Función de Juego. *Es decir, $g : \mathrm{P}^n \longrightarrow X$.*

C.C.Reconocimiento

La siguiente definición es técnica o establece una nueva notación; es decir, simplemente formaliza el hecho de que dado un perfil podemos cambiar una de sus entradas y obtener un nuevo perfil.

Definición 4.2 *Dado un perfil* $u = (u_1, \cdots, u_k, \cdots, u_n)$ *y un preorden total* $\succeq$*, podemos definir un nuevo perfil* $u[\succeq /k]$ *como el perfil que resulta de reemplazar en la* k*-ésima coordenada de* u *por* $\succeq$*. Más precisamente:*

$$u[\succeq /k] = (u_1, \cdots, u_{k-1}, \succeq, u_{k+1}, \cdots, u_n).$$

Las siguientes propiedades serán necesarias para establecer el resultado de manipulabilidad según Gibbard - Satterhwaite [21, 31].

Dominio Estándar Gibbard *Un esquema de voto* g *satisface la propiedad Dominio Estándar Gibbard si,* $|X| \geq 3$*,* $|\mathrm{N}| \geq 3$ *y para cada* $x \in X$ *existe* $u \in \mathrm{P}^n$ *tal que* $g(u) = \{x\}$*.*

En la propiedad de Dominio Estádar Gibbard establece que el conjunto de candidatos y del individuos o votantes tengan al menos tres elementos, y por simplicidad exigimos que g sea sobreyectiva. En realidad Gibbard exige una condición menos fuerte: que el rango de g tenga cardinalidad mayor o igual a 3.

www.bdigital.ula.ve

Dictador Gibbard *Un individuo* $k \in \mathrm{N}$ *es un dictador Gibbard para un esquema de voto* g *si, para cada* $x \in X$ *existe un preorden* $\succ^*$ *tal que para todo* u *se tiene* $g(u[\succ^* /k]) = x$*.*

La noción de dictador para un esquema de voto traduce el hecho que un individuo (dictador) impone al candidato que desee en el resultado de la elección.

La siguiente definición formaliza el concepto de manipulabilidad para esquemas de voto.

Definición 4.3 *Diremos que un esquema de voto* g *es* manipulable *si existen* $k \leq n$*,* $u = (\succeq_1, \cdots, \succeq_n)$*, y* $\succeq \in \mathrm{P}$ *tales que*

$$g(u[\succeq /k]) \succ_k g(u),$$

donde $\succ_k$ *es la relación modular estricta asociada a* $\succeq_k$*.*

La definición anterior quiere decir que si el individuo k, que tiene preferencia $\succeq_k$, miente colocando otra preferencia $\succeq$, obtendrá un resultado que es estrictamente más favorable para lo que él desea realmente expresado mediante su preferencia $\succeq_k$.

Las siguientes definiciones son de suma importancia para establecer resultados previos que serán las herramientas claves para la demostración del Teorema 4.1

Definición 4.4 *Diremos que* $\succeq^*$ *es* $\succeq$-dominante *para un individuo* k *ssi para todo* $u \in \mathrm{P}^n$ *se tiene que*

$$g\left(u[\succeq^* /k]\right) \succeq g(u).$$

C.C.Reconocimiento

La definición anterior dice que un individuo k tiene un preferencia dominante $\succeq^*$ con respecto a una preferencia $\succeq$, si al cambiar su preferencia por $\succeq^*$ obtiene mejor resultado con respecto al preorden $\succeq$.

Definición 4.5 *Un esquema de voto es* trivial *si para cada $k \in \mathrm{N}$ y todo preorden total $\succeq$ existe un $\succeq^*$ que es $\succeq$-dominante para k.*

El resultado principal en los trabajos de Gibbard - Satterhwaite ([21], [31]) es el siguiente:

Teorema 4.1 *Si un esquema de voto g satisface Dominio Estándar Gibbard, entonces g tiene un Dictador Gibbard o g es manipulable.*

Es importante resaltar que este teorema establece que para que un esquema de voto sea manipulable o tenga un dictador basta que cumpla con la condición de dominio estándar Gibbard. Esto dice que los esquemas de voto son sensibles a ser manipulados; pues, claramente cada esquema de voto g que satisface Dominio Estándar Gibbard que no es dictatorial, es manipulable.

El siguiente Teorema lo enunciamos para presentar inmediatamente la demostración del Teorema 4.1 pero posteriormente será demostrado.

www.bdigital.ula.ve

Teorema 4.2 *Si g es un esquema de voto que satisface Dominio Estándar Gibbard y además es trivial, entonces g es dictatorial.*

A continuación demostraremos el Teorema 4.1.

Demostración. Supongamos que g es un esquema de voto y es no dictatorial. Entonces, por el Teorema 4.2, g es no trivial. Así, existe algún k y existe un preorden $\succeq$, tal que todo preorden total $\succeq^*$ no es $\succeq -$dominante para k.
Entonces, en particular, $\succeq$ no es $\succeq -$dominante para k. En consecuencia para algún perfil $u = (\succeq_1, \cdots, \succeq_n)$ no es posible que

$$g(u[\succeq /k]) \succeq g(u),$$

es decir,

$$g(u) \succ g(u[\succeq /k]).$$

Esto muestra que g es manipulable. En efecto, tomemos como perfil $s = u[\succeq /k]$ y tomemos $\succeq' = \succeq_k$. Así

$$g(s[\succeq' /k]) \succ g(s).$$

∎

Antes de entrar en la demostración del Teorema 4.2 estableceremos algunas definiciones.

Definición 4.6 *Sea $>$ un orden lineal sobre X. Para cada preorden total $\succeq$ sobre X y para cada $V \subseteq X$, definimos una relación $\succ^V$ sobre X de la siguiente manera:*

C.C.Reconocimiento

(a) $[(x \in V) \wedge (y \in V)] \longrightarrow [x \succ^V y \longleftrightarrow x \succ y \vee (x \simeq y \wedge x > y)]$.

(b) $[(x \in V) \wedge (y \notin V)] \longrightarrow x \succ^V y$.

(c) $[(x \notin V) \wedge (y \notin V)] \longrightarrow [x \succ^V y \longleftrightarrow x > y]$

Observación 4.1 *Es fácil ver que $\succ^V$ es un orden lineal sobre X.*

Una vez definido $\succ^V$, dado un perfil $u = (\succeq_1, \cdots, \succeq_n)$, podemos definir un nuevo perfil de la siguiente manera

$$u^V = (\succ_1^V, \cdots, \succ_n^V).$$

Los siguientes dos lemas muestran propiedades muy importantes de $\succ^V$.

Lema 4.1 *Si $Z \subseteq V$, entonces $(u^V)^Z = u^Z$.*

Demostración. Basta considerar el caso en que $u = (\succeq)$, por lo tanto, debemos probar que: Si $Z \subseteq V$, entonces $(\succ^V)^Z = \succ^Z$. Por razones de notación llamaremos $\succ_1 = \succ^V$, $\succ_2 = \succ_1^Z$ y $\succ_3 = \succ^Z$. Así, probaremos que $\succ_2 = \succ_3$, es decir, para $x, y \in X$, con $x \neq y$, se debe cumplir que:

www.bdigital.ula.ve

$$x \succ_2 y \Longleftrightarrow x \succ_3 y. \tag{4.1}$$

Veamos los posibles casos:

1) $x, y \in Z$:
Usando **(a)** de la definición 4.6, tenemos dos subcasos:

- Si $x \succ y$, entonces se tiene $x \succ_3 y$. Como $Z \subseteq V$, se tiene que $x \succ_1 y$, luego $x \succ_2 y$.
- Si $x \simeq y$ y $x > y$, claramente $x \succ_3 y$ y $x \succ_1 y$ y como $Z \subseteq V$ se tiene $x \succ_2 y$.

2) $x \in Z$ y $y \notin Z$:
Usando **(b)** de la definición 4.6, se tiene que $x \succ_3 y$. El hecho que $y \notin Z$ implica, también por **(b)**, que $x \succ_2 y$.

3) $x \notin Z$ y $y \notin Z$:
Supongamos que $x > y$. Usando **(c)** de la definición 4.6, tenemos $x \succ_3 y$. También por **(c)** tenemos $x \succ_2 y$.

∎

El siguiente Lema tiene una prueba inmediata.

Lema 4.2 *Sean u, u' dos perfiles y $V \subseteq X$. Si $u_{\upharpoonright V} = u'_{\upharpoonright V}$, entonces $u^V = u'^V$.*

C.C.Reconocimiento

A continuación demostraremos el teorema 4.2.
Demostración. Sea $g : \mathrm{P}^n \longrightarrow X$ un esquema de voto. Definimos, para cada i, la aplicación $\sigma_i : \mathrm{P} \longrightarrow \mathrm{P}$ tal que para cada $\succeq$ se tiene que $\sigma_i(\succeq)$ es $\succeq$-dominante para i.

Para cada perfil $u = (u_1, \cdots, u_n)$ definimos $\sigma : \mathrm{P}^n \longrightarrow \mathrm{P}^n$ de la siguiente manera:

$$\sigma(u) = (\sigma_1(u_1), \cdots, \sigma_n(u_n)) \tag{4.2}$$

Finalmente, definimos una función $\nu : \mathrm{P}^n \longrightarrow X$ de la siguiente manera:

$$\nu(u) = g(\sigma(u)). \tag{4.3}$$

Ahora, dado un perfil u vamos a definir una relación $\succ_u$ sobre X de la siguiente manera

$$x \succ_u y \longleftrightarrow [x \neq y \wedge \nu(u^{\{x,y\}}) = x]. \tag{4.4}$$

Claramente $\succ_u$ es total e irreflexivo. Es fácil verificar que $\succ_u$ es transitivo.
Una vez definido $\succ_u$, podemos definir la relación $\succeq_u$:

$$x \succeq_u y \longleftrightarrow [x = y \vee \nu(u^{\{x,y\}}) \neq y]. \tag{4.5}$$

Observemos que $x \succeq_u y \longleftrightarrow \neg(y \succ_u x)$. Claramente, si $x \succ_u y$, entonces $x \succeq_u y$.

www.bdigital.ula.ve

Ahora vamos a definir una función de elección f tal que, dado un perfil u, se tiene $f(u) = \succ_u$. Es importante notar que f puede ser vista como una función $f : \mathrm{P}^n \times \mathcal{P}^*(X) \longrightarrow \mathcal{P}^*(X)$ definida así:

$$f(u, V) = \max(V, \succeq_u). \tag{4.6}$$

Los dos siguientes lemas son cruciales para la demostración del Teorema 4.2, más precisamente, para terminar la demostración del Teorema 4.2 estableceremos dos afirmaciones cuyas demostraciones están sujetas los lemas siguientes.

Lema 4.3 *Consideremos un perfil $u = (\succeq_1, \cdots, \succeq_n)$ y sea $s = \sigma(u)$, donde $\sigma(u)$ se define como en (4.2). Supongamos que para un perfil s', y alternativas x e y, $x \neq y$ se satisface que:*

(1) $(\forall i)[y \succ_i x \longrightarrow s'_i = s_i]$

(2) $(\forall i)[x \succ_i y \vee y \succ_i x]$

(3) $y \succeq_u x$,

entonces $x \neq g(s')$.

Demostración. Supongamos que $x = g(s')$. Sea $u^* = u^{\{x,y\}}$; es decir, $u^* = (\succeq_1^*, \cdots, \succeq_n^*)$, donde cada $\succeq_i^* = \succeq_i^{\{x,y\}}$ para $i = 1, \cdots, n$. Consideremos $w = \sigma(u^*)$. Como $y \succeq_u x$ se tiene que

$$x = y \vee x \neq \nu(u^*),$$

C.C.Reconocimiento

y como $x \neq y$ se tiene que $x \neq \nu(u^*) = g(\sigma(u^*)) = g(w)$. Por lo tanto $x \neq g(w)$. Construimos una sucesión $s^0, \cdots, s^n$ de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
s^0 &= s' \\
s^1 &= s^0[w_1/1] \\
s^2 &= s^1[w_2/2] \\
\vdots &= \vdots \\
s^k &= s^{k-1}[w_k/k] = (w_1, \cdots, w_k, s'_{k+1}, \cdots, s'_n) \\
\vdots &= \vdots \\
s^n &= w
\end{aligned}
$$

La sucesión $s^0, \cdots, s^n$ también se puede definir así: $s^n = w$ y $s^{k-1} = s^k[s'_k/k]$. Esta doble visión de la sucesión $s^0, \cdots, s^n$ será muy importante en la prueba.

Como $x = g(s')$ y $x \neq g(w)$, se tiene que $x = g(s^0)$ pero $x \neq g(s^n)$. Sea k el menor índice tal que $g(s^k) \neq x$. Note que $k \geq 1$.
Mostraremos lo siguiente:

Afirmación: w_k no es $\succ_k^*$-dominante para k o s_k no es $\succ_k$ $-$dominante para k.
Como $w_k = \sigma_k(\succ_k^*)$ y $s_k = \sigma_k(\succ_k)$, en cualquier caso la definición de σ_k es violada. Así, suponer que $x = g(s')$ nos lleva a una contradicción.

www.bdigital.ula.ve

Para probar la afirmación consideremos los siguientes dos casos:

Caso 1 $g(s^k) = y \wedge y \succ_k x$.
Notemos que $k \geq 1$. Como $g(s^{k-1}) = x$, $g(s^k) \succ_k g(s^{k-1})$ por hipótesis, y $s^{k-1} = s^k[s'_k/k]$, no es el caso que $g(s^k[s'_k/k]) \succeq_k g(s^k)$, así s'_k no es $\succ_k$ $-$dominante para k. Pero, como $y \succ_k x$, por **(1)** de la hipótesis, $s'_k = s_k$, así s_k no es $\succ_k$ $-$dominante para k.

Caso 2 $g(s^k) \neq y \vee x \succ_k y$.
Veamos que $x \succ_k^* g(s^k)$. En efecto:

- Si $g(s^k) = y$, entonces por hipótesis $x \succ_k y$, y por (a), de la definición 4.6, y la definición de u^*, se tiene que $x \succ_k^* y = g(s^k)$.
- Si $g(s^k) \neq y$, entonces como $g(s^k) \neq x$, se tiene que $g(s^k) \notin \{x, y\}$, y por (b), de la definición 4.6, de nuevo $x \succ_k^* g(s^k)$.

Ahora bien, $x = g(s^{k-1})$, y $s^k = s^{k-1}[w_k/k]$ y como $g(s^{k-1}) \succ_k^* g(s^k)$, w_k no es $\succ_k^*$ $-$dominante para k.

Por otra parte $w_k = \sigma_k(\succ_k^*)$, es decir w_k es $\succ_k^*$ $-$dominante para k, lo que es una contradicción.

C.C.Reconocimiento

Así, suponer que $x = g(s')$ nos lleva a una contradicción. Por lo tanto $x \neq g(s')$. ∎

Lema 4.4 *Sea u un perfil. Si $(\forall i)[x \succ_i y \vee y \succ_i x]$ e $y \succeq_u x$, entonces $\nu(u) \neq x$.*

Demostración. Claramente las hipótesis (2) y (3) del Lema 4.3 son satisfechas . Tomando $s' = s = \sigma(u)$, la condición (1) también es satisfecha; por lo tanto $g(s') \neq x$. Como $g(s') = g(\sigma(u)) = \nu(u)$, se tiene que $\nu(u) \neq x$. ∎

La siguiente afirmación establece que la función f definida en la expresión 4.6 cumple con cuatro de las condiciones de Arrow y será demostrada posteriormente.

Afirmación 4.1 *f satisface Dominio Estándar, Independencia de Alternativas Irrelevantes (ii), Pareto Débil y Explicaciones Transitivas. Así, en virtud del Teorema de Arrow tiene un dictador.*

Veamos la demostración de la afirmación previa.
Demostración.

- f **satisface Dominio Estándar**. Esto es inmediato.

- f **satisface Pareto Débil**. En efecto. Sea u un perfil, debemos ver que si $(\forall i) x \succ_i y$, entonces $x \succ_u y$.

  Como $x \in X$, entonces por Dominio Estándar Gibbard, para algún perfil s' se tiene que $g(s') = x$. Si $s = \sigma(u)$, entonces todas las hipótesis de la Proposición 4.3 son satisfechas excepto (3) y la conclusión es violada. Por lo tanto (3) es falsa, es decir, $x \succ_u y$.

- f **satisface Independencia de Alternativas Irrelevantes**. En efecto. Sea $V = \{x, y\}$, y consideremos $u = (\succeq_1, \cdots, \succeq_n)$ y $u' = (\succeq'_1, \cdots, \succeq'_n)$ perfiles y supongamos que $u_{|V} = u'_{|V}$ es decir,

$$(\forall i)(\forall x)(\forall y)[(x \in V) \wedge (y \in V) \longrightarrow (x \succeq_i y \longleftrightarrow x \succeq'_i y)]$$

  En virtud del Lema 4.2, se tiene que $u^{\{x,y\}} = u'^{\{x,y\}}$, y en consecuencia

$$x \in \nu(u^{\{x,y\}}) \longleftrightarrow x \in \nu(u'^{\{x,y\}}),$$

  lo que quiere decir, $x \succ_u y \longleftrightarrow x \succ_{u'} y$.

- f **satisface Explicaciones Transitivas; es decir, $\succ_u$ es una relación modular.**

  En efecto. Usaremos la caracterización 2.6 (ver preliminares) de una relación modular, es decir, debemos ver que $\widehat{\succ}_u$ satisface las siguientes dos propiedades:

  (m1) $\forall x, y \in X, \quad \neg(x \succ_u y \wedge y \succ_u x)$.

  (m2) $\forall x, y, z \in X, \quad [x \succ_u z \longrightarrow (x \succ_u y \vee y \succ_u z)]$.

www.bdigital.ula.ve
C.C.Reconocimiento

Es fácil ver que $\succ_u$ satisface **(m1)**. En efecto, supongamos que $x \succ_u y$ e $y \succ_u x$, es decir,

- $x \neq y \wedge x\, g\left[\sigma(u^{\{x,y\}})\right] y$, y
- $\left[y \neq x \wedge y\, g\left[\sigma(u^{\{x,y\}})\right] x\right]$.

Así tenemos que $x \neq y$ y además $xg\left[\sigma(u^{\{x,y\}})\right] y$ y $yg\left[\sigma(u^{\{x,y\}})\right] x$. Lo que contradice que $g\left[\sigma(u^{\{x,y\}})\right]$ es un orden lineal.

Veamos que **(m2)** también es cierto. Sea $u' = u^{\{x,y,z\}}$. Entonces en virtud del Lema 4.1, $u'^{\{x,z\}} = u^{\{x,z\}}$. Note que

$$x \succ_u z \longleftrightarrow [x \neq z \wedge x = \nu(u^{\{x,z\}})],$$

$$x \succ_{u'} z \longleftrightarrow [x \neq z \wedge x = \nu(u'^{\{x,z\}})],$$

luego se tiene que $x \succ_{u'} z \longleftrightarrow x \succ_u z$.

De manera similar se tiene que

$$x \succ_{u'} y \longleftrightarrow x \succ_u y \qquad y \qquad y \succ_{u'} z \longleftrightarrow y \succ_u z.$$

Entonces, sólo necesitamos mostrar que para todo x, y y z,

$$x \succ_{u'} z \longrightarrow [x \succ_{u'} y \vee y \succ_{u'} z]$$

www.bdigital.ula.ve

Supongamos que $x \succ_{u'} z$. Claramente $x \neq z$ puesto que $x \succ_{u'} z$ significa

$$x \neq z \wedge x = \nu(u'^{\{x,z\}}).$$

Si $y = x$, se tiene $y \succ_{u'} z$, y si $y = z$, se tiene $x \succ_{u'} y$. Falta ver los casos $y \neq x$ y $z \neq y$. Entonces por la observación 4.1 para u', cada $\succ'_i$ es un orden lineal, y

$$(\forall i)\left[(x \succ'_i y \vee y \succ'_i x) \wedge (x \succ'_i z \vee z \succ'_i x) \wedge (y \succ'_i z \vee z \succ'_i y)\right]$$

Caso 1 $x = \nu(u')$.

Entonces usando la contrapositiva del Corolario 4.4, se tiene que $x \succ_{u'} y$.

Caso 2 $x \neq \nu(u')$.

Como $x \succ_{u'} z$, por el Lema 4.4 se tiene que $z \neq \nu(u')$. Si $w \notin \{x, y, z\}$, entonces por (b) de la definición 4.6 y la definición de u' se tiene que

$$(\forall i) x \succ'_i w.$$

Así, usando el hecho que f satisface Pareto Débil se tiene

$$x \succ_{u'} w,$$

y por el Lema 4.4, $w \neq \nu(u')$. Entonces tenemos $x \neq \nu(u')$, $z \neq \nu(u')$, y si $w \notin \{x, y, z\}$, entonces $w \neq \nu(u')$.

Por lo tanto, por eliminación, $y = \nu(u')$ y usando la contrapositiva del Lema 4.4 se tiene que $y \succ_{u'} z$.

C.C.Reconocimiento

Así terminamos la prueba de la Afirmación 4.1.

∎

Afirmación 4.2 *El dictador de f es un dictador para g.*

En efecto. Sea k el dictador para f. Recordemos que $k \in \mathrm{N}$ es un *dictador* para g si, para cada $y \in X$ existe un preorden $\succeq^*$ tal que

$$(\forall u)\ [g(u[\succeq^* /k]) = y]. \tag{4.7}$$

Sea $\succeq^y$ un preorden tal que

$$(\forall x)[x \neq y \longrightarrow y \succ^y x]$$

y sea $\succeq^* = \sigma_k(\succeq^y)$. Usaremos el Lema 4.3 para mostrar que $\succeq^*$ satisface la expresión 4.7. Sea $s' = (s'_1, \cdots, s'_n)$ un perfil tal que $s'_k = \sigma_k(\succeq^y) = \succeq^*$, y supongamos que $x \neq y$. Luego $y \succ^y x$. Mostraremos que $g(s') \neq x$ y esto vale para cualquier x que es diferente de y, así necesariamente $g(s') = y$.

www.bdigital.ula.ve

Sea $u = (\succeq_1, \cdots, \succeq_n)$ un perfil tal que

(a) $\succeq_k = \succeq^y$

(b) $(\forall i)[i \neq k \longrightarrow x \succ_i y]$,

y sea $s = \sigma(u)$. Entonces $s_k = \sigma_k(\succeq_k) = \sigma_k(\succeq^y) = \succeq^* = s'_k$.

Así,

- Por **(b)** y **(a)**, sólo el individuo k prefiere a y sobre x,
- Luego, (1) del Lema 4.3 es satisfecha,
- Por construcción, (2) del Lema 4.3, es satisfecha.
- Como $y \succ_k x$ y k es un dictador para f, se tiene que $y \succ_u x$. Así (3) del Lema 4.3 es satisfecha.

Luego, por el Lema 4.3 se tiene que $x \neq g(s')$. Como esto vale para cualquier $x \neq y$ necesariamente $g(s') = y$.

∎

C.C.Reconocimiento

4.2 Manipulabilidad de Funciones de Elección Social

En esta sección vamos a introducir el concepto de manipulabilidad para funciones de elección generales. Motivados por las ideas de Gibbard - Satterhwaite para establecer resultados de manipulabilidad para Esquemas de Votos nos concentramos en establecer un concepto de manipulabilidad y resultados análogos a los de los autores citados para funciones de elección, que son funciones "multivaluadas". A diferencia de los Esquemas de Voto, las funciones de elección que se estudian en este capítulo tienen como argumento un par (perfil y agenda) y dan como resultado un subconjunto no vacío de la agenda, es decir, posiblemente varios elementos de X, (en este sentido decimos "multivaluadas"); esta situación es llamada por algunos autores *empates* (ver [4]).

Es claro que existe una diferencia entre una función de elección social y un esquema de voto. Sin embargo, podemos ver a un esquema de voto g como una función de elección social particular en los siguientes términos: $g(u) = x$ si, y sólo si $f(u, X) = \{x\}$. De hecho, el conjunto de funciones de elección social que generan esquemas de votos son restringidas, en el sentido de que no permite que ocurran empates en el resultado de la elección.

Así es natural buscar un teorema de manipulabilidad para funciones de elección social en general. Comenzamos por dar una definición de manipulabilidad para funciones de elección social, es decir, encontrar una definición similar a la de Gibbard, para el caso de las funciones de elección social. Interesantes trabajos se han realizado en este sentido [31, 35]. En esta sección mostraremos una propuesta de manipulabilidad bajos ciertas condiciones sobre los levantamientos y comparando con otros trabajos veremos similitudes y diferencias.

www.bdigital.ula.ve

Para este propósito consideraremos funciones que satisfacen explicaciones transitivas o equivalentemente funciones que toman valores en P, es decir, el conjunto de llegada es el conjunto de preórdenes totales. Por lo tanto, estas funciones a considerar cumplen con la siguiente proposición:

Proposición 4.1 *Supongamos que f es una función de elección social que satisface las condiciones de explicaciones transitivas y dominio estándar. Entonces, existe un único preorden total $\succeq_u$ tal que $f_u(V) = \max(V, \succeq_u)$.*

Esta proposición aparece en el capítulo 2 con su respectiva demostración (ver proposición 4.1).

Por el resultado previo es fácil ver a una función que tiene explicaciones transitivas $f : P^n \times \mathcal{P}^*(X) \longrightarrow \mathcal{P}^*(X)$ como una función $\hat{f} : P^n \longrightarrow P$. La función $\hat{f}$ es definida a través de $u \mapsto \succeq_u$ donde $\succeq_u$ es el único preorden total que satisface $f_u(V) = \max(V, \succeq_u)$. Por el contrario, teniendo a $\hat{f}$, la aplicación $u \mapsto \succeq_u$, podemos definir f de la manera siguiente $f(u, V) = \max(V, \succeq_u)$.

Haciendo abuso de notación, podemos confundir a f y $\hat{f}$. Teniendo esto en cuenta, quisieramos tener la situación de manipulabilidad que buscamos. Lo más sensato es considerar la

C.C.Reconocimiento

tripleta $k, u, \succeq$ tal que $f(u[\succeq/k])$ es *estrictamente mejor* que $f(u)$. Pero el problema es que necesitamos relaciones entre las preferencias con el fin de dar sentido claro a la frase anterior.

En realidad, necesitaríamos una relación $\sqsupseteq^{\succeq_k}$ sobre las preferencias tal que $\succeq \sqsupseteq^{\succeq_k} \succeq'$ exprese que la relación $\succeq$ es estrictamente mejor, relativo a $\succeq_k$, que $\succeq'$. Aunque este tipo de enfoque puede parecer interesante y prometedor, no lo usaremos en este trabajo debido a la dificultad de definir tal relación racional $\sqsupseteq^{\succeq_k}$. La relación construida a través de la distancia de Kemeny [20] [1] d_K en el siguiente sentido: $\succeq \sqsupseteq^{\succeq_k} \succeq'$ si, y sólo si $d_K(\succeq, \succeq_k) \leq d_K(\succeq, \succeq_k)$ no es muy convincente porque no captura la idea natural de manipulabilidad.

El enfoque para abordar el problema de la manipulabilidad en este trabajo es tener en cuenta todas las entradas de una función de elección social. En en particular, una situación de manipulabilidad será un cuádruple $k, u, \succeq, V$ donde $k, u, \succeq$ son como antes y V es una agenda tal que $f_{u[\succeq/k]}(V)$ es mejor que $f_u(V)$, relativo al levantamiento de $\succeq_k$. Esto lo definiremos de manera precisa y general en la siguiente sección.

4.3 Levantamientos sobre relaciones de preferencia

La transferencia de la información de las preferencias sobre los puntos en preferencias sobre conjuntos de puntos de manera racional es una tarea bastante conocida (ver por ejemplo [33, 34]). Tal vez la forma más común, en el caso finito (cuando X es finito), es a través de una probabilidad p definida sobre X, que se extiende de forma aditiva a subconjuntos de X. Por lo tanto, se puede definir lo que se llama una relación probabilistica sobre subconjuntos de (eventos de) X: escribimos $E_1 \sqsupseteq E_2$ si y sólo si $p(E_1) \geq p(E_2)$.

Nosotros consideraremos en esta sección, en primer lugar, la extensión de relaciones sobre conjuntos de puntos a subconjuntos, de manera natural, como lo hizo Shackle [33, 34] (y se ha propuesto en varias manera por Lewis, Zadeh, Dubois, Spohn, Halpern, etc.). Esto es llamado *la medida de posibilidad comparativa* y corresponde a la definición de levantamiento $\sqsupseteq_\Pi$ que definiremos más adelante.

Ahora recordaremos la definición formal de levantamiento.

Definición 4.7 *Una aplicación $\succeq \mapsto \sqsupseteq_\succeq$ que envía una preferencia sobre X, $\succeq$, sobre un preorden parcial $\sqsupseteq_\succeq$ sobre $\mathcal{P}^*(X)$, es llamado un levantamiento si, y solo si, para cualquier par, $x, y \in X$ se satisface la siguiente condición:*

$$x \succeq y \iff \{x\} \sqsupseteq_\succeq \{y\}$$

Así, si $\succeq \mapsto \sqsupseteq_\succeq$ es un levantamiento, el preorden parcial $\sqsupseteq_\succeq$ es una "extensión" del preorden total $\succeq$. En realidad, muchos levantamientos han sido estudiado y caracterizados por Barberà et al. [2]. A la propiedad que define al levantamiento la llaman *propiedad de extensión*.

[1] La distancia de Kemeny entre dos conjuntos es el cardinal de la diferencia simétrica entre los conjuntos. Kemeny usa esta misma idea para establecer distancia entre dos preordenes totales.

www.bdigital.ula.ve

C.C.Reconocimiento

Con la meta de conseguir un teorema de manipulabilidad para funciones de elección social, sólo consideraremos los levantamientos que satisfagan las siguientes dos propiedades:

Simple Dominancia 1 $\quad x \succ y \quad \Longrightarrow \quad \{x,y\} \sqsupset_{\succ} \{y\}$

Simple Dominancia 2 $\quad x \succ y \quad \Longrightarrow \quad \{x\} \sqsupset_{\succ} \{x,y\}$

La propiedad de Simple Dominancia 1 se puede interpretar como que *un conjunto al que se le añade algo mejor, mejora*; y la propiedad Simple Dominancia 2 como *la añadidura de un malo, empeora.*

Estas propiedades han sido ampliamente estudiadas por Barbera y colegas en [2]. En ese trabajo muchos levantamientos naturales se han caracterizado. Es interesante notar que entre las propiedades que caracterizan a muchos levantamientos podemos encontrar las propiedades anteriores de Simple Dominancia.

A continuación daremos algunos ejemplos concretos de levantamientos. El primer levantamiento que daremos es bastante conocido y de mucha importancia dentro de la teoría de decisión; el levantamiento posibilista $\sqsupseteq_{\Pi}$ se define de la siguiente manera: sea $\succeq$ un preorden total sobre X; sean A y B dos elementos cualesquiera de $\mathcal{P}^*(X)$, definimos

www.bdigital.ula.ve

$$A \sqsupseteq_{\Pi} B \Longleftrightarrow \exists a \in \max(A, \succeq) \wedge \exists b \in \max(B, \succeq) \text{ tal que } a \succeq b$$

La relación $\sqsupseteq_{\Pi}$ asociada al preorden $\succeq$, definida previamente, es de hecho la relación posibilística comparativa asociada a la "medida posibilística" $\succeq$ (ver [17, 18]). Se extiende de manera natural las preferencias sobre los elementos de X expresadas por $\succeq$, a preferencias sobre $\mathcal{P}^*(X)$ expresadas por $\sqsupseteq_{\Pi}$.

La interpretación de $A \sqsupseteq_{\Pi} B$ puede establecerse así: A es preferido a B si el mejor de los elementos de A (relativo a $\succeq$) es preferido o indiferente al mejor de los elementos de B (relativo a $\succeq$); o, gráficamente, que los mejores elementos de A se encuentran en un nivel superior o en el mismo nivel que los mejores elementos de B.

Ahora definamos una variante del levantamiento leximax (ver [2, 12]). En esta variante, serán preferidos los conjuntos más precisos. Podemos llamar a esta versión el *levantamiento leximax-preciso*. Supongamos que $|X| = n$ y consideremos $V\downarrow$ el conjunto de todos los vectores de tamaño menor o igual a n, cuyas entradas son elementos de X; no existen repeticiones en las entradas y finalmente son ordenados de manera decreciente por $\succeq$. Es decir, dado $k \leq n$, $\vec{a} = (a_1, \cdots, a_k) \in V\downarrow$ si, y sólo si, para todo i, j tal que $1 \leq i, j \leq k$ con $i \neq j$, $a_i \neq a_j$ y $\forall 1 \leq i \leq k-1$, $a_i \succeq a_{i+1}$. Ahora, dado $\vec{a}$, $\vec{a}' \in V\downarrow$ de longitud m con $m \leq n$, definimos la siguiente relación:

$$\vec{a} \equiv \vec{a}' \Leftrightarrow a_i \sim a'_i, \quad \forall i = 1, \cdots, m.$$

C.C.Reconocimiento

Ahora, definimos $\succeq^{LP}_{max}$ sobre $V\downarrow$ (donde la longitud de un vector $\vec{a}$ es denotada por $|\vec{a}|$):

$$\vec{a} \succeq^{LP}_{max} \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} \equiv \vec{b} \text{ o} \\ \exists k \in \{1, \cdots, \min\{|\vec{a}|, |\vec{b}|\}\}, \text{ tal que } \forall i < k \ a_i \sim_s b_i \text{ y } a_k \succ b_k \text{ o} \\ |\vec{a}| < |\vec{b}| \text{ y } \forall i \in \{1, \cdots, |\vec{a}|\}, \ a_i \sim b_i. \end{cases}$$

Sea $A \in \mathcal{P}(X)$ y supongamos que $|A| = k$. El conjunto de vectores en $V\downarrow$ de longitud k con entradas en A lo denotaremos por $R(A)$, es decir

$$R(A) = \{\vec{a} \in V\downarrow: \ |\vec{a}| = k \text{ y las entradas de } \vec{a} \text{ están en } A\}.$$

Ahora definimos $\sqsupseteq^{LP}_{max}$ sobre $\mathcal{P}(S)$ como sigue:

$$A \sqsupseteq^{LP}_{max} B \Leftrightarrow \forall \vec{b} \in R(B) \ \exists \vec{a} \in R(A) \ \vec{a} \succeq^{LP}_{max} \vec{b}$$

Note que esta definición no es la versión estándar de leximax; por ejemplo cuando consideramos el levantamiento leximax-preciso con el orden lineal finito de los números naturales, el vector $(4,3,2)$ es preferido (leximax-preciso) al vector $(4,3,2,1)$, así el conjunto $\{2,3,4\}$ es preferido leximax-preciso al conjunto $\{1,2,3,4\}$.

Es fácil ver que $\sqsupseteq_{\Pi}$ y $\sqsupseteq^{LP}_{max}$ son preordenes totales sobre $\mathcal{P}(S)$. Otro levantamiento interesante que ha sido considerado en muchas áreas, pero especialmente útil en el estudio de la semántica de los lenguajes de programación, es llamado el orden de Egli-Milner. Este levantamiento esta definido de la siguiente manera:

www.bdigital.ula.ve

$$A \sqsupseteq^{EM}_{\succeq} B \Leftrightarrow \forall x \in B \ \exists y \in A \ y \succeq x \text{ y } \forall x \in A \ \exists y \in B \ x \succeq y$$

Las siguientes observaciones son fáciles de verificar:

Observación 4.2 *Los levantamientos $\sqsupseteq^{LP}_{max}$, $\sqsupseteq^{EM}_{\succeq}$ satisfacen las propiedades de Dominancia Simple 1 y 2. El levantamiento $\sqsupseteq_{\Pi}$ satisface las propiedad Dominancia Simple 1 pero no satisface la propiedad Dominancia Simple 2.*

Observación 4.3 *Existen diversas maneras* naturales *de definir levantamientos. Un gran número de levantamientos son caracterizados en [2]. Brams y Fishburn [20] han discutido sobre el problema de levantamientos de preferencias de candidatos, a conjuntos de candidatos. Esta discusión se da en el contexto del Voto Aprobatorio. El problema de encontrar la noción "correcta" de levantamientos de preferencias es un tópico extremadamente importante para un número de diversas comunidades.*

En este trabajo veremos que podemos hacer una extensión del teorema de manipulabilidad para levantamientos que cumplen con las propiedades de Dominancia Simple 1 y 2.
Así para nosotros, en el contexto general de las funciones de elección social, los levantamientos "correctos" son los que cumplen las propiedades de Dominancia Simple 1 y 2.

C.C.Reconocimiento

4.4 Teorema de manipulabilidad para funciones de elección social

Una de las contribuciones en este trabajo es una nueva noción general de manipulabilidad para funciones de elección social relativa a un levantamiento.

Definición 4.8 *Sea $f : P^n \times \mathcal{P}^*(X) \longrightarrow \mathcal{P}^*(X)$ una función de elección social. Diremos que f es manipulable (relativo al levantamiento $\succeq \mapsto \sqsupseteq_{\succeq}$) si, y sólo si, existen k, $\succeq$, u, y V tales que*

$$f_{u[\succeq/k]}(V) \sqsupset_{\succeq_k} f_u(V).$$

En pocas palabras, podemos decir que una función de elección f es manipulable si existe una situación de manipulación sobre la misma. En este sentido, debe existir un individuo k (el manipulador), la preferencia $\succeq$ (el objeto con que se manipula), un perfil u (la situación de voto donde se pueda manipular) y V el conjunto de candidatos (sobre el que se espera tener mejores resultados con respecto a la preferencia inicial $\succeq_k$).

Definición 4.9 *Una función de elección social f satisface la* Condición de Dominio Estándar Fuerte *(DEF) si satisface la condición de Dominio Estándar y para todo $x \in X$ existe un perfil u tal que para todo y, $f_u(\{x, y\}) = \{x\}$.*

Esta condición significa que para cualquier candidato x existe un perfil u tal que para cualquier agenda de dos elementos V (esto es $|V| = 2$) que contiene a x, el resultado de la elección es x. En otras palabras, u hace a x ganador contra cualquier otro candidato.

Es importante notar que la condición de Pareto y la condición de Dominio Estándar implican la condición de Dominio Estándar Fuerte. Para ver esto, es suficiente tomar un perfil u donde cada individuo tiene a la alternativa x como la más preferida. Así, para cualquier individuo i y para cualquier otra alternativa y, $x \succ_i y$. Entonces, por la condición de Pareto $y \notin f_u(\{x, y\})$ y, necesariamente, por la condición de Dominio Estándar, se tiene que $f_u(\{x, y\}) = \{x\}$.

Definición 4.10 (Dictador Débil (DD)) *Una función de elección social f tiene un Dictador Débil k si para todo $x \in X$, existe $\succeq^x$ tal que para todo $y \in X$, $x \in f_{u[\succeq^x/k]}(\{x, y\})$.*

En contraste a la noción de dictador, que es una noción excluyente (si el dictador k prefiere a una alternativa x ante una alternativa y, entonces se excluye a la alternativa y del resultado de la elección), la noción de dictador débil es incluyente (el dictador puede incluir una alternativa x en el resultado). De hecho, si i es un dictador, entonces i es un dictador débil. Para verificarlo, basta definir un preorden total $\succeq^x$ de manera tal que x se el único elemento maximal. Entonces, obviamente $f_{u[\succeq^x/i]}(\{x, y\}) = \{x\}$, para cualquier $y \in X$.

El siguiente lema será útil en la demostración del teorema central de esta sección (Teorema 4.3).

Lema 4.5 *Sea f una función de elección social que satisface Explicaciones transitivas y Dominio Estándar Fuerte. Entonces para cualquier x, existe un perfil u tal que $f_u(X) = \{x\}$.*

www.bdigital.ula.ve

C.C.Reconocimiento

Demostración. Dado x, consideremos u tal que para todo y se tiene que $f_u(\{x,y\}) = \{x\}$ (la existencia de u está garantizada por la propiedad de Dominio Estándar Fuerte). Como f satisface la propiedad de Explicaciones Transitivas, se tiene que para cada agenda $V \in \mathcal{P}^*(X)$, $f_u(V)$ esta determinada por un preorden total $\succeq_u$ de la siguiente manera (Ver Proposición 4.1):

$$f_u(V) = \max(V, \succeq_u)$$

Afirmamos que, por la escogencia de u, se tiene $\max(X, \succeq_u) = \{x\}$. Razonemos por el absurdo, supongamos que ese no es el caso; por lo tanto, existe y tal $y \succeq_u x$; así $\max(\{x,y\}, \succeq_u) \neq \{x\}$; es decir, $f_u(\{x,y\}) \neq \{x\}$, una contradicción.
Así, $\max(X, \succeq_u) = \{x\}$, y por lo tanto $f_u(X) = \{x\}$. ∎

Teorema 4.3 *Sea $f : P^n \times \mathcal{P}^*(X) \longrightarrow \mathcal{P}^*(X)$ una función de elección social que satisface Dominio Estándar Fuerte y Explicaciones Transitivas. Sea $\succeq \mapsto \sqsupseteq_{\succeq}$ un levantamiento que satisface las condiciones de Simple Dominancia 1 y 2. Entonces, relativo a este levantamiento, f es manipulable, o f tiene un dictador débil.*

Demostración. Sea $f : P^n \times \mathcal{P}^*(X) \longrightarrow \mathcal{P}^*(X)$ una función de elección social que satisface Dominio Estándar Fuerte y Explicaciones Transitivas. Sea $\geq^*$ un orden lineal sobre X fijado para el resto de la demostración.
Definamos $g : \mathrm{P}^n \longrightarrow X$ de la siguiente manera

www.bdigital.ula.ve

$$g(u) = \max(f_u(X), \geq^*). \tag{4.8}$$

Claramente g es un esquema de voto. Por el Lema 4.5 se ve fácilmente que g satisface la condición de de Dominio Estándar Gibbard. Así, por el Teorema 4.1, g tiene un dictador Gibbard o g es manipulable.

Ahora, con el propósito de finalizar la demostración demostraremos las siguientes afirmaciones:

Afirmación 4.3 *Si g tiene un Dictador Gibbard, entonces f tiene un Dictador Débil.*

Demostración. Supongamos que g tiene un Dictador Gibbard. Por la hipótesis existe $k \in N$ (el dictador Gibbard) tal que para cualquier $x \in X$, existe $\succeq_x \in \mathrm{P}$ tal que para cualquier perfil $u \in \mathrm{P}^n$ tenemos

$$g(u[\succeq_x /k]) = x,$$

esto significa que, $x = \max(f_{u[\succeq_x/k]}(X), \geq^*)$. Así, $x \in \max(X, \succeq_{u[\succeq_x/k]})$. Necesariamente, $x \in \max(\{x,y\}, \succeq_{u[\succeq_x/k]})$, es decir, $x \in f_{u[\succeq_x/k]}(\{x,y\})$. Por lo tanto, k es también un Dictador Débil para f. ∎

Afirmación 4.4 *Si g es manipulable, entonces f es manipulable.*

C.C.Reconocimiento

Demostración. Asumamos que g es manipulable. Entonces existe una situación de manipulabilidad; es decir, existen $u \in \mathrm{P}^n$, $k \in N$, y $\succeq \in \mathrm{P}$ tales que

$$g(u[\succeq /k]) \succ_k g(u). \tag{4.9}$$

Definamos x y y de la siguiente manera: $g(u[\succeq /k]) = \{x\}$ y $g(u) = \{y\}$. Será suficiente verificar lo siguiente

$$f_{u[\succeq/k]}(\{x,y\}) \sqsupset_{\succeq_k} f_u(\{x,y\}). \tag{4.10}$$

Notemos que $f_{u[\succeq/k]}(\{x,y\}) \neq \{y\}$. Si este no es el caso, entonces por Explicaciones Transitivas, podemos tener $y \succ_{u[\succeq/k]} x$ y por lo tanto $x \notin \max(X, \succ_{u[\succeq/k]})$. En consecuencia, de nuevo por Explicaciones Transitivas, $x \notin f_{u[\succeq/k]}(X)$ y por lo tanto $x \neq \max(f_{u[\succeq/k]}(X), >^*)$; es decir, $x \neq g(u[\succeq /k])$, lo que es una contradicción. Con un razonamiento análogo, podemos ver que $f_u(\{x,y\}) \neq \{x\}$.

En consecuencia, existen sólo cuatro casos posibles para las imágenes de $f_{u[\succeq/k]}(\{x,y\})$ y $f_u(\{x,y\})$:

(a) $f_{u[\succeq/k]}(\{x,y\}) = \{x\}$

(b) $f_{u[\succeq/k]}(\{x,y\}) = \{x,y\} \wedge x >^* y$

(c) $f_u(\{x,y\}) = \{y\}$

(d) $f_u(\{x,y\}) = \{x,y\} \wedge y >^* x$

www.bdigital.ula.ve

Los casos (b) y (d) simultáneamente son claramente imposibles. Los demás casos; es decir (a) y (c), (a) y (d), y (b) y (c) son posibles. Veamos el caso (a) y (d). Para ver que lo establecido en (4.10) es cierto, es suficiente verificar que $\{x\} \sqsupset_{\succeq_k} \{x,y\}$. Por la definición de x e y, y lo establecido en (4.9), se tiene que $x \succ_k y$. Así, por la propiedad Simple Dominancia 2 se tiene que $\{x\} \sqsupset_{\succeq_k} \{x,y\}$.

Ahora, examinemos el caso (a) y (c). De nuevo, por la definición de x e y y lo establecido en (4.9), se tiene que $x \succ_k y$. Así, por la propiedad de extensión, $\{x\} \sqsupset_{\succeq_k} \{y\}$.

Para el caso (b) & (c), tenemos, por definición de x e y, y lo establecido en (4.9), que $x \succ_k y$. Así, por la propiedad de Simple Dominancia 1, se tiene que $\{x,y\} \sqsupset_{\succeq_k} \{y\}$.
Así mostramos que f es manipulable.

∎

Note que si $f : P^n \times \mathcal{P}^*(X) \longrightarrow \mathcal{P}^*(X)$ es una función de elección social que satisface Dominio Estándar Fuerte y Explicaciones Transitivas, Entonces f tiene un Dictador Débil o f es manipulable con respecto al levantamiento leximax o al levantamiento Egli-Milner.

Finalizaremos esta sección con un ejemplo a fin de ilustrar los resultados previos

Ejemplo 4.1 *Sea $X = \{x,y,z\}$ y $N = \{1,2,3\}$. Definamos una función de elección social $f : P^3 \times \mathcal{P}^*(X) \longrightarrow \mathcal{P}^*(X)$, la función de Borda, como sigue. Primero, para cada relación de preferencia $\succeq$ y para cualquier $\alpha \in X$ definamos el Rango de Borda α relativo a $\succeq$, denotado*

C.C.Reconocimiento

por $r_{\succeq}(\alpha)$*, como el nivel en que aparece* α *en el preorden total* $\succeq$*. Por ejemplo, si* $x \succ y \succ z$ *se tiene que* $r_{\succeq}(x) = 2$*,* $r_{\succeq}(y) = 1$ *y* $r_{\succeq}(z) = 0$*. Extenderemos aditivamente esta noción sobre todo el perfil. Más precisamente, si el perfil* u *es* $(\succeq_1, \succeq_2, \succeq_3)$*, definimos* $r_u(\alpha) = \Sigma_{i=1}^{3} r_{\succeq_i}(\alpha)$*. Por ejemplo, si*

$$u = \left\{ \begin{array}{ccc} & z & x \\ xy & y & z \\ z & x & y \end{array} \right\}$$

entonces $r_u(x) = 3$*,* $r_u(y) = 2$ *y* $r(z) = 3$*.*

Podemos asociar al perfil u*, una relación de preferencia* $\succeq_u$ *colocando* $\alpha \succeq_u \beta$ *si, y sólo si,* $r_u(\alpha) \geq r_u(\beta)$*. Es muy fácil probar que la relación de preferencia* $\succeq_u$ *es un preorden total. Finalmente expresamos* $f_u(V) = \max(V, \succeq_u)$*. Así, para el perfil* u *previamente definido se tiene que*

$$\succeq_u = \left\{ \begin{array}{c} xz \\ y \end{array} \right\}$$

y $f_u(X) = \{x, z\}$*.*

Así, esta función no genera un esquema de voto g *a través de la ecuación* $g(u) = f_u(X)$*. No obstante, esta función satisface cuatro de las cinco propiedades del Teorema de Arrow (ver* **??***, excepto la propiedad de Independencia de Alternativas Irrelevantes.*

Ahora, si pudiéramos introducir un sabio *que resuelva conflictos, podemos tener un esquema de voto; para ello fijamos un orden lineal (el sabio)* $\geq^*$ *sobre* X *y ponemos* $g(u) = \max(f_u(X), \geq^*)$*. No resulta difícil ver que* g *es un esquema de voto que satisface la condición de Dominio Estándar Gibbard y* g *no tiene un Dictador Débil, así en virtud del teorema Gibbard-Satterthwaite 4.1,* g *es manipulable. En realidad, si* $z >^* y >^* x$ *y* u *está definido como antes, tenemos* $g(u) = \max(f_u(X), \geq^*)$*; es decir,*$g(u) = \max(\{x, z\}, \geq^*) = z$ *y si*

$$u' = \left\{ \begin{array}{ccc} x & z & x \\ y & y & z \\ z & x & y \end{array} \right\}$$

entonces $f_{u'}(\{x, y, z\}) = \{x\}$*, lo que resulta que* $g(u') = x$*. Así, si denotamos por* $\succeq'$ *la relación que satisface que* $x \succ' y \succ' z$*,* u' *es de hecho* $u[\succeq' /1]$*. Pero recordemos que en las preferencia* verdadera *del individuo 1 (la primera proyección en* u*) se tiene que* $x \succ_1 z$*, así*

$$g(u[\succeq' /1]) = g(u') = x \succ_1 z = g(u)$$

es decir, la tripleta $(1, u, \succeq')$ *es una situación de manipulabilidad para* g*. Así, el individuo 1, mintiendo, obtiene un resultado que realmente prefiere con respecto a su preferencia individual. De hecho, por la afirmación 4.4,* f *es manipulable.*

Este ejemplo tiene, en efecto, una interpretación interesante. Supongamos que N es el conjunto de tres expertos que evalúan un articulo para una conferencia; x es la variable cuya interpretación significa que el articulo es aceptado, y significa que el articulo debe ser revisado y por último z significa que el articulo es rechazado. El perfil u representa la opinión

www.bdigital.ula.ve

C.C.Reconocimiento

de los tres expertos y el *sabio* es la relación de preferencia estricta $z >^* y >^* x$ y puede interpretarse como la política del comité editorial del evento. Notamos que en el perfil u la opinión del primer experto escoge aceptar o revisar el articulo; es decir, para el es indiferente aceptarlo o mandarlo a revisión pero no quiere rechazar el articulo. Sin embargo, luego de la elección existe un empate entre x y z, es decir un conflicto. Si se llama al sabio para redimir el conflicto entonces gana la opción de rechazar el articulo, cosa que el primer experto no le favorece. Por tal razón, el primer experto prefiere cambiar su preferencia inicial (miente) para tener un resultado mas favorable. esto se ve en el perfil u. Luego de esto no existe necesidad de llamar al *sabio* pues el resultado es x. Así, el primer experto consigue que el articulo sea aceptado.

Note que en este caso se ilustra el Teorema 4.3; es decir, la tripleta $1, u, \succeq', \{x, z\}$ es una situación de manipulabilidad para f con respecto al levantamiento $\sqsupset_{\succeq_1}$ que satisface las propiedades Simple Dominancia 1 and 2, ya que

$$f_{u[\succeq'/1]}(\{x, z\}) = \{x\} \sqsupset_{\succeq_1} \{x, z\} = f_u(\{x, z\})$$

Con estas reflexiones terminamos este capítulo.

www.bdigital.ula.ve

C.C.Reconocimiento

CAPÍTULO 5

Decisiones Múltiples

La teoría de decision es un área que se origina con problemas de la economía. Hoy en día, es un area de estudio interdiciplinaria relacionada con una gran cantidad de ramas de la ciencia, la ingeniería y principalmente de la economía, incluso en la psicología del consumidor. Se puede plantear, una situación de toma de decisiones con ejemplos muy sencillos. Consideremos la siguiente situación: una persona debe escoger de un cartón de huevos uno de ellos y verificar si está bueno o no. Si se realiza una apuesta sobre este hecho, la persona debe decidir entre apostar si el huevo está bueno o está dañado. Si no se conoce información adicional sobre esta situación, no resulta evidente decidir cual opción es más conveniente. Sin embargo, si se conoce la probabilidad de cuántos huevos salen dañados por cartón, entonces sería más fácil decidir ante la situación planteada.

www.bdigital.ula.ve

Actualmente existen muchos mecanismos para la toma de decisiones individuales, y en gran parte se a estudiado a través de métodos cuantitativos. El conjunto sobre cual se toman decisiones son conocidos en la literatura como aptos, políticas o alternativas. Estas políticas pueden estar definidas de diversas maneras. En la vida real, y tanto en el ámbito profesional como el personal, nos vemos enfrentados a multitud de situaciones en las que tenemos que decidir entre varias alternativas. La propia optimización no es más que una forma de tomar una decisión entre unas alternativas factibles.
En el caso particular de la teoría de decisión ordinal, un individuo toma decisiones en función de una información sobre conjuntos de estados o situaciones y un conjunto de consecuencias u ocurrencias posibles. Por ejemplo, si un empresario debe decidir entre comprar un equipo o no, debe considerar el conjunto de estados que le permitan o no la compra de dicho equipo, como también las consecuencias de comprar ese equipo en cada estado considerado.

En nuestro caso de estudio, la información de un individuo la representaremos por dos conjuntos finitos: Un conjunto de estados S que representa eventos o eventualidades y un conjunto de consecuencias X que representa los posibles resultados al aplicar una política sobre el conjunto de estados. El conjunto de políticas X^S es el conjunto de todos las posibles funciones de S en X. Para referirnos a las políticas usaremos las letras α, β, γ, f, g etc.

C.C.Reconocimiento

En este sentido, tomar una decisión es encontrar, a través de algún mecanismo, la mejor política. Supondremos que un individuo que posee un conjunto de estados S y un conjunto de consecuencias X, tiene además relaciones de preferencia sobre estos conjunto. En otras palabras, el individuo sabe ordenar los estados y consecuencias a través de preordenes totales.

Evidentemente, si el problema de decisión trata de escoger la mejor política, entonces debemos establecer un método o procedimiento para poder asociar al conjunto de todas las políticas una relación que nos permita compararlas.

5.1 La teoría de Savage

El estudio de la utilidad esperada en el marco de la teoría de decisión cuantitativa, consiste en clasificar las políticas o acciones a través de *la esperanza de la utilidad de las consecuencias* de cada política. En otras palabras, de la esperanza de la variable aleatoria que es la composición de la utilidad con la política $(u \circ f)$. La esperanza es un promedio ponderado en caso discreto y en el caso continuo es la generalización de esta idea, o bien, a través de series o integrales dependiendo de la naturaleza del espacio.

Recordando que una política es una función del conjunto de estados al conjunto de todas las posibles consecuencias. Si S denota el conjunto de los estados y X denota el conjunto de las consecuencias, una política no es más que una función $\alpha : S \to X$. El conjunto de todas las políticas se denota por X^S.
Uno de los problemas de mayor interés en teoría de decisión es tener criterios para decidir cuál es la mejor política. Un criterio muy natural surge cuando se dispone de una probabilidad p sobre los eventos de S y de una función u de utilidad sobre las consecuencias, $u : X \to R$. Entonces se clasifican las políticas a través de la utilidad esperada, la esperanza de las funciones $u \circ \alpha$, donde α es una política. Las mejores políticas son las que maximizan la utilidad esperada.
Ahora bien, dada una función de utilidad u sobre X y una función de probabilidad p sobre S, se define la utilidad esperada de α de la manera siguiente (para el caso S discreto)

$$UE_{p,u}(\alpha) = \sum_{s \in S} p(s)u(\alpha(s))$$

y se clasifican las políticas como

$$\alpha \succeq \beta \Leftrightarrow UE_{p,u}(\alpha) \geq UE_{p,u}(\beta).$$

En 1954 el modelo de la utilidad esperada fue caracterizado axiomáticamente por Savage [32]. Savage propone que la relación $\succeq$ satisface ciertos axiomas (axiomas de Savage) si, y solo si, existe una única función de probabilidad sobre los eventos de S y una única (salvo transformaciones lineales) función de utilidad sobre las consecuencias X que caracteriza a la relación $\succeq$ a través de la utilidad esperada.

Savage, en la formulación de su Teoría, parte de la idea que el comportamiento "racional" de las personas en la toma de decisiones puede ser axiomatizado. Esta racionalidad se refiere a la

www.bdigital.ula.ve

C.C.Reconocimiento

coherencia y consistencia en sus preferencias. Queremos, precisamente mostrar la axiomática que describe este comportamiento racional.

Sean S un conjunto de estados, X un conjunto de consecuencias, y X^S el conjunto de todas las políticas o acciones. Consideremos una relación binaria $\succeq$ sobre X^S, tal que $\alpha \succeq \beta$ significa que α "*es por lo menos tan buena como*" β.
El primer axioma de Savage es el siguiente:

(S1) La relación $\succeq$ es un preorden total sobre X^S.

Ahora bien, dado un evento $A \in \mathcal{P}(S)$ y dadas dos políticas $\alpha, \beta \in X^S$, denotaremos por $\alpha A \beta$ la política que toma los valores de α en los estados de A y los de β en otro caso. Es decir, para todo $s \in S$,

$$(\alpha A \beta)(s) = \begin{cases} \alpha(s) & \text{si} \quad s \in A \\ \beta(s) & \text{si} \quad s \notin A \end{cases} \tag{5.1}$$

Cuando α es la función constante igual a x y β la función constante igual a y escribimos xAy en vez de $\alpha A \beta$.
En general, dados $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventos que forman una partición de S y α_1,$\alpha_2, \ldots,$ α_n políticas, denotaremos por $\alpha_1 A_1 \alpha_2 A_2 \ldots, A_{n-1} \alpha_n A_n$ la política cuyo resultado es α_i si $s \in A_i$. Formalmente, para cualquier $s \in S$ existe un único i tal que $s \in A_i$, de manera que

$$(\alpha_1 A_1 \alpha_2 A_2 \ldots, A_{n-1} \alpha_n A_n)(s) = \alpha_i(s).$$

www.bdigital.ula.ve

De hecho, $\alpha A \beta$ abrevia $\alpha A \beta A^c$, donde A^c es el complemento de A.

El segundo axioma de Savage, es conocido como el *Principio de la Cosa Segura.*

(S2) $\forall A \in \mathcal{P}(S)$, $\forall \alpha, \beta, \gamma, \kappa \in X^S$,

$$\alpha A \gamma \succeq \beta A \gamma \Leftrightarrow \alpha A \kappa \succeq \beta A \kappa.$$

Un evento A se dice *nulo* si, y solo si, para todo par α, β en X^S se tiene que $(\alpha \succeq \beta)_A$. La

noción de evento nulo puede interpretarse como *una situación donde no existen dos políticas tal que una sea estrictamente preferida a la otra.*

Dada una relación de preferencia $\succeq$ sobre X^S, se puede definir una relación sobre el conjunto de consecuencias X, de la siguiente manera: para cada $x \in X$, α_x denota la política constante de valor x; es decir, para cada $s \in S$, $\alpha_x(s) = x$. Identificamos de manera natural el conjunto de las políticas constantes $\{\alpha_x : x \in X\}$ con el conjunto de las consecuencias X.
Ahora bien, dado $\succeq$ sobre X^S, definimos la relación $\geq_p$ sobre X de la siguiente manera:

$$x \geq_p y \Leftrightarrow \alpha_x \succeq \alpha_y \tag{5.2}$$

Observemos que la parte estricta ($>_p$) y la parte indiferente ($\sim_p$), están dadas por

$$(x >_p y \Leftrightarrow \alpha_x \succ \alpha_y) \quad \wedge \quad (x \sim_p y \Leftrightarrow \alpha_x \backsim \alpha_y).$$

Veamos el tercer axioma

C.C.Reconocimiento

(S3) Para todo evento no nulo A,

$$(\alpha_x \succeq \alpha_y)_A \Leftrightarrow x \geq_p y.$$

La relación sobre las políticas también induce una relación de preferencia sobre el conjunto de eventos, considerando las políticas que toman dos valores como consecuencia. Sean $x, y \in X$ tales que $x >_p y$ y sea $\{x, y\}^S$; luego, si $\gamma \in \{x, y\}^S$, entonces $\gamma = xAy$, donde $A = \{s : \gamma(s) = x\}$.

Dada $\succeq$ sobre X^S, podemos definimos la relación de plausibilidad, $\sqsupseteq_L$, sobre $\mathcal{P}(S)$ de la siguiente manera: para todo par $A, B \in \mathcal{P}(S)$

$$A \sqsupseteq_L B \Leftrightarrow \forall x, y \in X \,\text{con}\, x >_p y, xAy \succeq xBy. \tag{5.3}$$

Notemos que, $\{x, y\}^S$ es isomorfo al conjunto de eventos 2^S. Sin embargo, si escogemos otras consecuencias x', y' con $x' >_p y'$, entonces la clasificación de las políticas en $\{x, y\}^S$ puede ser diferente a la clasificación de las políticas en $\{x', y'\}^S$, con respecto a la relación $\succeq$. Por esta razón, Leonard Savage propone un cuarto axioma que simplifica enormemente la definición anterior:

(S4) $\forall A, B \subset S$, $\forall x, y, x', y' \in X$ tales que $x >_p y$ y $x' >_p y'$ se tiene que

$$xAy \succeq xBy \Leftrightarrow x'Ay' \succeq x'By'.$$

www.bdigital.ula.ve

Necesariamente se necesitaría de otro axioma para que la relación $\sqsupseteq_L$ sea distinta a la trivial, en el sentido que no todos los eventos son indiferentes al vacío; es decir, se necesita que exista por lo menos dos niveles en la clasificación de X. Esto se concreta en el quinto axioma de Savage.

(S5) Existen $x, y \in X$ tales que $\alpha_x \succ \alpha_y$.

Este axioma asegura que S es un evento no nulo, ya que existen dos funciones constantes que se pueden comparar estrictamente. Los siguientes axiomas son un poco más técnicos.

(S6) Para cualesquiera $\alpha, \beta, \gamma \in X^S$, si $\alpha \succ \gamma$, existe una partición $\{S_1, \ldots, S_n\}$ sobre S tal que para todo $i = 1 \ldots n$ se tiene que $\gamma S_i \alpha \succ \beta$ y $\alpha \succ \gamma S_i \beta$.

Veamos el séptimo y último axioma de Savage.

(S7) Dados $\alpha, \beta \in X^S$ y $A \subseteq S$,

- Si para todo $a \in A$, $(\alpha \succeq \beta(a))_A$, entonces $(\alpha \succeq \beta)_A$;
- Si para todo $a \in A$, $(\beta(a) \succeq \alpha)_A$, entonces $(\beta \succeq \alpha)_A$.

En líneas generales podemos decir que los dos axiomas anteriores buscan la interpretación de los modelos de decisión cuantitativa en el marco de la decisión cualitativa; es decir, buscan asegurar la existencia de funciones de probabilidad y funciones de utilidad en el caso cualitativo.

C.C.Reconocimiento

Teoremas de representación de Savage

Savage propone y demuestra dos teoremas fundamentales. Uno en el caso para X finito y otro en el caso infinito. La demostración de estos los podemos encontrar en [32].

Teorema 5.1 *Si X es finito y $\succeq$ una relación sobre X^S. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

- $\succeq$ *satisface* **S1-S6***;*
- *Existe una única medida de probabilidad p sobre todos los eventos de S la cual es finitamente aditiva y satisface*

  $$\forall A \subseteq S, \forall r \in [0,1], \exists B \subseteq A \, \textit{tal que} \, p(B) = rp(A)$$

  y existe una única (salvo transformaciones lineales) función no constante $u : X \to \mathbb{R}$ tal que para todo par $\alpha, \beta \in X^S$

  $$\alpha \succeq \beta \Leftrightarrow UE_{p,u}(\alpha) \geq UE_{p,u}(\beta)$$

donde

$$UE_{p,u}(\alpha) = \int (u \circ \alpha) dp$$

En este se considera X finito, por lo tanto, u es acotado. Si u no es acotado, pueden existir política cuyo valor esperado es infinito. En el caso X infinito, Savage añade el axioma S3 con la finalidad de garantizar que u es acotado.

www.bdigital.ula.ve

Teorema 5.2 *(Teorema de Savage) Si $\succeq$ una relación sobre X^S. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

- $\succeq$ *satisface S1-S7;*
- *Existe una única medida de probabilidad p sobre todos los eventos de S la cual es finitamente aditiva y satisface:*

  $$\forall A \subseteq S, \forall r \in [0,1], \exists B \subseteq A \, \textit{tal que} \, p(B) = rp(A)$$

  y existe una única (salvo transformaciones lineales) función no constante y acotada $u : X \to \mathbb{R}$ tal que para todo par $\alpha, \beta \in X^S$

  $$\alpha \succeq \beta \Leftrightarrow UE_{p,u}(\alpha) \geq UE_{p,u}(\beta)$$

donde

$$UE_{p,u}(\alpha) = \int (u \circ \alpha) dp.$$

Observemos que estos dos resultados caracterizan cómo ordenar políticas bajo ciertas condiciones. A continuación mostraremos otra manera de ordenar políticas mediante la Regla de Dominancia Plausible. Veamos de que se trata.

C.C.Reconocimiento

5.2 Toma de decisiones a través de la regla de dominancia plausible

Los criterios cualitativos para toma de decisión bajo incertidumbre, se fundamentan en clasificar las políticas a partir de relaciones de plausibilidad sobre el conjunto de estados o de relaciones de preferencias sobre el conjunto de consecuencias. La Regla de Dominancia Plausible (RDP), fue propuesta por Dubois, Fargier y Prade [11], con el nombre de *Regla de Levantamiento*, motivada fundamentalmente por la regla mayoritaria utilizada en la teoría de elección social. Esta regla es usada cuando el conjunto de estados es finito. En palabras, la regla dice que una política α es mejor que una política β si, y solo si, el conjunto de estados donde α le gana a β es mejor, relativo a algún levantamiento, que el conjunto de estados en donde β le gana a α.

Formalmente, sea $\succeq^x$ una relación de preferencia sobre X y $\sqsupseteq^s$ una relación de plausibilidad sobre $\mathcal{P}(S)$. Diremos que la relación $\succeq$ sobre X^S está definida a través de la *Regla de Dominancia Plausible* (RDP) con parámetros $(\succeq^x, \sqsupseteq^s)$ si, para cualesquiera $\alpha, \beta \in X^S$,

$$\alpha \succeq \beta \Leftrightarrow [\alpha \succ^x \beta] \sqsupseteq^s [\beta \succ^x \alpha]$$

donde $[\alpha \succ^x \beta] = \{s \in S : \alpha(s) \succ^x \beta(s)\}$.

Si $\sqsupseteq^s$ es una relación de plausibilidad sobre $\mathcal{P}(S)$, la parte estricta e indiferente de $\sqsupseteq^s$, la denotaremos por $\sqsupset^s$ y $\cong^s$, respectivamente.. Esta regla de decisión preserva algunos de los axiomas racionales de Savage y depende básicamente de dos parámetros: una relación de preferencia $\succeq^x$ sobre el conjunto de las consecuencias X y una relación de preferencia $\sqsupseteq^s$, que llamaremos de plausibilidad, sobre todos los eventos de S.

A propósito de plantear un teorema de representación a través de la regla de dominancia plausible, Fargier y Perny [16], proponen un axioma llamado *Independecia Cualitativa*, denotado por **QI**. En este mismo orden de ideas, Dubois et al. [13, 14], proponen un versión más general del axioma **QI** y lo llaman axioma de *Invarianza Ordinal* denotado por **OI**.

En los trabajos publicados en el 2002 y 2003, Dubois, Fargier, Perny y Prade [13, 14] estudian el axioma **OI** con el propósito de dar un teorema de representación a través de la regla de dominancia plausible con respecto a una relación posibilista sobre el conjunto de los eventos. En [14] dan dos Teoremas de representación más completos que el propuesto en por Fargier y Prade en 1999 [16].

El axioma de Invarianza Ordinal es muy natural, ya que consiste en verificar si los eventos dominantes entre dos pares de políticas coinciden; si estos eventos son iguales (ordinalmente equivalentes), entonces estos pares de políticas preservan la misma clasificación. A continuación veremos la definición formal de pares de políticas ordinalmente equivalente y posteriormente el axioma de invarianza ordinal

Ahora bien,dada una relación $\succeq$ sobre X^S, diremos que dos pares de políticas (α, β) y (α', β') son *ordinalmente equivalentes*, denotadas por $(\alpha, \beta) \equiv (\alpha', \beta')$ si, y solo si, $[\alpha >_p \beta] = [\alpha' >_p$

www.bdigital.ula.ve

C.C.Reconocimiento

$\beta']$ y $[\beta >_p \alpha] = [\beta' >_p \alpha']$; donde $>_p$ es la parte estricta de $\geq_p$, la relación sobre X definida por la proyección de $\succeq$ en los actos constantes.

Formalmente, el axioma de Invarianza Ordinal (**OI**) dice que, una relación $\succeq$ sobre X^S satisface *Invarianza Ordinal* (**OI**) si, y solo si, para cualesquiera $\alpha, \alpha', \beta, \beta' \in X^S$ se tiene

$$(\alpha, \beta) \equiv (\alpha', \beta') \Rightarrow (\alpha \succeq \beta \Leftrightarrow \alpha' \succeq \beta')$$

Las relaciones $\succeq$ que satisfacen OI son aquellas relaciones $\succeq$ definidas a través de Regla de dominancia plausible; es decir. dadas $\succeq^x$ una relación total sobre X y una relación $\sqsupseteq^s$ sobre $\mathcal{P}(S)$ tal que $S \sqsupset^s \emptyset$. Si $\succeq$ es una relación sobre X^S definida a través de la regla de dominancia plausible con parámetros $(\succeq^x, \sqsupseteq^s)$, tal que

$$\alpha \succeq \beta \Leftrightarrow [\alpha >_X \beta] \sqsupseteq^s [\beta >_X \alpha]$$

entonces

1. $\succeq$ es reflexiva,
2. $\forall x, y \in X, (x \succeq^x y \Leftrightarrow x \geq_p y)$
3. $\succeq$ es total en los actos constantes ($\geq_p$ es total),
4. $\succeq$ satisface OI,

www.bdigital.ula.ve

Además, si consideramos $\succeq^x$ y $\sqsupseteq^s$ relaciones de preferencia sobre X y $\mathcal{P}(S)$, respectivamente, tenemos que, si $\succeq$ es definida a través de **RDP** con $(\succeq^x, \sqsupseteq^s)$ entonces $\succeq$ satisface **OI**.

Dubois, Fargier y Perny en [15] demostraron que dada una relación $\succeq$ sobre X^S, la relación $\succeq$ es total en las políticas constantes y satisface **OI** y **S5** si, y solo si, existen una relación $\sqsupseteq^s$ sobre $\mathcal{P}(S)$ tal que $S \sqsupset^s \emptyset$ y una relación total $\succeq^x$ sobre X tal que $x >_X y$ para algún par $x, y \in X$ tales que para todo par $\alpha, \beta \in X^S$,

$$\alpha \succeq \beta \Leftrightarrow [\alpha >_X \beta] \sqsupseteq^s [\beta >_X \alpha]$$

Este resultado, al igual que los trabajos de Savage, permiten ordenar políticas.

C.C.Reconocimiento

5.3 Decisiones múltiples

Claramente el problema de la toma de decisiones no es algo trivial. Sin embargo, trataremos de enfrentar un problema aún más complejo que es el de la decisiones múltiples o decisión social. Esto consiste en considerar un colectivo de individuos que tomas decisiones sobre un conjunto de políticas o acciones, para luego establecer algunos mecanismos de decisión social; es decir, plantear un decisión para el grupo considerando todas las decisiones individuales. Para ellos usaremos la teoría de elección social y la teoría de decision ordinal cualitativa.

Como lo vimos anteriormente, en los trabajos de Dubois se pueden establecer preferencias sobre políticas a través de la regla de dominancia plausible sobre todas las posibles políticas. Por otro lado, en la teoría de elección social se establecen preferencias sobre alternativas y estas preferencias - multiples- las de cada individuo están representadas en un perfil de preferencias, como lo vimos en el capítulo 2. La idea es entonces, crear perfiles como en el marco de la teoría de la elección social donde el conjunto de alternativas sean todas las posibles políticas como en el marco de la decisión ordinal. Así, nuestro conjunto de alternativas sería entonces el conjunto de todas las políticas X^S. Con el propósito de ilustrar la situación que queremos introducir veamos el siguiente ejemplo.

Supongamos que $\{f, g, h\} \subseteq X^S$ un subconjunto de políticas que tiene tres elementos y están ordenadas por tres individuos distintos; es decir, $|N| = 3$. Esto genera un perfil u de información sobre las decisiones de las políticas f, g y h como se muestra en el siguiente perfil.

$$u = \begin{pmatrix} h & f & \\ g & h & gf \\ f & g & h \\ — & — & — \\ \succeq_1 & \succeq_2 & \succeq_3 \end{pmatrix}$$

En el perfil anterior podemos observar que el individuo 1 prefiere a la alternativa h antes que a la g y a la alternativa g antes que a la f, generando así un orden lineal sobre las políticas o alternativas. Si suponemos que el orden de preferencia del individuo 1 viene dado a través de la regla de dominancia plausible, entonces se tendría lo siguiente.

$$h \succeq_1 g \Leftrightarrow [s : h(s) \succ_x^1 g(s)] \sqsupseteq_1 [s : g(s) \succ_x^1 h(s)]$$

Así, cuando existe un orden $\succeq_x^1$ sobre el conjunto de consecuencias X y existe un orden $\succeq_s^1$ sobre el conjunto de estados S se pueden ordenar las políticas vía la Regla de Dominancia Plausible si podemos extender el $\succeq_s$ a un orden $\sqsupseteq$ sobre los eventos. Estos ordenes permiten generar el orden individual sobre las políticas de manera natural, donde $\sqsupseteq_1$ es un levantamiento del orden $\succeq_s^1$. Esta situación se da para cada uno de los individuos.

De forma general, podemos ilustrar a través del siguiente esquema la situación de decisiones múltiples usando la regla de dominancia plausible para generar el orden sobre las políticas

www.bdigital.ula.ve

C.C.Reconocimiento

de cada individuo i.

$$\begin{pmatrix} \succeq_1 & \succeq_2 & \cdots & \succeq_n \\ \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \sqsupseteq_1 & \sqsupseteq_2 & & \sqsupseteq_n \\ \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ (\succeq_s^1, \succeq_x^1) & (\succeq_s^2, \succeq_x^2) & \cdots & (\succeq_s^n, \succeq_x^n) \end{pmatrix}$$

Observando lo anterior podemos visualizar mejor toda la información que está involucrada en una decisión múltiple, suponiendo que cada individuo use la regla de dominancia plausible para ordenar sus políticas. Así, cada individuo i tiene un orden $\succeq_s^i$ sobre los estado y un orden $\succeq_x^i$ sobre las consecuencias y una manera de levantar: $\succeq_s^i \longrightarrow \sqsupseteq^i$.

Ahora bien,si consideramos un perfil de preferencias sobre las políticas, sin tomar en cuenta la información que permite generar cada preferencia, fácilmente podemos usar las herramientas de la teoría de la elección social para agregar una decisión global sobre este perfil de preferencias sobre las políticas.
En otras palabras, si consideramos un perfil $u = (\succeq_1, \succeq_2, \cdots, \succeq_n)$, donde cada $\succeq_i$ es una preferencia definida sobre el conjunto de políticas X^S, entonces podemos aplicar una función de agregación, por ejemplo la función Borda, para obtener una preferencia global sobre el conjunto de políticas.

El problema práctico importante de considerar políticas como conjunto de alternativas es que la cardinalidad de X^S, $|X|^{|S|}$, puede ser un número muy grande dependiendo de X y de S. Así, desde un punto de vista computacional, puede ser trabajoso dar explícitamente preferencias sobre las políticas. Lo ideal sería crear un mecanismo que nos permita mostrar la relación de preferencia entre cualesquiera dos políticas sin tener la necesidad de conocer el orden sobre todas las políticas. O bien, tener un mecanismo, como la regla de dominancia plausible, en el que las preferencias sobre las políticas están codificadas por preferencias sobre los estados $\succeq_s$, preferencias sobre las consecuencias $\succeq_x$ y un levantamiento.

Para ilustrar la situación que queremos estudiar, veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 5.1 *Sea* $\mathrm{N} = \{1, 2, 3\}$ *el conjunto de individuos. Sean* $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ *y* $X = \{x_1, x_2, s_3\}$ *el conjunto de estados y el conjunto de consecuencias respectivamente. Consideremos para* $i \in \mathrm{N}$ *los siguientes pares de conjuntos con su respectivo preorden total* $(S, \succeq_i^s)$ *y* $(X, \succeq_i^x)$*, donde* S *representa el conjunto de estados y* X *el conjunto de consecuencias. Es decir, existen tres individuos con preferencias sobre los estados y preferencias sobre las consecuencias. En este ejemplo, para simplificar los cálculos, consideraremos el orden sobre el conjunto de consecuencias igual para todos los individuos. Esta información puede representarse a través de un perfil múltiple de la siguiente manera:*

$$u_{s,x} = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} s_1 & & s_4 & & s_2 & \\ s_3 & x_1 & s_3 & x_1 & s_3 & x_1 \\ s_4 & x_2 & s_2 & x_2 & s_1 & x_2 \\ s_2 & x_3 & s_1 & x_3 & s_4 & x_3 \\ — & — & — & — & — & — \\ \succeq_1^s & \succeq_1^x & \succeq_2^s & \succeq_2^x & \succeq_3^s & \succeq_3^x \end{array}\right)$$

www.bdigital.ula.ve

C.C.Reconocimiento

Usando el levantamiento posibilístico $\sqsupseteq_i^\pi$ para cada individuo i y la regla de dominancia plausible, estableceremos la relación de preferencia (para cada individuo) entre las políticas α y β que se definen a continuación:

	s_1	s_2	s_3	s_4
α	x_1	x_2	x_3	x_2
β	x_2	x_3	x_1	x_3

Como el orden sobre el conjunto X es igual para todos los individuos, entonces consideremos $A = \{s \in S : \alpha(s) \succ^x \beta(s)\}$ y $B = \{s \in S : \beta(s) \succ^x \alpha(s)\}$. Claramente, $A = \{s_1, s_2, s_4\}$ y $B = \{s_3\}$.
Para el individuo 1 se tiene entonces que $A \sqsupset_1^\pi B$, al igual que para los otros dos individuos, lo que significa que para cada i, $\alpha \succ_i \beta$. En consecuencia, en el perfil de decisiones múltiples donde aparecen todas las posibles políticas, las políticas α y β respetarían el siguiente orden.

$$u = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha & \alpha & \alpha \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta & \beta & \beta \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \succeq_1 & \succeq_2 & \succeq_3 \end{pmatrix}$$

www.bdigital.ula.ve

Aquí el perfil u representa las preferencias de los tres individuos sobre todo el conjunto de alternativas, pero se hace énfasis en la relación que tienen las políticas α y β en cada entrada. Evidentemente la condición de Pareto se satisface para la políticas α y β. En este sentido, cualquier función de elección que satisfaga explicaciones transitivas y la propiedad de Pareto aplicada al perfil u daría como resultado $\alpha \succ_u \beta$, donde $\succeq_u$ es la relación asociada al perfil u a través de explicaciones transitivas.

Ahora bien, recordando el planteamiento inicial y teniendo en cuenta que para cada individuo i existe un preorden total sobre los estados y un preorden total sobre las consecuencias, podemos extraer un perfil de preferencias sobre los estados y un perfil de preferencias sobre las consecuencias.

$$u_s = \begin{pmatrix} s_1 & s_4 & s_2 \\ s_3 & s_3 & s_3 \\ s_4 & s_2 & s_1 \\ s_2 & s_1 & s_4 \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \succeq_1^s & \succeq_2^s & \succeq_3^s \end{pmatrix} \qquad u_x = \begin{pmatrix} x_1 & x_1 & x_1 \\ x_2 & x_2 & x_2 \\ x_3 & x_3 & x_3 \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \succeq_1^x & \succeq_2^x & \succeq_3^x \end{pmatrix}$$

Con esta información pretendemos establecer un nuevo mecanismo de agregación global sobre las decisiones múltiples. Vamos a construir un preorden total asociado al perfil de preferencias sobre los estados y en el caso del perfil sobre las consecuencias consideraremos el mismo,

C.C.Reconocimiento

puesto que es igual para todos los individuos. Así tendríamos un par $(\succeq^s, \succeq^x)$*, y de nuevo, usando la regla de dominancia plausible podemos obtener un preorden global sobre las políticas* α *y* β*. Para esto usaremos la función de agregación de Borda sobre el perfil de preferencia sobre los estados. Veamos el siguiente esquema:*

$$u_s = \begin{pmatrix} s_1 & s_4 & s_2 & \to 4 \\ s_3 & s_3 & s_3 & \to 3 \\ s_4 & s_2 & s_1 & \to 2 \\ s_2 & s_1 & s_4 & \to 1 \\ — & — & — & \\ \succeq^s_1 & \succeq^s_2 & \succeq^s_3 & \end{pmatrix} \qquad u_x = \begin{pmatrix} x_1 & x_1 & x_1 & \to 3 \\ x_2 & x_2 & x_2 & \to 2 \\ x_3 & x_3 & x_3 & \to 1 \\ — & — & — & \\ \succeq^x_1 & \succeq^x_2 & \succeq^x_3 & \end{pmatrix}$$

Los números a la derecha de cada perfil representan el rango de cada nivel. Claramente, usando estos rangos se tiene que el rango de Borda para cada estado queda de la siguiente manera: $r_{u_s}(s_1) = 7, r_{u_s}(s_2) = 7, r_{u_s}(s_3) = 9$ *y* $r_{u_s}(s_4) = 7$*. Por lo tanto, el orden asociado a la regla de Borda sería* $s_3 \succ^s s_2 \simeq^s s_1 \simeq^s s_4$*. Dado que en el perfil* u_x *las relaciones de preferencias individuales son todas iguales entonces el orden asociado a la regla de Borda sería el mismo que cualquiera de ellos. Con esto conseguimos un par de órdenes sobre* S *y* X *y gráficamente quedan de la siguiente manera:*

$$\begin{matrix} & x_1 \\ s_3 & x_2 \\ s_1 s_2 s_4 & x_3 \\ — & — \\ \succeq^s & \succeq^x \end{matrix}$$

www.bdigital.ula.ve

Aplicando de nuevo la regla de dominancia plausible, con el levantamiento posibilístico, para el par anterior tendríamos que $\beta \succ \alpha$*.*

Es interesante notar que estos dos mecanismos conducen a resultados contrarios, y en consecuencia, una de las más importantes propiedades dentro de la teoría de elección social pareciera perderse cuando se usa el segundo método, la bien conocida propiedad de Pareto. Esto nos conduce a pensar de manera intuitiva que tal vez usar la función de Borda no resulta ser lo más sensato para obtener buenas propiedades dentro de la teoría de la elección social asociada a decisiones múltiples. A continuación, formalizaremos modelos de estructuras de decisión ordinal en el caso de múltiples decisiones y al mismo tiempo un mecanismo de decisión global considerando algunas propiedades de la teoría de elección social que se quisieran conservar.

5.4 Estructuras de decisiones múltiples

5.4.1 Modelo 1

Consideremos N un conjunto de individuos de tamaño n. Esto representa que existirán (al menos potencialmente) n preferencias individuales sobre las políticas. Cada individuo

C.C.Reconocimiento

suministra a la estructura de decisión una relación de preferencia sobre los estados y una relación de preferencia sobre las consecuencias. Por lo tanto, la estructura de decisión busca establecer una relación de preferencia sobre las políticas para cada individuo considerando sus preferencias arraigadas sobre el conjunto de estados y consecuencias (códigos). Es importante resaltar que el resultado final de la decisión es una decisión social; es decir, se considera la opinión o las preferencias dadas por todos los individuos[1].

Sea S un conjunto de estados y X un conjunto de consecuencias (finitos). Consideremos el conjunto de todas las políticas o alternativas X^S. Para cada $i \in N$, sea $\succeq_i^s$ el preorden total del individuo i sobre el conjunto de estados S, y sea $\succeq_i^x$ el preorden total del individuo i sobre el conjunto de consecuencias. Para este modelo consideraremos solamente la información que genera cada individuo sobre el conjunto de estados y sobre el conjunto de consecuencias; es decir, para cada individuo consideraremos las relaciones de preferencias individuales sobre el conjunto de estados y sobre el conjunto de consecuencias, teniendo así un perfil de información de preordenes totales sobre el conjunto de estados y un perfil de información de preordenes totales sobre el conjunto de consecuencias.

En términos generales tendremos $(\succeq_1^s, \succeq_1^x), (\succeq_2^s, \succeq_2^x), \cdots, (\succeq_n^s, \succeq_n^x)$, n pares de preferencias de cada individuo que representa la información *codificada* de los individuos respecto a las preferencias sobre los estados y las preferencias sobre el conjunto de consecuencias.

Sea $u_s = (\succeq_1^s, \cdots, \succeq_n^s)$ el perfil de las preferencias sobre los estados y $u_x = (\succeq_1^x, \cdots, \succeq_n^x)$ el perfil de las preferencias sobre los las consecuencias de los n individuos. Consideremos f una función de elección social definida tanto para perfiles de estados como para perfiles de consecuencias; es decir, $f : \mathrm{P}_s^n \longrightarrow \mathrm{P}_s$ y $f : \mathrm{P}_x^n \longrightarrow \mathrm{P}_x$, donde P_s^n es el conjunto de todos los perfiles de tamaño n sobre S, P_x^n es el conjunto de todos los perfiles de tamaño n sobre X, P_s el conjunto de todos los preordenes totales sobre S y P_x el conjunto de todos los preordenes totales sobre X.

Usando esta función de elección social aplicada a los perfiles u_s y u_x tendremos así dos preordenes globales $\succeq^{u_s}$ y $\succeq^{u_x}$, asociados asociados a los perfiles de preferencias y a los perfiles de estados respectivamente.

Ahora bien, consideramos el par $(\succeq^{u_s}, \succeq^{u_x})$ y haciendo uso de la regla de dominancia plausible (a través de un levantamiento) tenemos un orden sobre las políticas $\succeq$; es decir, para cualesquiera políticas $\alpha, \beta \in X^S$ se tiene que

$$\alpha \succ \beta \Leftrightarrow [\alpha \succ^{u_x} \beta] \sqsupset^{\pi}_{\succeq^{u_s}} [\beta \succ^{u_x} \alpha] \tag{5.4}$$

donde $[\alpha \succ^{u_x} \beta] = \{s \in S : \alpha(s) \succ^{u_x} \beta(s)\}$, $[\beta \succ^{u_x} \alpha] = \{s \in S : \beta(s) \succ^{u_x} \alpha(s)\}$ y $\sqsupset^{\pi}_{\succeq^{u_s}}$ es el levantamiento posibilísta asociado a $\succeq^{u_s}$.

Veamos el siguiente ejemplo.

[1]Aquí vamos a considerar el levantamiento posibilísta, pero esto puede ser un parámetro en un modelo más general.

www.bdigital.ula.ve

C.C.Reconocimiento

Ejemplo 5.2 *Sean* $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ *y* $\alpha, \beta \in X^S$ *definidas de la siguiente manera:*

	s_1	s_2	s_3	s_4
α	x_1	x_2	x_4	x_3
β	x_2	x_1	x_3	x_4

Consideremos u_s *y* u_x *el perfil de preferencias sobre los estados y el perfil de preferencias sobre las consecuencias, de los cuatro individuos, respectivamente como sigue:*

$$u_s = \begin{pmatrix} s_4 & s_1 & & \\ s_2 & s_4 & s_1 & s_4 \\ s_3 & s_3 & s_3 s_4 & s_1 s_2 \\ s_1 & s_2 & s_2 & s_3 \\ — & — & — & — \\ \succeq_1^s & \succeq_2^s & \succeq_3^s & \succeq_4^s \end{pmatrix} \qquad u_x = \begin{pmatrix} x_4 & x_1 & x_4 & x_1 \\ x_3 & x_3 & x_3 & x_2 \\ x_2 & x_2 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_4 & x_1 & x_4 \\ — & — & — & — \\ \succeq_1^x & \succeq_2^x & \succeq_3^x & \succeq_4^x \end{pmatrix}$$

Sea f *la función de Borda que asigna en cada preorden como rango de cada nivel un numero natural; en otras palabras, los elementos que aparecen en un primer nivel tienen rango* 1, *los que aparecen en un segundo nivel nivel tienen rango* 2 *y así sucesivamente. Aditivamente, el rango global de un elemento para todo el perfil es la suma de los rangos individuales; es decir la suma de los rangos que tiene en cada entrada del perfil.*

www.bdigital.ula.ve

Claramente podemos observar que $r_s(s_1) = 10, r_s(s_2) = 7, r_s(s_3) = 7, r_s(s_4) = 12$ *y* $r_x(x_1) = 10, r_x(x_2) = 9, r_x(x_3) = 11, r_x(x_4) = 10$. *Gráficamente tenemos* $\succ^{u_s}, \succeq^{u_x}$ *de la siguiente manera:*

$$\begin{array}{cc} s_4 & x_3 \\ s_1 & x_4 x_1 \\ s_3 s_2 & x_3 \\ — & — \\ \succeq^{u_s} & \succeq^{u_x} \end{array}$$

Sea $A = [\alpha(s) \succ^{u_x} \beta(s)]$ *y* $B = [\beta(s) \succ^{u_x} \alpha(s)]$. *Claramente* $A = \{s_1, s_4\}$ *y* $B = \{s_2, s_3\}$. *Haciendo uso de la regla de dominancia plausible se tiene que* $A \sqsupset^{\pi}_{\succeq^{u_s}} B$, *y en consecuencia,* $\alpha \succ \beta$.

Esta manera de establecer preferencias entre las políticas (que pueden ser consideradas como alternativas con estructura) permite comparar cualesquiera dos políticas y simplifica considerablemente el computo de las decisiones mediante el uso del código de la información de cada individuo sobre los estados y las consecuencias.

5.4.2 Modelo 2

Ahora daremos otro procedimiento de decisión aplicando la regla de dominancia plausible para cada par $(\succeq_i^s, \succeq_i^x)$ obteniendo un perfil de preferencias sobre las políticas, y por último, aplicamos una función de elección social sobre este perfil para obtener una relación de preferencia global. Esto es un procedimiento más clásico y más costoso computacionalmente.

C.C.Reconocimiento

De nuevo, sean X y S el conjunto de consecuencias y estados respectivamente (finitos). Cada individuo i tiene un par asociado $(\succeq_i^s, \succeq_i^x)$ de preferencias sobre los estados y las consecuencias. Para cada par $(\succeq_i^s, \succeq_i^x)$, usando la regla de dominancia plausible asignaremos un preorden total $\succeq_i$ sobre las políticas. Este último preorden total representa la relación de preferencia del individuo i sobre el conjunto de políticas X^S. Resumamos esto es el siguiente esquema:

$$\begin{array}{cccc} \succeq_1 & \succeq_2 & \cdots & \succeq_n \\ \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \sqsupseteq^{\pi}_{\succeq_1^s} & \sqsupseteq^{\pi}_{\succeq_2^s} & & \sqsupseteq^{\pi}_{\succeq_n^s} \\ \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ (\succeq_1^s, \succeq_1^x) & (\succeq_2^s, \succeq_2^x) & \cdots & (\succeq_n^s, \succeq_n^x) \end{array}$$

donde para cada i la relación $\sqsupseteq^{\pi}_{\succeq_i^s}$ es el levantamiento posibilístico del individuo i con respecto a la relación $\succeq_i^s$.

En el esquema anterior se puede observar que para cada individuo i se genera una relación de preferencia sobre $\succeq_i$ sobre el conjunto de políticas; obteniéndose así un perfil u de decisiones individuales sobre X^S; es decir, se tiene $u = (\succeq_1, \cdots, \succeq_n)$.

Ahora bien, consideremos una función de elección $f : \mathrm{P}^n \longrightarrow \mathrm{P}$, donde P^n es el conjunto de todos los perfiles de preferencias sobre X^S de tamaño n y P el conjunto de todos los preordenes totales definido sobre X^S. Esto nos produce una relación de preferencia global $\succeq_u$ sobre X^S que es la decisión global sobre la estructura de decisión múltiple; es decir, tenemos:

$$u \longmapsto f(u) = \succeq_u \tag{5.5}$$

www.bdigital.ula.ve

En general, este método necesita del cálculo completo en cada $\succeq_i$ para $i \in \mathrm{N}$. Este es el caso de las funciones que son globales como la función de Borda (funciones que no cumple Independencia de Alternativas Irrelevantes). Ahora bien, para funciones locales (en particular funciones que cumplen Independencia de Alternativas Irrelevantes) la información individual entre dos alternativas bastaría para saber como es la preferencia social entre ellas.
El siguiente ejemplo ilustra este tipo de cálculo.

Ejemplo 5.3 *Consideremos X, S, u_x, u_s, α y β como en el ejemplo anterior. A continuación, resumimos la información en el siguiente esquema:*

$$\left|\begin{array}{cc|cc|cc|cc} s_4 & x_4 & s_1 & x_1 & & x_4 & & x_1 \\ s_2 & x_3 & s_4 & x_3 & s_1 & x_3 & s_4 & x_2 \\ s_3 & x_2 & s_3 & x_2 & s_3 s_4 & x_2 & s_1 s_2 & x_3 \\ s_1 & x_1 & s_2 & x_4 & s_2 & x_1 & s_3 & x_4 \\ — & — & — & — & — & — & — & — \\ \succeq_1^s & \succeq_1^x & \succeq_2^s & \succeq_2^x & \succeq_3^s & \succeq_3^x & \succeq_4^s & \succeq_4^x \end{array}\right|$$

	s_1	s_2	s_3	s_4
α	x_1	x_2	x_4	x_3
β	x_2	x_1	x_3	x_4

C.C.Reconocimiento

Calculemos los siguientes conjuntos

$$A_1 = [\alpha \succ_1^x \beta] \qquad B_1 = [\beta \succ_1^x \alpha]$$
$$A_2 = [\alpha \succ_2^x \beta] \qquad B_2 = [\beta \succ_2^x \alpha]$$
$$A_3 = [\alpha \succ_3^x \beta] \qquad B_3 = [\beta \succ_3^x \alpha]$$
$$A_4 = [\alpha \succ_4^x \beta] \qquad B_4 = [\beta \succ_4^x \alpha]$$

Claramente tenemos que:

$$A_1 = \{s_2, s_3\} \qquad B_1 = \{s_1, s_4\}$$
$$A_2 = \{s_1, s_3, s_4\} \qquad B_2 = \{s_2\}$$
$$A_3 = \{s_2, s_3\} \qquad B_3 = \{s_1, s_4\}$$
$$A_4 = \{s_1, s_4\} \qquad B_4 = \{s_2, s_3\}$$

Aplicando reglas de dominancia plausible y considerando el levantamiento posibilísta para cada individuo se tiene que:

$$B_1 \sqsupset^{\pi}_{\succeq_1^s} A_1 \qquad A_2 \sqsupset^{\pi}_{\succeq_2^s} B_2$$
$$B_3 \sqsupset^{\pi}_{\succeq_2^s} A_3 \qquad A_4 \sqsupset^{\pi}_{\succeq_4^s} B_4$$

www.bdigital.ula.ve

lo que significa que $\beta \succ_1 \alpha, \alpha \succ_2 \beta, \beta \succ_3 \alpha$ y $\alpha \succ_4 \beta$. Con la función de Borda no se tiene la información necesaria para establecer la preferencia global entre α y β. Si se usa, por ejemplo, la regla local mayoritaria podríamos concluir que existe un empate entre las políticas α y β. Como ya dijimos, es importante resaltar que para poder finalizar el proceso de decisión para funciones globales deberíamos tener el perfil u de todas las decisiones individuales sobre todas las políticas, lo que equivale a realizar un computo para generar 4^4 políticas posibles; es decir, 256 políticas posibles.
No obstante, este último modelo será muy útil para establecer algunas propiedades de la teoría de la elección social.

El problema en particular que tratamos de plantear trata sobre cómo conservar la propiedad de Pareto (unanimidad) en este contexto; es decir, si en el perfil u se tiene que para todo i, $\alpha \succ_i \beta$, entonces $\alpha \succ \beta$, donde $\succ$ es la relación de preferencia que se obtiene usando la regla de dominancia plausible para el par $(\succeq^{u_s}, \succeq^{u_x})$; es decir,la relación dada por el método 1. Esa es la pregunta que analizaremos a continuación.

5.5 La función de Borda y la propiedad de Pareto en estructuras de decisiones múltiples

La propiedad de Pareto es una de las propiedades más importantes dentro de la teoría de elección social, puesto que representa la unanimidad de una colectividad de individuos dentro

C.C.Reconocimiento

de una decisión global; es decir, si para todos los individuos se tiene que una alternativa o política es mejor que otra, entonces esta situación debería respetarse en el resultado global de la decisión. Sin embargo, dentro de los dos esquemas que planteamos para establecer estructuras de decisiones múltiples podemos observar que considerando dos políticas estos modelos pueden dar resultados contrarios; es decir, a través de un modelo podemos encontrar que una política α resulta mejor que una política β y que con otro modelo resulta lo contrario. Esta última observación nos motiva a estudiar a fondo el comportamiento de estos dos modelos en el caso de comportamiento unánime (es decir, vía la propiedad de Pareto) según la función de elección social escogida (Borda de Gran Paso, Borda de Niveles Inalcanzables).

Es importante notar que un modelo es más tratable desde el punto de vista computacional que otro; es decir, con el primer modelo de decisión sólo se consideran los perfiles de relaciones de preferencia sobre los estados y consecuencias sin llegar a calcular las decisiones individuales. Esto nos permite comparar cualquiera dos políticas sin necesidad de conocer la estructura sobre todas las políticas.

Con el propósito de hacer más autocontenida la lectura recordemos la función de Borda. Esta función es una de las reglas más conocidas en la Teoría de Elección, y consiste de alguna manera en establecer rangos o pesos naturales a los niveles, con respecto a las preferencias de los individuos entre los candidatos. Veamos su definición precisa:

www.bdigital.ula.ve

Sean $A = \{a_o, \cdots, a_m\}$ un conjunto finito y sea $u = (\succeq_1, \cdots, \succeq_n)$ un perfil de relaciones de preferencia (preordenes totales) sobre el conjunto A. Para cada elemento $\succeq_i$ sean $N_i^1,\ N_i^2, \cdots, N_i^j$ los niveles que tiene el preorden $\succeq_i$, con $j < m$; es decir, N_i^1 es el primer nivel del preorden $\succeq_i$ del individuo i y así sucesivamente. Ahora para cada i definamos una función de rango $r_i(a)$ de la siguiente manera:

- Si $a \in N_i^1$, entonces $r_i(a) = 1$
- Si $a \in N_i^t$, entonces $r_i(a) = t$, con $t \leq j$.

Luego definimos

$$r(a) = \sum_{i=1}^{n} r_i(a).$$

$r(a)$ es llamado el ingrediente principal de la *Función de Borda*: Luego

$$f^B(u) = \{a \in A :\ r(a) \geq r(b),\ \forall b \in A\}.$$

En este caso f^B es una función de elección social definida $f^B : \mathrm{P}^n \longrightarrow \mathcal{P}(A)$. Sin embargo, como f^B satisface la propiedad de explicaciones transitivas, entonces al perfil u le podemos asociar un preorden total global $\succeq_u$ de manera tal que

$$a \succeq_u b \Longleftrightarrow r(a) \geq r(b)$$

Con lo anterior podemos entonces ver a la función de Borda definida así: $f^B : P^n \longrightarrow P$, donde P es el conjunto de todos los preordenes totales definidos sobre A.

C.C.Reconocimiento

A continuación ilustraremos a través de un ejemplo los dos métodos de decisiones múltiples usando la función de Borda.

Ejemplo 5.4 *Consideremos X y S conjunto de estados y conjunto de consecuencias, los perfiles u_s y u_x, y las políticas α y β, como en el ejemplo 5.1.*

	s_1	s_2	s_3	s_4
α	x_1	x_2	x_3	x_2
β	x_2	x_3	x_1	x_3

$$u_s = \begin{pmatrix} s_1 & s_4 & s_2 \\ s_3 & s_3 & s_3 \\ s_4 & s_2 & s_1 \\ s_2 & s_1 & s_4 \\ \text{—} & \text{—} & \text{—} \\ \succeq_1^s & \succeq_2^s & \succeq_3^s \end{pmatrix} \qquad u_x = \begin{pmatrix} x_1 & x_1 & x_1 \\ x_2 & x_2 & x_2 \\ x_3 & x_3 & x_3 \\ \text{—} & \text{—} & \text{—} \\ \succeq_1^x & \succeq_2^x & \succeq_3^x \end{pmatrix}$$

Evidentemente, $r(s_1) = 7, r(s_2) = 7, r(s_3) = 9, r(s_4) = 7$ y $r(x_1) = 9, r(x_2) = 6, r(x_3) = 3$. Gráficamente tenemos $\succ^{u_s}, \succeq^{u_x}$ de la siguiente manera:

$$\begin{array}{cc} & x_1 \\ s_3 & x_2 \\ s_4 s_1 s_2 & x_3 \\ \text{—} & \text{—} \\ \succeq^{u_s} & \succeq^{u_x} \end{array}$$

www.bdigital.ula.ve

Sea $A = [\alpha \succ^{u_x} \beta]$ y $B = [\beta \succ^{u_x} \alpha]$. Claramente $A = \{s_1, s_2, s_4\}$ y $B = \{s_3\}$. Haciendo uso de la regla de dominancia plausible se tiene que $B \sqsupset^{\pi}_{\succeq^{u_s}} A$, y en consecuencia, $\beta \succ \alpha$.

Ahora bien, apliquemos el segundo modelo de decisión; es decir, haremos primero las decisiones individuales y luego usaremos la función de Borda para dar información del resultado con respecto a las políticas α y β. Consideremos los siguientes pares de preferencias.

$$\left| \begin{array}{cc|cc|cc} s_1 & & s_4 & & s_2 & \\ s_3 & x_1 & s_3 & x_1 & s_3 & x_1 \\ s_4 & x_2 & s_2 & x_2 & s_1 & x_2 \\ s_2 & x_3 & s_1 & x_3 & s_4 & x_3 \\ \text{—} & \text{—} & \text{—} & \text{—} & \text{—} & \text{—} \\ \succeq_1^s & \succeq_1^x & \succeq_2^s & \succeq_2^x & \succeq_3^s & \succeq_3^x \end{array} \right|$$

Como el orden de preferencia para las consecuencias es igual para cada individuo, entonces claramente se tiene que

$$A_1 = [\alpha \succ_1^x \beta] = \{s_1, s_2, s_4\} \qquad B_1 = [\beta \succ_1^x \alpha] = \{s_3\}$$

$$A_2 = [\alpha \succ_2^x \beta] = \{s_1, s_2, s_4\} \qquad B_2 = [\beta \succ_2^x \alpha] = \{s_3\}$$

$$A_3 = [\alpha \succ_3^x \beta] = \{s_1, s_2, s_4\} \qquad B_3 = [\beta \succ_3^x \alpha] = \{s_3\}$$

C.C.Reconocimiento

Visualizando lo anterior tenemos que $A_1 \sqsupset^{\pi}_{\succeq_1^s} B_1, A_2 \sqsupset^{\pi}_{\succeq_2^s} B_2$ *y* $A_3 \sqsupset^{\pi}_{\succeq_2^s} B_3$*, lo que significa que* $\alpha \succ_1 \beta, \alpha \succ_2 \beta$ *y* $\alpha \succ_3 \beta$*. Si consideramos la función de Borda, entonces en virtud de que esta función satisface la propiedad de Pareto (unanimidad) se tiene que* $\alpha \succ_u \beta$*, donde* $\succeq_u$ *es el preorden total asociado a la función de Borda.*
Note que en este caso fue posible determinar que $\alpha \succ_u \beta$ *por la unanimidad sin necesidad de calcular completamente las relaciones* $\succeq_i$ *para* $i = 1, 2, 3$.

En el ejemplo anterior se puede observar que el resultado global de la decisión a través del modelo 1 resulta contrario al resultado usando el modelo 2. Es decir, a pesar que en el perfil de las decisiones individuales la condición de Pareto se cumple, no se obtiene la unanimidad con respecto al resultado obtenido aplicando el modelo 1. A fin de comprender más a fondo la situación que se presenta propondremos algunas funciones de Borda modificadas, en el sentido de las distribución de los pesos o rangos asignados a los niveles.

5.5.1 Función de Borda de gran paso

Sea $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$ un conjunto de alternativas y $u = (\succeq_1, \cdots, \succeq_n)$ un perfil de preferencias donde cada $\succeq_i$ es un preorden total sobre A. Para cada i sean $N_i^1(A), N_i^2(A), \cdots, N_i^j(A)$, con $j \leq m$, los subconjuntos de A que están en el nivel 1, nivel 2, y así sucesivamente para el preorden $\succeq_i$. Sea $e_p^i = |N_i^p(A)|$ el número de elementos que están en el nivel p en el orden $\succeq_i$. Por inducción definamos para cada $\succeq_i$ el rango de los elementos de A para el individuo i.

- si $a \in N_i^1(A)$, entonces $r^i(a) = 1 = r_1^i$,
- si $a \in N_i^{k+1}(A)$, entonces $r^i(a) = \displaystyle\sum_{t=1}^{k} r_t^i e_t^i + 1 = r_{k+1}^i$.

Así, el $r_{gp}(a) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} r^i(a)$.
Para cada perfil u definamos la *función de Borda de gran paso* así:

$$a \succeq^{Bgp} b \Longleftrightarrow r_{gp}(a) \geq r_{gp}(b).$$

Veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 5.5 *Sea* $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ *un conjunto con cuatro elementos y sea* u *un perfil de preferencias sobre* A *como se muestra a continuación;*

$$u = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 a_2 & a_4 \\ a_4 & a_3 a_1 \\ \succeq_1 & \succeq_2 \end{pmatrix}$$

www.bdigital.ula.ve

C.C.Reconocimiento

haciendo cuentas tenemos que $r^1(a_1) = 6$, $r^1(a_2) = 2$, $r^1(a_3) = 2$, $r^1(a_4) = 1$, $r^2(a_1) = 1$, $r^2(a_2) = 6$, $r^2(a_3) = 1$ *y* $r^2(a_4) = 3$. *Por lo tanto,* $r_{gp}(a_1) = 7$, $r_{gp}(a_2) = 8$, $r_{gp}(a_3) = 3$, $r_{gp}(a_4) = 4$.
Así, el orden social es

$$u = \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_4 \\ a_3 \\ \succeq_u \end{pmatrix}$$

Ahora bien, consideremos la situación del ejemplo 5.4, específicamente sobre el perfil u_s.

$$\begin{array}{cccccc} s_1 & s_4 & s_2 & \longrightarrow & 8 \\ s_3 & s_3 & s_3 & \longrightarrow & 4 \\ s_4 & s_2 & s_1 & \longrightarrow & 2 \\ s_2 & s_1 & s_4 & \longrightarrow & 1 \\ \text{—} & \text{—} & \text{—} & & \\ \succeq_1^s & \succeq_2^s & \succeq_3^s & & \end{array}$$

Los números a la derecha, indicados con la flechas, representan el peso o rango sobre los niveles y esto se puede hacer ya que los ordenes son lineales; es decir, en cada nivel solo hay un elemento. Teniendo en cuenta esto, podemos calcular el rango global de cada estado s_i. Esto es, $r(s_1) = 11, r(s_2) = 11, r(s_3) = 12$ y $r(s_4) = 11$, lo que nos genera un preorden global sobre S de la siguiente manera

$$\begin{array}{c} s_3 \\ s_1 s_2 s_4 \\ \text{—} \\ \succeq_{u_s}^{Bgp} \end{array}$$

Es obvio que el orden $\succeq_{u_x}^{Bgp}$ es:

$$\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \text{—} \\ \succeq_{u_x}^{Bgp} \end{array}$$

Así pues, aplicando la regla de dominancia plausible para el par de preordenes totales $(\succeq_{u_s}^{Bgp}, \succeq_{u_x}^{Bgp})$ (para α y β como en el ejemplo 5.4) se tiene que $B \sqsupseteq^{\pi}_{\succeq_{u_s}^{Bgp}} A$; o equivalentemente, $\beta \succ \alpha$. Esto nos quiere decir que a pesar de hacer algunas modificaciones sobre la función de Borda continuamos con la misma situación, a saber: el método 1 nos dice $\beta \succ \alpha$ y el método 2, por unanimidad, nos dice $\alpha \succ \beta$.

Con el ejemplo anterior podemos ver que aunque tengamos la condición de unanimidad, puede resultar que el resultado final a través de los dos modelos no sea el mismo. A continuación,

www.bdigital.ula.ve

C.C.Reconocimiento

daremos una propiedad que deben tener el rango de la función de Borda para obtener consistencia en el resultado cuando se tiene la condición de Pareto. Más precisamente, cuando se tiene $\alpha \succ_i \beta$ para todo $i \in \mathrm{N}$, tendremos $\alpha \succ_u \beta$ por el modelo 1.

5.5.2 Función de Borda con niveles inalcanzables

Sea $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$ un conjunto de alternativas, y sea $u = (\succeq_1, \cdots, \succeq_n)$ un perfil de preferencias donde cada $\succeq_i$ es un preorden total sobre A. Para cada i, sea $N_i^1, \cdots, N_i^k$ los niveles del preorden $\succeq_i$, con $k \leq m$; es decir, N_i^1 es el primer nivel, N_i^2 es el segundo nivel y N_i^k es el último nivel donde se encuentran los elementos maximales de A con respecto al orden $\succeq_i$.
Ahora bien, para cada $a \in A$ y para cada i, definamos por inducción el rango de a con respecto al nivel donde se encuentre en el preorden total $\succeq_i$.

- Si $a \in N_i^1$, entonces $r^i(a) = 1$
- Si $a \in N_i^{l+1}$, entonces $r^i(a) = \left(\sum_{x \prec a}^{k} r^i(x) \right) n + 1.$

El rango inalcanzable para cada $a \in A$ en el perfil u se define como $r^{ina}(a) = \sum_{i=1}^{n} r^i(a)$. Para cada perfil u definamos la *función de Borda inalcanzable* así:

$$a \succeq^{Bin} b \Longleftrightarrow r^{ina}(a) \geq r^{ina}(b).$$

Con el fin de ilustrar el comportamiento de los rangos inalcanzables veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 5.6 *Sea $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ un conjunto con cuatro elementos y sea u un perfil de preferencias sobre A como se muestra a continuación;*

$$u = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 a_2 & a_4 \\ a_4 & a_3 a_1 \\ \succeq_1 & \succeq_2 \end{pmatrix}$$

de las definiciones tenemos que $r^1(a_4) = 1$, $r^1(a_2) = 3$, $r^1(a_3) = 3$, $r^1(a_1) = 15$; $r^2(a_1) = 1$, $r^2(a_3) = 1$, $r^2(a_4) = 5$ y $r^2(a_2) = 15$,. Por lo tanto, $r^{ina}(a_1) = 16$, $r^{ina}(a_2) = 18$, $r^{ina}(a_3) = 4$, $r^{ina}(a_4) = 6$.
Así, el orden social es

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_4 \\ a_3 \\ \succeq_u \end{pmatrix}$$

www.bdigital.ula.ve

C.C.Reconocimiento

Ahora bien, consideremos nuevamente la situación del ejemplo 5.4, específicamente sobre el perfil u_s. Este perfil ya lo tratamos con la Función de Borda de gran paso. Veamos que sucede cuando consideramos niveles inalcanzables.

$$\begin{array}{cccccc} s_1 & s_4 & s_2 & \longrightarrow & 64 \\ s_3 & s_3 & s_3 & \longrightarrow & 16 \\ s_4 & s_2 & s_1 & \longrightarrow & 4 \\ s_2 & s_1 & s_4 & \longrightarrow & 1 \\ \text{—} & \text{—} & \text{—} & & \\ \succeq_1^s & \succeq_2^s & \succeq_3^s & & \end{array}$$

Los números a la derecha, indicados con la flechas, representan el peso o rango sobre los niveles y esto se puede hacer ya que los ordenes son lineales; es decir, en cada nivel solo hay un elemento. Teniendo en cuenta esto, podemos calcular el rango global de cada estado s_i. Esto es, $r(s_1) = 69, r(s_2) = 69, r(s_3) = 48$ y $r(s_4) = 69$, lo que nos genera un preorden global sobre S de la siguiente manera

$$\begin{array}{c} s_1 s_2 s_4 \\ s_3 \\ \text{—} \\ \succeq_{u_s}^{Bin} \end{array}$$

Notemos que el resultado es totalmente contrario al que se obtiene considerando la función de Borda a gran paso.

www.bdigital.ula.ve

En el siguiente ejemplo comparamos el comportamiento de la función de borda a gran paso y la función de borda con rangos inalcanzables sobre los dos modelos de estructuras de decisión multiple.

Ejemplo 5.7 *Sea $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ y $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$ un conjunto de consecuencias y un conjunto de estados, respectivamente. Consideremos las siguientes políticas:*

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
α	x_1	x_2	x_3	x_2	x_1
β	x_2	x_3	x_2	x_3	x_2

Sean

$$u_s = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & s_4 & s_5 \\ s_3 & s_3 & s_3 & s_3 \\ s_2 & s_1 & s_5 & s_4 \\ s_4 & s_4 & s_1 & s_2 \\ s_5 & s_5 & s_2 & s_1 \\ \text{—} & \text{—} & \text{—} & \text{—} \\ \succeq_1^s & \succeq_2^s & \succeq_3^s & \succeq_4^s \end{pmatrix} \qquad u_x = \begin{pmatrix} x_1 & x_1 & x_1 & x_1 \\ x_2 & x_2 & x_2 & x_2 \\ x_3 & x_3 & x_3 & x_3 \\ \text{—} & \text{—} & \text{—} & \text{—} \\ \succeq_1^x & \succeq_2^x & \succeq_3^x & \succeq_4^x \end{pmatrix}$$

Los perfiles sobre el conjunto de estados y el conjunto de consecuencias, respectivamente. Si consideramos los rangos de Borda de gran paso para cada nivel sobre el perfil u_s quedaría de

C.C.Reconocimiento

la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccccl}
s_1 & s_2 & s_4 & s_5 & \longrightarrow 16 \\
s_3 & s_3 & s_3 & s_3 & \longrightarrow 8 \\
s_2 & s_1 & s_5 & s_4 & \longrightarrow 4 \\
s_4 & s_4 & s_1 & s_2 & \longrightarrow 2 \\
s_5 & s_5 & s_2 & s_1 & \longrightarrow 1 \\
— & — & — & — & \\
\succeq_1^s & \succeq_2^s & \succeq_3^s & \succeq_4^s & \textit{Rango de Borda gran paso}
\end{array}$$

Recordemos que esto lo podemos hacer ya que en este ejemplo las relaciones de preferencia sobre los estados son ordenes lineales.

Como las relaciones de preferencia en el perfil u_x son todas iguales para cada individuo, entonces para cada i se tiene que: $A_i = \{s_1, s_2, s_4, s_5\}$ y $B_i = \{s_3\}$, donde $A_i = \{s \in S : \alpha(s) \succ_i^x \beta(s)\}$ y $B_i = \{s \in S : \beta(s) \succ_i^x \alpha(s)\}$.

Haciendo los cálculos respectivos se tiene que $r^{gp}(s_1) = 23$, $r^{gp}(s_2) = 23$, $r^{gp}(s_3) = 32$, $r^{gp}(s_4) = 24$ y $r^{gp}(s_5) = 22$, lo que da como resultado un preorden total asociado a la función de Borda de gran paso, de la siguiente manera:

$$\begin{array}{c}
s_3 \\
s_4 \\
s_1 s_2 \\
s_5 \\
—— \\
\succeq_s^{Bgp}
\end{array}$$

www.bdigital.ula.ve

Ahora bien, si consideramos el par $(\succeq_s^{Bgp}, \succeq_x^{Bgp})$ y haciendo uso de la regla de dominancia plausible se tiene que $B \sqsupseteq^{\pi}_{\succeq_s^{Bgp}} A$; es decir, $\beta \succ \alpha$. Es importante notar que para cada i, $\alpha \succ_i \beta$ (basta notar que en el perfil u_s cada entrada tiene un elemento maximal del conjunto A), y suponiendo que la función de Borda gran paso satisface la propiedad de Pareto (unanimidad), debería tenerse en el resultado que $\alpha \succ \beta$, lo que es contrario al resultado anterior.

Ahora veamos el comportamiento de los rangos inalcanzables.

$$\left\{\begin{array}{ccccl}
s_1 & s_2 & s_4 & s_5 & \longrightarrow 625 \\
s_3 & s_3 & s_3 & s_3 & \longrightarrow 125 \\
s_2 & s_1 & s_5 & s_4 & \longrightarrow 25 \\
s_4 & s_4 & s_1 & s_2 & \longrightarrow 5 \\
s_5 & s_5 & s_2 & s_1 & \longrightarrow 1 \\
— & — & — & — & \\
\succeq_1^s & \succeq_2^s & \succeq_3^s & \succeq_4^s & \textit{Rango de Borda de rango inalcanzable}
\end{array}\right\}$$

Como las relaciones de preferencia en el perfil u_x son todas iguales para cada individuo, entonces para cada i se tiene que: $A_i = \{s_1, s_2, s_4, s_5\}$ y $B_i = \{s_3\}$, donde $A_i = \{s \in S : \alpha(s) \succ_i^x \beta(s)\}$ y $B_i = \{s \in S : \beta(s) \succ_i^x \alpha(s)\}$.

C.C.Reconocimiento

Haciendo los cálculos respectivos se tiene que $r(s_1) = 656$, $r(s_2) = 656$, $r(s_3) = 500$, $r(s_4) = 660$ *y* $r(s_5) = 652$, *lo que da como resultado un preorden total asociado a la función de Borda de niveles inalcanzables, de la siguiente manera:*

$$\begin{array}{c} s_4 \\ s_1 s_2 \\ s_5 \\ s_3 \\ \hline \succeq_s^{Bin} \end{array}$$

Ahora bien, si consideramos el par $(\succeq_s^{Bin}, \succeq_x^{Bin})$ *y haciendo uso de la regla de dominancia plausible se tiene que* $A \sqsupseteq^{\pi}_{\succeq_s^{Bin}} B$; *es decir,* $\alpha \succ \beta$. *Notemos que para cada* i, $\alpha \succ_i \beta$ *(basta notar que en el perfil* u_s *cada entrada tiene un elemento maximal del conjunto* A*), y como la función de Borda de rango inalcanzable satisface la propiedad de Pareto (unanimidad), se tiene en el resultado que* $\alpha \succ \beta$, *el mismo resultado anterior; es decir, se cumple la propiedad de Pareto.*

Las siguientes definiciones son claves para el enunciado del teorema principal de este capítulo.

Definición 5.1 *Una estructura de decisión* $(X^S, \succeq')$ *es una* Estructura de Decisión Social Multiple *si existen, un perfil de decisiones individuales* $u = (\succeq_1, \cdots, \succeq_n)$, *donde cada* $\succeq_i$ *es un preorden total sobre* X^S, *y una función de bienestar social* $f : \mathrm{P}^n \longrightarrow \mathrm{P}$ *tal que* $f(u) = \succeq'$.

www.bdigital.ula.ve

Definición 5.2 (Modelo 1) *Una Estructura de Decisión Social Multiple es* Posibilista, *para cada* i *el preorden* $\succeq_i$ *se obtiene a través de la regla de dominancia plausible usando el levantamiento posibilista.*

Definición 5.3 (Modelo 2) *Una estructura de decisión* $(X^S, \succeq)$ *es una* Estructura de Decisión Social Múltiple Codificada *si dados, perfiles* $u_s = (\succeq_1^s, \cdots, \succeq_n^s)$ *y* $u_x = (\succeq_1^x, \cdots, \succeq_n^x)$, *donde para cada* i *los preordenes* $\succeq_i^s$ *y* $\succeq_i^x$ *son preordenes totales definidos sobre* S *y* X *respectivamente, y dadas dos funciones de bienestar social* $f : \mathrm{P}^n \longrightarrow \mathrm{P}$ *tal que* $f(u_s) = \succeq^s$ *y* $g(u_x) = \succeq^x$, *se tiene que para cualesquiera dos políticas* $\alpha, \beta \in X^S$

$$\alpha \succeq \beta \Longleftrightarrow \{s \in S : \alpha(s) \succ^x \beta(s)\} \sqsupseteq_{\succeq^s} \{s \in S : \beta(s) \succ^x \alpha(s)\} \tag{5.6}$$

donde $\sqsupseteq_{\succeq^s}$ *es un levantamiento asociado al preorden* $\succeq^s$.

Definición 5.4 *Una Estructura de Decisión Social Múltiple Codificada es* Posibilística *si el levantamiento* $\sqsupseteq_{\succeq^s}$ *es el levantamiento posibilísta* $\sqsupseteq^{\pi}_{\succeq^s}$ *asociado al preorden* $\succeq^s$.

A la relación $\succeq$, de una estructura de decisión multiple codificada posibilista, la vamos a denotar a veces con $\succeq^{mc}$ para distinguirla de $\succeq' = f(u)$ la preferencia de una decisión social multiple.

C.C.Reconocimiento

Teorema 5.1 *Supongamos que X^S tiene una Estructura de Decisión Social Multiple Posibilísta con $u = (\succeq_1, \cdots, \succeq_n)$, donde cada $\succeq_i$ se obtiene del par $(\succeq_i^s, \succeq^x)$ a través de RDP. Supongamos además que sobre X^S se considera una Estructura de Decisión Social Múltiple Codificada Posibilista tal que $u_s = (\succeq_1^s, \cdots, \succeq_n^s)$ y $u_x = (\succeq^x, \cdots, \succeq^x)$ y la funciones de bienestar social f y g son la función de Borda de Niveles Inalcanzables. Luego, si para todo i se tiene que $\alpha \succ_i \beta$ entonces $\alpha \succ^{mc} \beta$; es decir, la propiedad de Pareto se cumple.*

Otra manera de ver el teorema es la siguiente: suponga que $f(u) = \succeq'$ y f cumple Pareto. Entonces, si para todo i, $\alpha \succ_i \beta$, los dos métodos nos dicen que $\alpha \succ \beta$, es decir $\alpha \succ' \beta$ y $\alpha \succ_{mc} \beta$

Demostración. Por hipótesis tenemos un perfil u de relaciones de preferencia sobre X^S bajo una Estructura de Decisión Social Multiple Posibilista como lo podemos ver en el siguiente esquema

$$\begin{array}{cccc} u = (\succeq_1, & \succeq_2, & \cdots & , \succeq_n) \\ \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \sqsupseteq^\pi_{\succeq_1^s} & \sqsupseteq^\pi_{\succeq_2^s} & & \sqsupseteq^\pi_{\succeq_n^s} \\ \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ (\succeq_1^s, \succeq^x) & (\succeq_2^s, \succeq^x) & \cdots & (\succeq_n^s, \succeq^x) \end{array}$$

Es importante notar que la para cada individuo i la relación de preferencia sobre el conjunto de consecuencias X siempre es la misma. Además, para cada i la relación $\sqsupseteq^\pi_{\succeq_i^s}$ es el levantamiento posibilísta.

www.bdigital.ula.ve

El hecho de que para todo i se tiene $\alpha \succ_i \beta$ significa que

$$\{s \in S : \alpha(s) \succ^x \beta(s)\} \sqsupset^\pi_{\succeq_i^s} \{s \in S : \beta(s) \succ^x \alpha(s)\} \tag{5.7}$$

Sea $A = \{s \in S : \alpha(s) \succ^x \beta(s)\}$ y $B = \{s \in S : \beta(s) \succ^x \alpha(s)$. Así, usando 5.7 se tiene que que para cada i

$$\alpha \succ_i \beta \Longleftrightarrow A \sqsupset^\pi_{\succeq_i^s} B \tag{5.8}$$

Ahora bien, consideremos los perfiles $u_s = (\succeq_1^s, \cdots, \succeq_n^s)$ y $u_x = (\succeq^x, \cdots, \succeq^x)$. Sea f^{Bin} la función de Borda de niveles inalcanzables y apliquemos esta función a los perfiles u_s y u_x; es decir, $f^{Bin}(u_s)$ y $f^{Bin}(u_x)$. Sea $\succeq_{u_s} = f^{Bin}(u_s)$ y como en el perfil u_x todas sus entradas son iguales entonces obviamente se tiene que $f^{Bin}(u_x) = \succeq^x$. Con el par $(\succeq_{u_s}, \succeq^x)$,

el levantamiento posibilísta $\sqsupseteq^\pi_{\succeq_{u_s}}$ asociado al preorden total $\succeq_{u_s}$, y considerando la Estructura de Decisión Social Múltiple Codificada Posibilista sabemos que

$$\alpha \succ \beta \Longleftrightarrow A \sqsupset^\pi_{\succeq_{u_s}} B \tag{5.9}$$

Así que para ver que $\alpha \succ \beta$ tenemos que probar que

$$\forall i, \quad A \sqsupset^\pi_{\succeq_i^s} B \Longrightarrow A \sqsupset^\pi_{\succeq_{u_s}} B$$

Es decir, existe $a \in A$ tal que para todo $b \in B$, $a \succ_s b$.

C.C.Reconocimiento

Como para todo i, $A \sqsupset^{\pi}_{\succeq_i^s} B$ entonces para cada i existe $a_i \in \max(A, \succeq_i^s)$ tal que $a_i \succ_i^s b$ para todo $b \in B$.

Sea b^* un elemento de B con rango inalcanzable maximal; es decir, para todo $b \in B$, $f^{Bin}(b^*) \geq f^{Bin}(b)$. Sea i_0 el individuo en el perfil donde b^* tiene el rango inalcanzable maximal. Es decir, para todo i.

$$r_{i_0}^{ina}(b^*) \geq r_i^{ina}(b^*)$$

Sea a_{i_0} el elemento maximal en $\succeq_{i_0}^s$ de todos los a_i en A. Así tenemos,

$$f^{Bin}(a_{i_0}) = \sum_{i=1}^{n} r^i(a_{i_0}) = \left(\sum_{i=1, i \neq i_0}^{n} r^i(a_{i_0}) \right) + r^{i_0}(a_{i_0}) > nr^{i_0}(b^*) + 1 \geq f^{Bin}(b^*)$$

ya que $r^{i_0}(a_{i_0}) > nr^{i_0}(b^*) + 1$, y en consecuencia $f^{Bin}(a_{i_0}) > f^{Bin}(b^*)$.

Ahora colocando $a = a_{i_0}$ se tiene que $f^{Bin}(a) > f^{Bin}(b^*)$ y por la escogencia de b^* se tiene que para todo $b \in B$, $f^{Bin}(a) > f^{Bin}(b)$

∎

www.bdigital.ula.ve

C.C.Reconocimiento

www.bdigital.ula.ve

C.C.Reconocimiento

CAPÍTULO 6

Observaciones finales y perspectivas

Queremos terminar este trabajo con algunas observaciones finales sobre nuestra contribución, algunas preguntas y unas perspectivas de trabajo.

En este trabajo hemos hecho aportes a la teoría de la elección social pura y a la teoría de decisión desde un punto de vista social (multiagente).

www.bdigital.ula.ve

Nuestras primeras contribuciones a la teoría de elección social aparecen en el capítulo 3. Allí estudiamos algunas funciones de elección social y analizamos sus propiedades. Propusimos nuevas propiedades de racionalidad y además se realizo el análisis general de las propiedades más resaltantes de la teoría de elección social incluyendo las nuevas. Definimos nuevas funciones que satisfacen estas nuevas propiedades y para ello se introduce la noción de perfiles d-consistentes. También vimos, que funciones de elección social restringidas a estos perfiles cumplen con las nuevas propiedades propuestas. Es decir, estas funciones así definidas tienen un buen comportamiento.

En el cuarto capítulo hicimos una contribución al estudio de la manipulabilidad de funciones de elección social (funciones multivaluadas). Nuestra noción de manipulabilidad se basa en la noción de levantamiento. En particular damos condiciones suficientes sobre los levantamientos para obtener el teorema de manipulabilidad (Teorema 4.3), resultado principal de este capítulo.

El quinto capítulo concierne al estudio de decisiones múltiples. En esencia, nuestro aporte consistió en establecer dos métodos de agregación global de preferencias a través de estructuras de decisión múltiple y estructuras de decisión múltiple codificada. Mostramos que estos dos métodos pueden llevar a resultados contrarios. Esto lleva a preguntarse sobre la existencia de condiciones, tanto dentro de las estructuras de decisión múltiple codificada como en la definición de las funciones de agregación que permitan coincidencia de los métodos. Ello nos llevó a introducción de la función de Borda de niveles inalcanzables. Finalmente, enunciamos y demostramos el teorema principal, que muestra que bajo ciertas condiciones estos modelos coinciden. En particular preservan la condición de Pareto.

C.C.Reconocimiento

Ahora quisiéramos enunciar unas preguntas:

1. ¿Son las condiciones sobre los levantamientos que aparecen el el Teorema 3.4, condiciones necesarias para la manipulación?

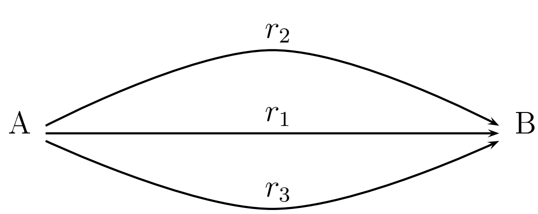
2. ¿Es la función de Borda de niveles inalcanzables una función *minimal* para que se cumpla el Teorema 5.1?

Ahora quisiéramos esbozar algunas perspectivas de trabajo.

Primero sobre las aplicaciones de nuestros resultados y métodos. En particular los métodos de decisiones múltiples en la clasificación de candidatos (a un cargo). Para esto consideremos lo siguiente: supongamos que existe un cargo de concurso de credenciales para profesor en una universidad. Las variables que se van a medir son las clásicas; es decir, experiencia en Docencia, Investigación, Extensión y Trabajo Administrativo. Si se establece un comité de jueces para evaluar a cada candidato puede pasar que difieran en las características que deba tener el candidato al cargo de profesor. En otras palabras, puede ser que a un juez le parezca más importante que el candidato sea "bueno" en docencia que en investigación, mientras que a otro juez difiera de esa opinión. En este sentido, cada juez ordena las variables a medir. Es importante saber que cada candidato tiene un rango o peso en su curriculum con respecto a las variables consideradas. Lo interesante es preguntarse cuáles mecanismos de escogencia de candidatos pudieran ser utilizados y en qué medida estos mecanismos pudieran ser "buenos" socialmente (es decir para el comité de jueces). Además, sería oportuno considerar estudiar lo sensible a manipulación que pudieran ser estos mecanismos.

www.bdigital.ula.ve

Otro aspecto que quisiéramos desarrollar es el estudio de las decisiones dinámicas. Esto pudiera hacerse de diversas maneras. Con el propósito de entender de que se trata consideremos la siguiente situación: supongamos que una persona está interesada en trasladarse de un sitio A a un sitio B por tres vias o rutas distintas, digamos r_1, r_2 y r_3. Ilustramos lo anterior en el siguiente gráfico.



El conjunto de opciones que tiene el individuo de trasladarse desde el punto A al punto B es $X = \{r_1, r_2, r_3\}$. Cada elemento de X tiene asociado cierto conjunto de atributos o características. Por ejemplo, podemos pensar en tres características: $c_1 =$"tiempo mínimo", $c_2 =$"poco tráfico" y $c_3 =$"poco recorrido". En otras palabras podemos considerar un vector de la forma

$$(r_1, r_2, r_3, c_1, c_2, c_3)$$

C.C.Reconocimiento

donde cada entrada se le asigna 0 (cero) o 1 (uno) dependiendo si la opción o la característica se cumple. Por ejemplo, el vector

$$(1, 0, 0, 1, 0, 1)$$

nos dice que la persona ha decidido tomar la ruta r_1 y considera que minimiza tiempo, tendrá mucho tráfico y pero el recorrido será corto.
El conjunto de todas las alternativas es el siguiente.

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{array}{cccccc} r_1 & r_2 & r_3 & c_1 & c_2 & c_3 \\ (1 & 0 & 0 & \diamond & \diamond & \diamond) \\ (0 & 1 & 0 & \diamond & \diamond & \diamond) \\ (0 & 0 & 1 & \diamond & \diamond & \diamond) \end{array} \right\}$$

donde $\diamond \in \{0, 1\}$. Claramente $|\mathcal{A}| = 24$ y un elemento $x \in \mathcal{A}$ tiene la siguiente forma $(r_1\, r_2\, r_3\, c_1\, c_2\, c_3)$.

Supongamos que de todas las alternativas sólo tomamos las siguientes

$$V = \{(100111), (010011), (001001)\}.$$

La persona o individuo i establece su preferencia absoluta que llamaremos $A = \{(100111)\}$; es decir, el prefiere viajar por la ruta r_1 teniendo en cuenta, que en su opinión, todos los atributos le favorecen.
Ahora bien, sea d la distancia de Hamming[1] extendida sobre $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ y definamos la siguiente relación sobre $\mathcal{A}$ dado A. Para $x, y \in \mathcal{A}$

$$x \succeq_A y \Longleftrightarrow d(x, A) \leq d(y, A).$$

Así, dada la preferencia absoluta A de la persona i podemos establecer su preferencia sobre todo V de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rc} A \rightarrow & (100111) \\ & (010011) \\ & (001001) \\ & \succeq^i_{A\restriction_V} \end{array}$$

Esto se interpreta de la siguiente manera: la persona i tiene como primera opción la ruta r_1, como segunda opción la ruta r_2 y por última opción la ruta r_3.

Ahora bien, ¿Qué pasaría si a la persona i se le informa que no hay paso por la ruta r_1?. Es posible que i cambie su preferencia dado que pudiera conocer algunas consecuencias del hecho, es decir, por ejemplo i pudiera saber, o estar convencido, de que si no hay paso por la ruta r_1 entonces habrá mucho tráfico por la ruta r_2 y en consecuencia tardará más, entre otras informaciones posibles. En este sentido podemos plantearnos lo siguiente: Dada las creencias de una persona y su preferencia original sobre una situación ¿será posible hacer un modelo que nos permita, dada una nueva información que afecte a las opciones, crear una nueva

[1]Del número de coordenadas en que difieren los vectores se toma la menor.

www.bdigital.ula.ve

C.C.Reconocimiento

situación donde podamos establecer preferencias que nos beneficien el lo posible con respecto a nuestra preferencia original? ¿Cómo podemos usar la teoría de decisión, teoría de elección social y la teoría de revisión de bases de conocimiento para hacer frente a esta situación?. Nosotros pensamos que conjugar esta teorías permitirá obtener resultados importantes.

Por último sería interesante entender la relación que pudiera establecerse entre Teoría Espectral en el Álgebra Lineal y la teoría de elección social. Particularmente, podemos estudiar las aplicaciones de la teoría de Perron - Frobenius, que se han usado en el desarrollo de ciertos algoritmos computacionales, conocidos como algoritmos de búsqueda computacional, asignación de rangos con herramientas estadísticas, entre otros. La idea es estudiar estos mecanismos de ordenamiento desde el punto de vista de la teoría de decisión y la teoría de elección social.

www.bdigital.ula.ve

C.C.Reconocimiento

Índice Alfabético

www.bdigital.ula.ve
C.C.Reconocimiento

www.bdigital.ula.ve

C.C.Reconocimiento

Bibliografía

[1] J. K. Arrow, *Social Choice and Individual Values*, 2nd ed., Wiley, New York, 1963.

[2] S. Barberà, W. Bossert, P. K. Pattanaik, Ranking sets of objects. In *Handbook of utility theory* S. Barberà, P.J. Hammond, C. Seidl, Eds. Chapter 17, pp. 893–978. Kluwer Publisher, 2004.

[3] S. Barberà, B. Dutta and A. Sen, Strategyproof Social Choice Correspondences, *J. of Economic Theory*, 101 (2001), 374–394.

[4] J. P. Benoit, Strategic manipulation in voting games when lotteries and ties are permitted, *J. of Ecomic Theory*, 102 (2002), 421-436.

[5] J.-C. de Borda, Mémoire sur les élections au scrutin, Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, année 1781, pp. 657-665. Traducido al inglés en 1953 por A. de Grazia: "Mathematical derivation of an election system", Isis 44:42-51.

[6] F. Camacho and R. Pino Pérez. Dominance plausible rule and transitivity. In *9th Conference on Logic and the Foundations of Game and Decision Theory*, 2010.

[7] F. Camacho and R. Pino Pérez. Dominance plausible rule and transitivity. *Journal of Applied Non-Classical Logics* 21(3-4): 355-373 (2011)

[8] F. Camacho and R. Pino Pérez. Leximax relations in decision making through the dominance plausible rule. In Weiru Liu, editor, *Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty - 11th European Conference, ECSQARU 2011, Belfast, UK, June 29-July 1, 2011*, volume 6717 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 569–581. Springer, 2011.

[9] F. Camacho. Contribución al estudio de la teoría de decisión cualitativa. Tesis doctoral. Universidad de Los Andes, Mérida, julio 2013.

[10] Marquis de Condorcet (P.-M. Caritat), Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix, (Imprimerie Royale, Paris, 1785); facsímil publicado en 1972 por Chelsea Publishing Company, New York.

www.bdigital.ula.ve

C.C.Reconocimiento

[11] D. Dubois, H. Fargier and H. Prade. Decision-Making under Ordinal Preferences and Comparative Uncertainty, *Proceedings of the Thirteenth Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence*, Ed. Prakash P. Shenoy, August 1-3, 1997, Brown University, Providence, Rhode Island, USA, UAI, Morgan Kaufmann, (1997), 157-164.

[12] D. Dubois and H. Fargier, A Unified framework for order-of-magnitude confidence relations, in: *Proceedings of the Twentieth Annual Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence (UAI-04)*, Arlington, Virginia, USA, 2004, pp. 138-145.

[13] D. Dubois, H. Fargier, H. Prade and P. Perny, Qualitative decision theory: from Savage's axioms to nonmonotonic reasoning, *Journal of Association for Computer Machinery*, 49 (2002) 455-495.

[14] D. Dubois, H. Fargier and P. Perny. Qualitative decision theory with preference relations and comparative uncertainty: An axiomatic approach, *Artif. Intell.*, Vol 148, 1-2, (2003), 219-260.

[15] D. Dubois, H. Fargier and P. Perny. Corrigendum to "Qualitative decision theory with preference relations and comparative uncertainty: an axiomatic approach" [Artificial Intelligence 148 (1-2) (2003) 219-260], *Artif. Intell.*, Vol 171, 5-6, (2007), 361-362.

[16] H. Fargier and P. Perny, Qualitative models for decision under uncertainty without the commensurability hypothesis, in: K.B. Laskey, H. Prade (Eds.), Proc. 15th Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence, Stockholm, Sweden, Morgan Kaufmann, San Mateo, CA, 1999, pp. 188-195.

[17] D. Dubois, J. Lang and H. Prade, Possibilistic logic, in: D.M. Gabbay, et al. (Eds.), "Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming", Vol. 3, Oxford University Press, Oxford, UK, 1994, pp. 439-513.

[18] D. Dubois and H. Prade, Possibilistic logic: a retrospective and prospective view, *Fuzzy Sets and Systems*, 144 (2004) 3-23.

[19] J. Duggan, T. Schwartz, Strategic manipulability without resoluteness or shared beliefs: Gibbard-Satterthwaite generalized, *Social Choice Welfare*. Springer - Verlag (2000). Vol 17, 85-93.

[20] Fishburn, P.C., Utility Theory for Decision Making, Wiley, New York, 1970.

[21] A. Gibbard, Manipulations of voting schemes: A general result, *Econometrica*, 41 (1973), 587-602.

[22] J. S. Kelly, *Social Choice Theory: An Introduction*, Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[23] S. Konieczny and R. Pino Pérez. On the logic of merging. In *Proceedings of the Sixth Internatinal Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR' 98)*, pages 488-498, 1998.

www.bdigital.ula.ve

C.C.Reconocimiento

[24] S.Konieczny and R. Pino Pérez. Merging with integrity constraints. *In Proceedings of the Fifth European Conference on Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty (ECSQARU' 99)*, Lecture Notes in Artificial Intelligence 1638, pages 233-244, July 5-9 1999.

[25] S.Konieczny and R. Pino Pérez. Merging Information: A qualitative framework. *Journal of Logic and Computation*, 12(5): 773-808, 2002.

[26] S. Konieczny and R. Pino Pérez. Propositional Belief Base Merging or how to Merge Beliefs/ Goals coming from several Sources and some links with Social Choice Theory. *European Journal of Operational Research*, 160 (2005), no. 3, 785-802.

[27] S. Kraus, D. J. Lehmann and M. Magidor. Nonmonotonic Reasoning, Preferential Models and Cumulative Logics, *Artif. Intell.* Vol 44, 1-2, (1990), 167-207.

[28] J. F. Leal, Posibilidad e Imposibilidad en la Teoría de Elección Social. Trabajo de Grado. Departamento de Matemáticas, Universidad de Los Andes, 2003.

[29] D. J. Lehmann and M. Magidor, What does a Conditional Knowledge Base Entail?, *Artif. Intell.*, Vol 55, 1, (1992), 1-60.

[30] M. S. Pini, F. Rossi, K. B. Venable and T. Walsh, Aggregating Partially Ordered Preferences, *J. Log. Comput.*, 19, 3, (2009), 475-502.

www.bdigital.ula.ve

[31] M. A. Satterthwaite, Strategy-Proofness and Arrow's Conditions: Existence and Correspondence Theorems for Voting Procedures and Social Welfare Functions, *J. of Economic Theory*, 10 (1975), 187-217.

[32] L. J. Savage. *The Foundations of Statistics.* Dover, New York, 1972.

[33] G. L. S. Shackle, On the meaning and measure of uncertainty, *Metroeconomica*, 5 (1953), 97-115.

[34] G. L. S. Shackle, "Uncertainty in Economics and Other Reflections", Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1955.

[35] A. D. Taylor. *Social choice and the mathematics of manipulation*, Outlooks, Cambridge University Press, (2005)

C.C.Reconocimiento