Universidad de Los Andes

Facultad de Ciencias

Departamento de Física

PARTIALLYMASSLESS Y AUTO DUALIDAD EN 3 DIMENSIONES

Daniel Eduardo Galviz Blanco

Tutor:
Dr. Adel Khoudeir Maurched

Trabajo especial de grado para optar al Título de Licenciado en Física

Mérida, 2017

Agradecimientos

Mi más sincero agradecimiento al profesor Adel Khoudeir Maurched, por su motivación, su guía y su interés incansable en mi aprendizaje.

A mis padres por todo su apoyo, su paciencia y por siempre ser mi soporte en cada meta emprendida.

Muchas gracias a todas las personas que de una u otra forma colaboraron en la realización del presente trabajo.

Resumen

Se estudiará inicialmente el fenómeno “Partially Massless”, posteriormente se desarrollará el modelo de “Partially Massless” en formalismo triádico en 3 dimensiones. Además, se estudiará cómo propaga el modelo de “P.M” en formalismo triádico en un espacio (A)ds. Se realizará un análisis de la gravedad masiva autodual para espacios (A)dS, luego, se obtendrá un modelo de tercer orden en sus derivadas a partir de una acción intermedia resultando no ser equivalente a la gravedad masiva topológica, como ocurre en el caso de un espacio plano. Por último se demostrará que la acción de segundo orden en lenguaje métrico de una acción intermedia resultante del modelo autodual para (A)dS, es el caso de “Partially Massless” en espacios (A)dS para una acción en particular con 2 términos de masa diferentes, propuesta inicialmente para espacio plano.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

1.1. Preámbulo

Albert Einstein propuso la teoría de la relatividad general en 1916 [1] la cual describe la gravitación como una interacción entre materia y la curvatura del espacio-tiempo. En paralelo se estaba desarrollando la mecánica cuántica por una inmensa cantidad de trabajos, luego de estar establecidas ambas teorías se buscó unificarlas fallando cada propuesta desarrollada. El modelo actual cosmológico o modelo del Big Bang, requiere de un sector de materia y energía oscura, la materia oscura no es bariónica y por lo tanto no puede ser descrita por el modelo estándar de partículas, mientras que las contribuciones del modelo estándar para la energía oscura se encuentran fuera de rango por muchos ordenes de magnitud, ambos problemas se encuentran naturalmente relacionados con la gravedad, puesto que es a través de la gravedad que se ha logrado predecir la presencia de energía y materia oscura en el universo, debido a que son necesarios para explicar hechos experimentales como la radiación de fondo de microondas, la expansión del universo, entre otros fenómenos, así, es necesario la presencia de materia oscura como también lo es la constante cosmológica, la cual esta intrínsecamente relacionada con la energía oscura. Sin embargo, tras abundantes investigaciones, no existe evidencia experimental de la existencia de materia oscura y no se ha desarrollado ningún modelo teórico que explique el valor de la constante cosmológica.

Pueden existir dos alternativas para la solución de estos problemas; que la teoría de la relatividad general sea una aproximación de una teoría más general o que sea necesario una modificación de la relatividad general. La relatividad general es una teoría totalmente no lineal de geometría Riemanniana que describe la naturaleza dinámica del espacio-tiempo, pero su obtención no es única, es posible construir diferentes modelos con invariancia general de coordenadas que satisfagan el principio de equivalencia. Así la relatividad general es una teoría que propaga una partícula de espín 2 interactuante sin masa llamada *gravitón*, es decir, la teoría propaga 2 grados de libertad (en 4 dimensiones) y es invariante bajo difeomorfismo. Una forma de modificar la RG es cambiar los grados de libertad en que propaga la teoría (si se toma la postura que la solución de los problemas antes mencionados es a través de una modificación de la RG), una manera de lograr esto y que ha sido ampliamente estudiado, es el hecho de suponer que los gravitones poseen masa variando así los grados en que propaga la teoría y trayendo consigo una amplia gama de nuevas características que enriquecen este modelo.

En 1939 Markus Fierz y Wolfgang Pauli [2], proponen la primera teoría de gravedad *masiva* con el objetivo de poder cuantizar la gravedad, este modelo modifica los grados de libertad como se podrá ver en el capítulo 1 y 2 del presente trabajo. También demostraron que para una teoría linealizada del modelo de gravedad masiva sobre un espacio de Minkowski, surgía una forma muy específica para el término de masa que es requerido para evitar la aparición de grados de libertad fantasmas y así obtener una teoría unitaria. Desde entonces el problema de formular una teoría consistente de la gravedad masiva ha tenido un largo desarrollo.

La teoría de la relatividad general para el caso en 3 dimensiones tiene una solución trivial, debido a que no posee grados de libertad dinámicos. El descubrimiento del modelo para la gravedad masiva topológica por parte de S. Deser and R. Jackiw y S. Templeton [3] en 1982, trajo consigo nuevas características para la teoría de gravitación en tres dimensiones, así como un gran interés en el estudio de las teorías gravitacionales masivas. Este modelo consiste en que la acción Einstein-Hilbert sin propagación (en 3 dimensiones) es complementada con un término gravitacional masivo tipo Chern-Simons, esta teoría se obtiene de forma no linelizada como también de manera linealizada, esta última siendo una acción de tercer orden invariante bajo transformaciones de calibre que propaga un solo grado de libertad.

El modelo autodual de la gravedad masiva vino al poco tiempo de la gravedad masiva topológica. Propuesta por C. Aragone y A. Khoudeir en 1986 [4], valiéndose del caso en que la teoría vectorial autodual era equivalente a la teoría de la electrodinámica masiva topológica. Este modelo cosiste en una acción de primer orden propagando un solo grado de libertad. En el mismo trabajo fue desarrollada una equivalencia que relaciona la gravedad autodual con una acción intermedia (modelo de segundo orden), y a su vez esta acción intermedia con la gravedad masiva topológica mostrando su equivalencia entre estos dos modelos.

S. Deser y R. Nepomechie en 1983 [5] se interesaron en estudiar la invariancia de calibre en un espacio de Sitter, como resultado hallaron un fenómenos llamado "Partially Massless" o Gravedad Parcialmente Sin Masa, el cual siempre elimina un grado de libertad de los grados de propagación resultantes de la acción de Fierz-Pauli, también se obtiene una teoría invariante bajo simetrías de calibre y lo más resaltante de su trabajo es que en este punto la masa del gravitón se ajusta de manera proporcional a la constaste cosmológica. Luego, en 2001 S. Deser y A. Waldron [6] estudiando la estabilidad de gravitones para espacios curvos encontraron propiedades de interés sobre la gravedad parcialmente sin masa, atrayendo gran atención por parte de la comunidad científica y el aumento de investigaciones sobre teorías de gravedad masiva, así como del fenómeno de "Partially Massless".

El presente trabajo se encuentra estructurado de la siguiente manera: en el primer capítulo, se realizará un breve repaso de la teoría de la relatividad general, se explicará brevemente la interpretación de helicidad de una partícula, así como se realizará la primera modificación de la relatividad general, es decir, se estudiará la gravitación masiva de Fierz-Pauli en un espacio plano. En el segundo capítulo se formulará la gravedad masiva de Fierz-Pauli en un espacio curvo y se estudiará principalmente el fenómeno "Partially Massless", posteriormente se desarrollará el formalismo de Stueckelberg para conocer de qué manera se obtiene de nuevo la invariancia bajo simetrías de calibre en la teoría, al final de este capítulo se obtendrá el modelo de "Partially Massless" en formalismo triádico en 3 dimensiones. En el tercer capítulo se estudiará la gravedad masiva autodual así como la gravedad masiva topológica, ambos en 3 dimensiones y se demostrará la equivalencia entre ambos modelos solo para un espacio plano. En el capítulo final se estudiará como propaga el modelo de "P.M" en formalismo triádico analizando sus ecuaciones de campo, también se determinará el contenido dinámico de la gravedad masiva autodual para espacios (A)dS, además se obtendrá un modelo de tercer orden en sus derivadas para esta teoría y por último se demostrará que la acción de segundo orden en lenguaje métrico de una acción intermedia resultante del modelo autodual para (A)dS, es el caso de "Partially Massless" en espacios (A)dS para una acción propuesta por C. Aragone, P. Arias y A. Khoudeir en 1997 [7] inicialmente para espacio plano.

1.2. Relatividad General

Como ya es ampliamente conocida, la acción de Einstein-Hilbert viene dada de una manera simple y elegante

$$I_{EH} = \frac{1}{2\kappa} \int d^D x \sqrt{-g}\; R \, . \tag{1.2.1}$$

Donde g es el determinante de la métrica. Siendo R el escalar de Ricci o escalar de curvatura y R_{mn} el tensor de Ricci, vienen dados de la forma

$$\begin{aligned} R &= g^{mn} R_{mn} \, . \\ R_{mn} &= \partial_p \Gamma^p_{\ mn} - \partial_n \Gamma^p_{\ pm} + \Gamma^p_{\ pq} \Gamma^q_{\ mn} - \Gamma^p_{\ nq} \Gamma^q_{\ pm} \, . \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

Las ecuaciones de Einstien son:

$$G_{mn} = 0 \, , \quad G_{mn} = R_{mn} - \frac{1}{2} g_{mn} R \, , \tag{1.2.3}$$

donde G_{mn} es conocido como el tensor de Einstein.

Para linealizar esta acción es necesario realizar una perturbación de primer orden a la métrica, de la siguiente manera:

$$g_{mn} = \eta_{mn} + \kappa h_{mn} \, , \tag{1.2.4}$$

donde η_{mn} es la métrica de Minkowski y será nuestra métrica background, además h_{mn} es un campo tensorial simétrico de segundo orden que representa el campo del gravitón, donde sus índices pueden ser ascendidos o descendidos a partir del tensor métrico. La acción linealizada viene expresada como:

$$I_{EH} = \int d^D x \, \{ -\frac{1}{2} \partial_p h_{mn} \partial^p h^{mn} + \partial_m h_{np} \partial^n h^{mp} - \partial_m h_{mn} \partial^n h + \frac{1}{2} \partial_p h \partial^p h \} \, . \tag{1.2.5}$$

Esta acción es invariante bajo transformaciones de calibre de la forma:

$$\delta h_{mn} = \partial_m \xi_n + \partial_n \xi_m \, . \tag{1.2.6}$$

La acción de la gravedad linealizada en un espacio plano propaga tal que

$$Grados\ de\ Libertad(D) = \frac{D(D-3)}{2} \, . \tag{1.2.7}$$

Para el caso cuando D=4, la acción describe un gravitón sin masa con 2 grados de libertad. Sin embargo, para el caso D=3, esta acción no describe ningún grado de libertad, por lo tanto es una teoría sin grados de libertad dinámicos y no propaga ondas gravitacionales.

Cualquier onda plana Ψ que transforme bajo una rotación a cualquier angulo sobre la dirección de su propagación de la forma

$$\Psi' = e^{ih\theta}\Psi, \tag{1.2.8}$$

se dice que la partícula asociada a la onda Ψ posee *helicidad* h o *espín* [8]. A partir de esta helicidad las partículas se pueden caracterizar. La regla de transformación para las partículas denominadas *bosones* viene dada por $h \geqslant 0$. En el caso cuando las partículas posean $h = 0$ estas pueden ser descritas a partir de un campo escalar ϕ. Para partículas con $h = 1$ es necesario usar un campo vectorial A_m y la acción que describe estas partículas obligatoriamente debe ser la acción de Maxwell. Ahora, para poder describir partícula que posee $h = 2$ es necesario usar la acción de Einstein-Hilbert linealizada, que requiere la presencia de simetrías de calibres.

1.3. Gravedad masiva en un espacio plano

Markus Fierz y Wolfgang Pauli en su artículo de 1939 [2], introdujeron la acción y las ecuaciones de campo para describir una partícula libre con masa y de espín 2, mediante la exigencia de invariancia bajo Lorentz y energía positiva. En un espacio de Minkowski estos requerimientos pueden resolverse siguiendo un enfoque a partir de teoría de grupos exigiendo que las partículas formen representaciones unitarias del grupo de Poincaré. El resultado de este trabajo tuvo como resultado un término de masa de la forma

$$\mathcal{L}_{\mu\neq 0} = -\frac{1}{4}\mu^2(h_{mn}h^{nm} - h^2)\ . \tag{1.3.1}$$

Que luego se agregará a la acción de Einstein-Hilbert, se denomina la acción de Fierz-Pauli linealizada para un espacio plano

$$\begin{aligned} I_{FP} = \int d^Dx\, \{ &-\frac{1}{2}\partial_p h_{mn}\partial^p h^{mn} + \partial_m h_{np}\partial^n h^{mp} - \partial_m h_{mn}\partial^n h \\ &+ \frac{1}{2}\partial_p h \partial^p h - \frac{1}{4}\mu^2(h_{mn}h^{nm} - h^2)\}\ . \end{aligned} \tag{1.3.2}$$

Esta acción es libre de grados de propagación "fantasma". Sin embargo, el término de masa viola la simetría de calibre. Únicamente en un espacio plano trae problemas para convertir esta acción en una acción invariante bajo transformaciones de calibre y no puede ser forzada por ninguna simetría conocida. No obstante, este problema se logra resolver al acoplar la acción de Fierz-Pauli a un background (A)dS con lo cual puede emerger una simetría de calibre ("Partially Massless"), como se verá más adelante.

Esta acción propaga tal que

$$Grados\ de\ Libertad(D) = \frac{(D+1)(D-2)}{2}\ . \tag{1.3.3}$$

En el caso cuando D=4, la acción propaga 5 grados de libertad y describe un gravitón con masa de helicidad 2, un campo vectorial de helicidad 1 y un campo escalar de helicidad 0. En el caso cuando D=3, la acción propaga 2 grados de libertad y describe un campo vectorial con helicidad 1 y un campo escalar de helicidad 0. Este análisis se aplica tanto para el caso plano (espacio de Minkowski), como para el caso de curvatura constante (Espacio (A) de Sitter).

La ecuación de Fierz-Pauli viene dada por

$$(\Box - \mu^2)\Psi_{mn} = 0\ . \tag{1.3.4}$$

Capítulo 2

“Partially Massless”

2.1. Gravedad Masiva en espacios curvos

A continuación se prestará especial atención a la acción linealizada para un gravitón masivo que se propaga en un espacio de curvatura constante (A)dS. Para este propósito se parte de la acción de Einstein-Hilbert en un espacio (Anti)de Sitter, en D dimensiones, el cual viene dado de la siguiente manera:

$$I_{EH} = \int d^D x \sqrt{-g} \ \{ \ R - 2\Lambda \ \}. \tag{2.1.1}$$

Las ecuaciones de campo que describe la acción anterior, sin distribución local de materia (sin fuentes) son:

$$G_{mn} + \Lambda g_{mn} = 0 \ , \tag{2.1.2}$$

donde Λ es la constante cosmológica, las ecuaciones de Einstein implican que la curvatura del espacio-tiempo es totalmente determinada por la constante cosmológica mientras no hayan fuentes locales ($T_{mn} = 0$). El tensor de Einstein G_{mn} depende completamente del tensor de curvatura debido a que el tensor de Weyl en 3 dimensiones es exactamente igual a cero, por lo tanto en 3 dimensiones la teoría propaga 0 grados de libertad (no existen ondas gravitaciones), es decir, no existen gravitones sin masa tanto para un espacio plano ($\Lambda = 0$) como para un espacio curvo ($\Lambda \neq 0$).

Para linealizar esta acción es necesario realizar una perturbación de primer orden a la métrica, de la siguiente manera:

$$g'_{mn} = g_{mn} + \kappa h_{mn} \ , \tag{2.1.3}$$

donde g_{mn} es una métrica para espacios (A) de Sitter y será nuestra métrica background, además h_{mn} es un campo tensorial que cumple los mismos requisitos que en el caso plano. La acción linealizada viene expresada como:

$$\begin{aligned} I_{EH} = \int d^D x \sqrt{-g} \, \{ & -\frac{1}{4} \nabla_p h_{mn} \nabla^p h^{mn} + \frac{1}{4} \nabla_p h \nabla^p h - \frac{1}{2} \nabla^m h_{mn} \nabla_n h \\ & + \frac{1}{2} \nabla_p h_{mn} \nabla^n h^{mp} + \frac{\Lambda}{D-2} h_{mn} (h^{mn} - \frac{1}{2} g^{mn} h) \} \ , \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

esta acción es invariante bajo la siguiente transformación de calibre:

$$\delta h_{mn} = \nabla_m \xi_n + \nabla_n \xi_m \ . \tag{2.1.5}$$

Ahora se añadirá un término masivo tipo Fierz-Pauli a la acción de Einstein-Hilbert, cumpliendo que este término sea invariante bajo Lorentz y preserve la unitariedad en nuestra teoría, sin embargo, ya es ampliamente conocido que al agregar el nuevo término masivo, rompe la simetría de calibre (2.1.2). Así la nueva acción queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} I_{FP} = \int d^D x \sqrt{-g} \, \{ & -\frac{1}{4} \nabla_p h_{mn} \nabla^p h^{mn} + \frac{1}{4} \nabla_p h \nabla^p h - \frac{1}{2} \nabla^m h_{mn} \nabla_n h + \frac{1}{2} \nabla_p h_{mn} \nabla^n h^{mp} \\ & + \frac{\Lambda}{D-2} h_{mn} (h^{mn} - \frac{1}{2} g^{mn} h) - \frac{1}{4} \mu^2 (h_{mq} h^{qm} - h^2) \} \ . \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

Es de notar que en la acción de Fierz-Pauli todos los términos de h_{mn} y h con derivadas sobreviven cuando $\mu = 0$ y de esta forma se obtiene nuevamente la acción linealizada de Einstein-Hilbert, así cuando $\mu = 0$ la acción en 4 dimensiones describe un gravitón con helicidad 2 que posee simetrías de calibre ya mencionadas.

Para D=4 la acción de Fierz-Pauli describe una partícula masiva de espín 2 con 5 grados de liberta y masa μ. Sin embargo, en D=3 la acción describe 2 grados de libertad.

Teniendo en cuenta que el tensor de curvatura, para un espacio de curvatura constante (máximamente simétrico) viene dado por

$$R_{mpnq} = \frac{2 \ \Lambda}{(D-2)(D-1)} (g_{mn} g_{pq} - g_{mq} g_{pn}) \ . \tag{2.1.7}$$

Donde el tensor de Ricci viene dado por

$$R_{mn} = \frac{2 \ \Lambda}{(D-2)} g_{mn} \ , \tag{2.1.8}$$

y el escalar de Ricci, es decir, el escalar de curvatura viene dado por

$$R = \frac{2D}{(D-2)}\ \ \Lambda\ , \tag{2.1.9}$$

Ahora, se realizará una revisión de cómo obtener los grados de libertad de este modelo. Para el campo escalar h_{mn} al ser un campo tensorial simétrico, en 4 dimensiones posee 10 grados de libertad y en 3 dimensiones el campo posee 6 grados de libertad, a medida que se obtengan restricciones en la teoría se reducirán estos grados de libertad.

Realizando variaciones sobre h_{mn} se puede encontrar la ecuación de movimiento a primer orden:

$$\frac{\delta I_{FP}}{\delta h_{mn}} = G_{mn} = 0\ , \tag{2.1.10}$$

donde G_{mn} es el tensor de Einstein, viene dado por:

$$\begin{aligned} G_{mn} =& \nabla^2 h_{mn} - \frac{4D\ \Lambda}{(D-2)(D-1)}(h_{mn} - \frac{1}{D}g_{mn}h) - (\nabla_m \nabla^p h_{mp} + \nabla_n \nabla^p h_{mp}) \\ &+ \nabla_m \nabla_n h - g_{mn}(\nabla^2 h - \nabla_p \nabla_q h^{pq}) + \frac{4\ \Lambda}{(D-2)}(h_{mn} - \frac{1}{2}g_{mn}h) \\ &- \mu^2(h_{mn} - \frac{1}{2}g_{mn}h) = 0\ . \end{aligned} \tag{2.1.11}$$

Ahora considerando la traza de G_{mn}

$$\begin{aligned} &g^{mn}G_{mn} = 0 \\ &\quad G^m{}_m = -(D-2)[\nabla^2 h - \nabla_m \nabla_n h^{mn}] + [(D-1)\mu^2 - 2\Lambda]h = 0\ , \end{aligned} \tag{2.1.12}$$

donde se puede obtener la siguiente relación:

$$\nabla^2 h - \nabla_m \nabla_n h^{mn} = \frac{1}{(D-2)}[(D-1)\mu^2 - 2\Lambda]h\ . \tag{2.1.13}$$

Considerando la divergencia de G_{mn}:

$$\nabla^n G_{mn} = \mu^2(\nabla_m h - \nabla^n h_{mn}) = 0\ . \tag{2.1.14}$$

Asumiendo que $\mu \neq 0$, de la relación anterior se puede notar cuatro ecuaciones de restricción para h_{mn} para el caso de 4 dimensiones o tres ecuaciones de restricción para el caso en tres dimensiones. Esto elimina 4 o 3 grados de libertad de los 10 o 6 grados de libertad inicialmente, dejando solo 6 o 3 grados libertad en la teoría para $D = 4$ o $D = 3$ respectivamente.

Se puede hallar una restricción escalar, tomando una segunda divergencia de la ecuación anterior

$$\nabla^m \nabla^n G_{mn} = -\mu^2(\nabla^2 h - \nabla_m \nabla_n h^{mn}) = 0 \ , \tag{2.1.15}$$

sumando los términos [2.1.12] y [2.1.15] de la siguiente manera:

$$\nabla^m \nabla^n G_{mn} + \frac{\mu^2}{(D-2)} G = \frac{\mu^2}{(D-2)}[(D-1)\mu^2 - 2\Lambda]h = 0 \ . \tag{2.1.16}$$

Se puede ver que la combinación lineal anterior no contiene ninguna derivada ni de primer ni de segundo orden y por lo tanto provee otra restricción escalar según sea el caso.

Para parámetros generales de μ y Λ, esta restricción implica que $h = 0$ y a partir de la ecuación [2.1.14], nos indica que $\nabla^n h_{nm} = 0$ y así el campo h_{mn} es simétrico, transverso y sin traza en el vació. Si se toma esta solución, la teoría describe un gravitón masivo con 5 o 2 grados de libertad en $D = 4$ o $D = 3$ respectivamente.

Dos excepciones al resultado previo ocurre en los siguientes casos:

Primer caso

$$\mu^2 = 0 \ \ , \tag{2.1.17}$$

segundo caso

$$\mu^2 = \frac{2}{(D-1)}\Lambda \ . \tag{2.1.18}$$

Cuando $\mu^2 = 0$, es el caso de un gravitón sin masa y no contiene ninguna restricción directa en la ecuación [2.1.14], así la teoría tiene la simetría bajo difeomorfismo de la relatividad general [1.2.6].

En el caso cuando $(D-1)\mu^2 = 2\Lambda$, la combinación lineal [2.1.16] desaparece de manera 'off-shell' y por lo tanto aparece una nueva simetría escalar de calibre donde las ecuaciones de campo son invariantes bajo transformaciones de calibre. Este valor en específico de μ^2 es llamado *"Partially Massless"* [5] y fue hallado por S. Deser y R. Nepomechie en 1983.

$$h_{mn} \to h_{mn} + \delta h_{mn} \ , \ \ \delta h_{mn} = \nabla_m \nabla_n \xi + \frac{2\Lambda}{(D-1)} g_{mn} \xi \ . \tag{2.1.19}$$

Donde ξ es un parámetro de la simetría de "Partially Massless". Es importante mencionar que una simetría de calibre elimina dos grados de libertad en comparación con las restricciones que solo eliminan un grado de libertad, así de los 6 grados de libertad restantes se eliminan 2 grados de libertad en la teoría con 4 dimensiones, para un total de 4 grados de libertad que propaga la teoría. En 3 dimensiones, de los 3 grados de libertad restantes se eliminan 2 grados de libertad para un total de un solo grado de libertad que propaga la teoría.

2.2. El formalismo de Stueckelberg

Si escribimos la acción de Fierz-Pauli para el caso plano de la siguiente manera:

$$I = I_{\mu=0} + \int d^D x \sqrt{-g}\ \{-\frac{1}{2}\mu^2(h_{mn}h_{nm} - h)\}\ , \tag{2.2.1}$$

siendo $I_{\mu=0}$ de la forma

$$\begin{aligned} I_{\mu=0} = I_{EH} = \int d^D x \sqrt{-g}\ \{ & -\frac{1}{4}\nabla_p h_{mn}\nabla^p h^{mn} + \frac{1}{4}\nabla_p h \nabla^p h \\ & - \frac{1}{2}\nabla^m h_{mn}\nabla_n h + \frac{1}{2}\nabla_p h_{mn}\nabla^n h^{mp}\ \}\ . \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

Redefiniendo ahora el campo h_{mn} como [9]:

$$h_{mn} \to h_{mn} + \partial_m a_n + \partial_n a_m\ . \tag{2.2.3}$$

Esta redefinición del campo h_{mn} deja inalterado $I_{\mu=0}$ y modifica al término masivo. La acción queda de la siguiente manera

$$h_{mn}h_{nm} - h = h_{mn}h_{nm} - h + 4(h_{mn}\partial_m a_n + h\ \partial_m a_m) + 2\partial_m a_n \partial_m a_n - 2\partial_m a_n \partial_m a_n, \tag{2.2.4}$$

los últimos dos términos se pueden escribir como:

$$F_{mn}F_{nm} = 2\partial_m a_n \partial_m a_n - 2\partial_m a_n \partial_m a_n. \tag{2.2.5}$$

La acción [2.2.1] queda de la forma:

$$I = I_{\mu=0} - \frac{1}{2}\mu^2(h_{mn}h_{nm} - h) - \frac{1}{2}\mu^2 F_{mn}F_{mn} - 2\mu^2(h_{mn}\partial_m a_n - h\ \partial_m a_m). \tag{2.2.6}$$

La cual tiene las siguientes simetrías de calibre:

$$\begin{aligned} \delta h_{mn} &= \partial_m \xi_n + \partial_n \xi_m. \\ \delta a_m &= -\xi_m. \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

Si ahora redefinimos el campo vectorial a_m:

$$\delta a_m = a_m + \partial_m \phi\ , \tag{2.2.8}$$

donde:

$$A_m \longrightarrow \frac{1}{\mu} a_m \quad , \quad \phi \longrightarrow \frac{1}{\mu^2} \phi \; . \tag{2.2.9}$$

La acción queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} I = I_{\mu=0} - \frac{1}{2}\mu^2(h_{mn}h_{nm} - h) - \frac{1}{2}F_{mn}F_{mn} - 2\mu(h_{mn}\partial_m A_n - h\,\partial_m a_m) \\ - 2\mu(h_{mn}\partial_m\partial_n\phi - h\Box\phi) \; . \end{aligned} \tag{2.2.10}$$

Esta acción es invariante bajo las siguientes transformaciones de calibre:

$$\begin{aligned} \delta h_{mn} &= \partial_m \xi_n + \partial_n \xi_m \; . \\ \delta a_m &= -\xi_m \; . \\ \delta\phi &= \mu\,\lambda \; . \end{aligned} \tag{2.2.11}$$

2.3. El formalismo de Stueckelberg para espacios (A)dS

Sea la acción de Einstein-Hilbert linealizada en un espacio (A)dS con un término masivo tipo Fierz-Pauli y un término de fuente $h_{mn}T^{mn}$ para ser más generales

$$\begin{aligned} I_{FP} = \int d^D x\sqrt{-g}\,\{ -\frac{1}{4}\nabla_p h_{mn}\nabla^p h^{mn} + \frac{1}{4}\nabla_p h\nabla^p h - \frac{1}{2}\nabla^m h_{mn}\nabla_n h \\ + \frac{1}{2}\nabla_p h_{mn}\nabla^n h^{mp} + \frac{\Lambda}{D-2}h_{mn}(h^{mn} - \frac{1}{2}g^{mn}h) \\ - \frac{1}{4}\mu^2(h_{mq}h^{qm} - h^2) + h_{mn}T^{mn}\} \; . \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

Ahora se introduce un campo vectorial de Stueckelberg A_m a través de la sustitución:

$$h_{mn} \to h_{mn} + \nabla_m A_n + \nabla_n A_m \; , \tag{2.3.2}$$

esta nueva elección del campo tensorial h_{mn} solo afectará al término de masa, ya que se asume la conservación covariante de T^{mn}, así:

$$\begin{aligned} I_{FP} = L_{\mu=0} + \int d^D x\sqrt{-g}\,\{ -\frac{1}{2}(h_{mn}h^{mn} - h^2) - \frac{1}{2}\mu^2 F_{mn}F^{mn} + \frac{4\Lambda}{(D-2)}\mu^2 A_m A^m \\ - 2\mu^2(h_{mn}\nabla^m A^n - h\nabla_m A^m) + h_{mn}T^{mn}\} \; , \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

donde

$$F_{mn} = \nabla_m A_n - \nabla_n A_m \; . \tag{2.3.4}$$

Se puede notar que aparece un término de masa vectorial. La acción anterior es invariante bajo las siguientes transformaciones de calibre

$$\begin{aligned} \delta h_{mn} &= \nabla_m \xi_n + \nabla_n \xi_m \; . \\ \delta A_m &= -\xi_m \; . \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

Lo siguiente es introducir un campo escalar tipo Stueckelberg y sus simetrías de calibre asociada

$$A_m \to A_m + \nabla \phi, \quad \delta A_m = \nabla_m \Lambda \, , \quad \delta \phi = -\Lambda \; . \tag{2.3.6}$$

La acción se reescribe entonces como

$$\begin{aligned} I_{FP} = \int d^D x \sqrt{-g} \, \{ & - L_{\mu=0} - \frac{1}{2}(h_{mn}h^{mn} - h^2) - \frac{1}{2}\mu^2 F_{mn}F^{mn} + \frac{4\Lambda}{(D-2)}\mu^2 A_m A^m \\ & - 2\mu^2 (h_{mn}\nabla^m A^n - h \nabla_m A^m) + \frac{8\Lambda}{(D-2)}\mu^2 A^m \nabla_m \phi \\ & + \frac{4\Lambda}{(D-2)}\mu^2 (\nabla_m \phi)^2 - 2\mu^2 (h_{mn}\nabla^m \nabla^n \phi - h \Box \phi) + h_{mn}T^{mn} \} \; . \end{aligned} \tag{2.3.7}$$

Si ahora se redefine h_{mn} como

$$\begin{aligned} h_{mn} &= h'_{mn} + g^{mn}\psi \; . \\ h &= h' + D\psi \; , \end{aligned} \tag{2.3.8}$$

luego de esta redefinición conformal, la acción es la siguiente:

$$\begin{aligned} I_{FP} = \int d^D x \sqrt{-g} \, \{ & \frac{1}{2}\nabla_p h'_{mn}\nabla_p h'^{mn} + \frac{1}{2}\nabla_p h' \nabla_p h' - \nabla_m h' \nabla_n h'_{mn} + \nabla_p h'_{mn} \nabla_n h'_{mp} \\ & + \frac{2\Lambda}{(D-2)}[h'_{mn}h'^{mn} - \frac{1}{2}h' + 2\mu^2(\nabla_m\phi)^2 + 4\mu^2 A^m \nabla_m \phi + 2\mu^2 A_m A^m] \\ & - \frac{1}{2}\mu^2 F_{mn}F^{mn} - 2\mu^2 (h'_{mn}\nabla_m A_n - h'\nabla_p A^p + h'_{mn}\nabla_m \nabla_n \phi - h' \Box \phi) \\ & + (D-2)[\nabla_m h' \nabla_m \psi - \nabla_m h'_{mn}\nabla_n \psi + \frac{1}{2}(D-1)\nabla_m \psi \nabla_m \psi] \\ & - 2\Lambda (h'\psi + \frac{D}{2}\psi^2) + 2\mu^2 (D-1)(\psi \nabla_m A^m + \psi \Box \phi) \\ & + \mu^2 (D-1) h' \psi + \frac{1}{2}\mu^2 D(D-1)\psi^2 + h'_{mn}Tmn + \psi T \;\; \} \; . \end{aligned} \tag{2.3.9}$$

Ahora se ajustará el campo Ψ de la forma

$$\psi = \frac{2}{D-2}\phi \; . \tag{2.3.10}$$

Finalmente la acción se puede escribir de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
I_{FP} = \int d^D x \sqrt{-g}\ \{ & L_{\mu=0}(h') - \frac{1}{2} F_{mn} F^{mn} + \frac{4\Lambda}{(D-2)} \mu^2 A_m A^m - 2\mu^2 (h'_{mn} \nabla_m A_n - h' \nabla_m A^m) \\
& \frac{2\mu^2}{(D-2)} [(D-1)\mu^2 - 2\Lambda][2\phi \nabla_m A^m + h'\phi] - h'_{mn} T^{mn} + \frac{2}{(D-2)} \mu^2 \phi T \\
& \frac{2\mu^2}{(D-2)} [(D-1)\mu^2 - 2\Lambda][(\nabla_m \phi)^2 - \frac{\mu^2 D}{(D-2)} \phi^2]\ \} .
\end{aligned}
\tag{2.3.11}
$$

Invariante bajo estas simetrías de calibre:

$$
\begin{aligned}
\delta h'_{mn} &= \nabla_m \xi_n + \nabla_n \xi_m + \frac{2}{(D-2)} \mu^2 g_{mn} \lambda . \\
\delta A_m &= -\xi_m + \partial_m \lambda . \\
\delta \phi &= -\lambda .
\end{aligned}
\tag{2.3.12}
$$

El punto resaltante es que existe un ajuste entre el parámetro de masa μ y la constante cosmológica Λ, que hace anular la presencia del campo escalar ϕ, en particular los términos donde el campo escalar aparece acoplado con los otros campos, esto ocurre cuando:

$$
\mu^2 = \frac{2}{(D-1)} \Lambda . \tag{2.3.13}
$$

Cuando se sustituye el nuevo valor de μ dentro de la acción de Fierz-Pauli, se obtiene la acción denominada *"Partially Massless"*

$$
\begin{aligned}
I_{FP} = \int d^D x \sqrt{-g}\ \{ & -\frac{1}{4} \nabla_p h_{mn} \nabla^p h^{mn} + \frac{1}{4} \nabla_p h \nabla^p h - \frac{1}{2} \nabla^m h_{mn} \nabla_n h + \frac{1}{2} \nabla_p h_{mn} \nabla^n h^{mp} \\
& - \frac{\Lambda}{2(D-1)(D-2)} (D\ h_{mn} h^{mn} - h^2) + h_{mn} T^{mn} \} ,
\end{aligned}
\tag{2.3.14}
$$

la nueva simetría de calibre [2.3.12], elimina un grado de libertad en la teoría, así

$$
\textit{Grados de Libertad}(D) = \frac{(D+1)(D-2)}{2} - 1 . \tag{2.3.15}
$$

En el caso cuando D=4, la acción se propaga con 4 grados de libertad. Cuando D=3, la acción describe una teoría con un solo grado de libertad.

2.4. “Partially Massless” en formalismo triádico

Para conocer mejor la relación de la relatividad general con las teorías de calibre, es conveniente escoger una base ortogonal para el espacio tangente [Ver apéndice C], lo cual no está relacionado a la escogencia de coordenadas, este será el marco apropiado para relacionar PM con la gravedad autodual en 3D. Ahora nos dirigimos a trabajar estrictamente en 3 Dimensiones. La acción de Einstein-Hilbert en formalismo triádico se escribe como

$$I_{EH} = -\frac{1}{2}\int d^3x\sqrt{-g}\,\{\,\varepsilon^{mnp}e_{pa}R_{mn}{}^{a}\}\,, \tag{2.4.1}$$

siendo

$$R_{\mu\nu}{}^{ab} = e^{a\lambda}\,e^{b\rho}\,R_{\mu\nu\lambda\rho}\,, \tag{2.4.2}$$

y

$$\begin{aligned} R_{mn}{}^{a} &= \varepsilon^{abc}\,R_{mnbc}\,. \\ R_{mn}{}^{a} &= \partial_m w_n{}^{a} - \partial_n w_m{}^{a} + \varepsilon^{abc}w_{mb}w_{nc}\,, \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

con

$$w_m{}^{a} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{abc}\,w_{mbc}\,. \tag{2.4.4}$$

En una formulación de primer orden, variaciones independientes de w_{ma} conducen a la restricción de torsión cero

$$T_{mn}{}^{a} = \partial_m e_n{}^{a} + \varepsilon^{abc}w_{mb}e_n{}^{c} - \partial_n e_m{}^{a} - \varepsilon^{abc}w_{nb}e_m{}^{c} = 0\,, \tag{2.4.5}$$

resolviendo para el campo w_{pa}

$$w_{pa} = \frac{1}{2}e_{pa}e_c{}^{m}e_d{}^{n}\varepsilon_b{}^{cd}\partial_m e_n{}^{b} - e_{pb}e_c{}^{m}e_d{}^{n}\varepsilon^{acb}\partial_m e_n{}^{b}\,, \tag{2.4.6}$$

si se linealiza e_{pa}

$$e_{pa} = \eta_{np} + h_{pa}\,, \tag{2.4.7}$$

se obtiene por lo tanto

$$w_{pa} = \frac{1}{2}\eta_{pa}\varepsilon^{mnr}\partial_m h_{nr} - \varepsilon_a{}^{mn}\partial_m h_{np}\,, \tag{2.4.8}$$

sustituyendo la ecuación [2.4.3] en la acción [2.4.1] y realizando la linealización

$$\begin{aligned} I_{EH} &= -\int d^3x\sqrt{-g}\,\{\,\varepsilon^{mnp}h_{pa}[\partial_m w_n{}^{a} - \partial_n w_m{}^{a} + \varepsilon^{abc}w_{mb}w_{nc}]\}\,. \\ &= -\int d^3x\sqrt{-g}\,\{\,\varepsilon^{mnp}\varepsilon^{abc}h_{ma}w_{nb}w_{pc}\,\}\,. \\ &= \int d^3x\sqrt{-g}\,\{\,w_{np}w_{pn} - w^2\,\}\,. \end{aligned} \tag{2.4.9}$$

La acción de Einsten-Hilbert escrita en el formalismo triádico en un background (A) de sitter viene dado por

$$I_{EH} = -\int d^3x\sqrt{-g}\ \{\ \frac{1}{2}\ \varepsilon^{mnp}e_{pa}R_{mn}^{\ \ a} - \Lambda\ e\}\ . \tag{2.4.10}$$

La acción linealizada de la gravedad con constante cosmológica en 3D, viene escrita

$$I_{EH} = \int d^3x\ \{w_{mn}\varepsilon^{mpq}\nabla_p e_q^{\ n} - \frac{1}{2}\sqrt{-g}(w_{mn}w^{mm} - w^2) + \frac{1}{2}\Lambda(e_{mn}e^{nm} - e^2)\}\ . \tag{2.4.11}$$

Esta es una acción de primer orden, donde las triadas e_{mn} y las conexiones w_{mn} son consideradas variables independientes y es una acción invariante bajo las siguientes transformaciones de calibre:

$$\delta e_{mn} = \nabla_m\xi_n + \varepsilon_{mnr}\zeta^r\ \ , \qquad \delta w_{mn} = \nabla_m\zeta_n - \Lambda\ \varepsilon_{mnr}\xi^r\ . \tag{2.4.12}$$

Realizando variaciones independientes sobre w_{mn} y e_{mn}

$$\frac{\delta I_{EH}}{\delta w_{mn}} = 0 \to \quad \varepsilon^{mpq}\nabla_p e_q^{\ n} - \sqrt{-g}\ (w^{mn} - g^{mn}w) = 0\ . \tag{2.4.13}$$

$$\frac{\delta I_{EH}}{\delta e_{mn}} = 0 \to \quad \varepsilon^{mpr}\ \nabla_p w_r^{\ n} - \Lambda\ (e^{mn} - g^{mn}e) = 0\ . \tag{2.4.14}$$

A partir de la traza de la expresión [2.4.13] se determina w_{mn}

$$w^{mn} = \varepsilon^{mpq}\nabla_p e_q^{\ n} - \frac{1}{2\sqrt{g}}g^{mn}\varepsilon^{pqr}\nabla_p e_{qr}\ , \tag{2.4.15}$$

sustituyendo en la acción [2.4.11], se obtiene una acción de segundo orden en las derivadas.

$$\begin{aligned} I_{EH} = \int d^3x\ \{\ -\frac{1}{2}e_{mq}\ \varepsilon^{mnp}\varepsilon^{qrs}\nabla_n\nabla_r e_{rs} + \frac{1}{4\sqrt{g}}\varepsilon^{mnq}\varepsilon^{rst}\nabla_n\nabla_r e_{st} \\ + \frac{1}{2}\Lambda(e_{mn}e^{nm} - e^2)\ \}\ , \end{aligned} \tag{2.4.16}$$

expandiendo y realizando álgebra se es posible obtener

$$\begin{aligned} I_{EH} = \int d^3x\sqrt{g}\ \{\ \frac{1}{2}e\nabla^2 e + \frac{1}{4}e_{mp}\nabla^2(e^{mp} + e^{pm}) - \frac{1}{4}(e_{mp} + e_{pm})\nabla_n\nabla^m(e^{np} + e^{pn}) \\ + e\nabla_m\nabla_n e^{mn} + \frac{1}{2}\Lambda e^m_{\ r}e^r_{\ m} - \frac{1}{2}\Lambda e^2 + \Lambda e_{mn}e^{mn}\}\ , \end{aligned} \tag{2.4.17}$$

si separamos el campo e_{mn} en su parte simétrica y antisimétrica de la forma

$$e_{mn} = h_{mn} + V_{mn} \ , \tag{2.4.18}$$

donde h_{mn} es su parte simétrica y V_{mn} es su parte antisimétrica, así

$$\begin{aligned} I_{EH} = \int d^3x \sqrt{-g}\ \{ & -\frac{1}{4}\nabla_p h_{mn}\nabla^p h^{mn} + \frac{1}{4}\nabla_p h \nabla^p h - \frac{1}{2}\nabla^m h_{mn}\nabla_n h \\ & + \frac{1}{2}\nabla_p h_{mn}\nabla^n h^{mp} + \Lambda\ h_{mn}(h^{mn} - \frac{1}{2}g^{mn}h) + \Lambda\, V_{mn}V^{mn}\ \} \ . \end{aligned} \tag{2.4.19}$$

Donde se obtiene de la acción de Einstein-Hilbert para la componente simétrica del campo e_{mn} y vemos desacoplado y sin dinámica el campo V_{mn}.

Ahora si agregamos un término de masa tipo Fierz-Pauli en lenguaje triádico a la acción

$$\begin{aligned} I_{FP} = \int d^3x\ \{ & w_{mn}\varepsilon^{mpq}\nabla_p e_q{}^n - \frac{1}{2}\sqrt{-g}(w_{mn}w^{nm} - w^2) \\ & + \frac{1}{2}\Lambda(e_{mn}e^{nm} - e^2) - \frac{1}{2}\mu^2(e_{mn}e^{nm} - e^2)\} \ , \end{aligned} \tag{2.4.20}$$

si se toma la condición de “Partially Massless” $\mu^2 = \Lambda$ y se sustituye en la acción anterior se puede ver como los últimos dos términos se eliminan entre si y por lo tanto la acción de “Partially Massless” para el formalismo triádico en 3 dimensiones es

$$I_{PM} = \int d^3x\ \{w_{mq}\varepsilon^{mnp}\nabla_n e_p{}^q - \frac{1}{2}\sqrt{-g}(w_{mn}w^{nm} - w^2)\} \ , \tag{2.4.21}$$

esta acción es invariante bajo las siguientes transformaciones de calibre:

$$\delta e_{mn} = \nabla_m\nabla_n\xi + \Lambda\ g_{mn}\xi \ \ , \quad \delta w_{mn} = 0 \ . \tag{2.4.22}$$

Realizando el mismo procedimiento para escribir esta acción solo en términos del campo e_{mn} y luego descomponiendo en su parte simétrica y antisimétria se puede obtener la acción de "Partially Massless" de segundo orden en lenguaje métrico.

$$I_{PM} = \int d^3x\sqrt{-g}\,\{-\frac{1}{4}\nabla_p h_{mn}\nabla^p h^{mn} + \frac{1}{4}\nabla_p h\nabla^p h - \frac{1}{2}\nabla_m h^{mn}\nabla_n h + \frac{1}{2}\nabla_p h_{mn}\nabla^n h^{mp} + \frac{1}{4}\Lambda\,(3h_{mq}h^{qm} - h^2) + \Lambda\,V_{mn}V^{mn}\,\}\,, \tag{2.4.23}$$

donde de nuevo la componente antisimétrica del campo e_{mn} no está acoplado a la acción y por lo tanto no posee dinámica.

Debemos recordar que la acción de Einstein-Hilbert linealizada en 3D para el caso plano se escribe de la siguiente manera:

$$I_{EH} = \int d^3x\;\{w_{mq}\varepsilon^{mnp}\partial_n e_p{}^q - \frac{1}{2}(w_{mn}w^{nm} - w^2)\}\,, \tag{2.4.24}$$

posee una forma similar a la acción de P.M en lenguaje triádico [2.4.21], salvo la derivada parcial y no una covariante, además el último término sin ser multiplicado por la densidad de volumen $\sqrt{-g}$.

Debemos recordar que la acción de E-H tiene una solución trivial en 3 dimensiones, es decir, no propaga grados de libertad dinámicos. Si acoplamos minimalmente la acción de E-H en lenguaje triádico a un espacio curvo, obtenemos la acción de P.M [2.4.21] y aparece un grado de libertad, dando a la teoría propagación dinámica.

Capítulo 3

Gravedad Autodual en 3D

S. Deser, R. Jackiw y S. Templeton [3], proponen en 1982 teorías masivas topológicas tanto para el caso de un campo vectorial como para el caso de un campo tensorial en tres dimensiones. trayendo consigo características interesantes; el número de grados de libertad que propagan ambas teorías difieren tanto del caso para campos sin masa como para campos con masa tipo Proca y Fierz-Pauli.

Para el caso vectorial la teoría topológica masiva Abeliana es

$$I = \int d^3x \, \{ \, \frac{1}{4} \, F_{mn}F^{mn} + \frac{\mu}{4}\varepsilon^{mnp}F_{mn}A_p \} \; , \tag{3.0.1}$$

con

$$F_{mn} = \partial_m A_n - \partial_n A_m \, . \tag{3.0.2}$$

Este modelo propaga una partícula masiva de espín 1 que viola paridad, a diferencia de la partícula sin masa de espín 0 que propaga la teoría de Maxwell.

En ese mismo artículo también proponen una teoría topológica vectorial para el caso no Abeliano

$$I = \int d^3x \, \{ \, \frac{1}{2g^2} tr(F^{mn}F_{mn}) - \frac{\mu}{2g^2} \, \varepsilon^{mnp} \, tr(F_{mn}A_p - \frac{2}{3}A_m A_n A_p) \, \} \, , \tag{3.0.3}$$

Usando la notación matricial

$$\begin{aligned} A_m &= gT^a A^a_m \, . \\ F_{mn} &= gT^a F_{mn} = \partial_m A_n - \partial_n A_m + [A_m, A_n] \; , \end{aligned} \tag{3.0.4}$$

donde g es la contante de acoplamiento y con el álgebra del grupo definido de la siguiente manera.

$$[T^a, T^b] = f^{abc}\,T^c \;,\;\; con \quad tr\{T^a\} = 0 \;, \quad tr\{T^a T^b\} = \frac{1}{2}\delta^{ab} \;, \tag{3.0.5}$$

siendo T^a las $n^2 - 1$ matrices hermíticas generadoras del álgebra de Lie.

Por otra parte, P. K. Townsend, K. Pilch y Van Nieuwenhuizen [10], en 1984 proponen la versión masiva autodual para un campo vectorial en 3 dimensiones de la forma

$$I = \int d^3x \,\{\, -\frac{1}{2}\mu^2 A_m A^m + \frac{1}{2}\mu\, \varepsilon^{mnp} A_m \partial_n A_p \,\}, \tag{3.0.6}$$

con

$$A_m \;=\; \frac{1}{2\mu}\,\varepsilon_{mnp}\,F^{np}, \tag{3.0.7}$$

propagando de la misma manera que lo hace la teoria topológica para un campo vectorial con la diferencia de que la acción [3.0.1] es invariante de calibre mientras que la acción masiva autodual no lo es.

Luego S. Deser y R. Jackiw en 1984 [11] probaron que la acción masiva autodual y la acción topológica masiva para campos vectoriales son equivalentes, mediante una acción maestra

$$I = \int d^3x \,\{\, \frac{1}{2}F^m F_m - \frac{1}{\mu}\,F_m\,\varepsilon^{mnp}\partial_n F_p + \frac{1}{2}A_m\,\varepsilon^{mnp}\partial_n F_p \,\} \;, \tag{3.0.8}$$

con

$$F^m \;=\; \varepsilon^{mnp}\partial_n A_p \,, \quad y \quad A_p \;=\; \frac{1}{2\mu}\,\varepsilon_{pst}\,F^{st}\,. \tag{3.0.9}$$

Un procedimiento similar pero más detallado se expondrá en las próximas secciones de este capítulo para el caso de un campo tensorial de espín 2.

3.1. Gravedad Masiva Topológica

Si no existen fuentes locales en la teoría de gravedad para 3 dimensiones, entonces no hay grados de libertad dinámicos gravitacionales y localmente el espacio-tiempo es plano o de curvatura constante, dependiendo del valor de la constante cosmológica (Λ). La ausencia de dinámica local nos indica que la gravedad en 3 dimensiones es completamente determinada por efectos globales y por tanto es una teoría *topológica* [12].

Existen, sin embargo, simetrías de calibre en la teoría y los generadores de estas simetrías forman un álgebra de Lie, el cual depende nuevamente de Λ. Para espacio plano ($\Lambda = 0$) son precisamente las isometrías del espacio-tiempo de Minkowski, es decir, el álgebra de Poincaré ($ISO(2,1)$), para valores negativos de la constante cosmológica aparecen las isometrías ($SO(2,2)$) del espacio-tiempo de Anti-de Sitter(AdS), mientras que para valores positivos de Λ, el álgebra de Lie es dado por isometrías ($SO(3,1)$) del espacio-tiempo de de-Sitter (dS). Así la gravedad 3D puede ser entendida como una teoría de calibre topológica.

La teoría de gravedad masiva topológica en 3 dimensiones propuesta por S. Deser, R. Jackiw y S. Templeton en 1982 [3], en su forma no linealizada viene dada de la forma

$$I_{MT} = \int d^3x\{-\sqrt{-g}\; R + \frac{1}{2\mu}\varepsilon^{mnp}(\Gamma^a_{\ mb}\partial_n\Gamma^b_{\ pa} + \frac{2}{3}\Gamma^a_{\ mc}\Gamma^c_{\ nb}\Gamma^b_{\ pa})\}\ . \qquad (3.1.1)$$

Se debe notar que el signo menos en el primer término es diferente al usual en la acción de E-H, de esa manera se garantiza la propagación dinámica de un solo grado de libertad masivo. El segundo término es invariante topológico Chern-Simons, no es un tensor covariante pero cambia en una derivada total bajo difeomorfismo, por lo tanto la acción es invariante bajo difeomorfismo, obteniendo la ecuación de campo.

$$G_{mn} + \frac{1}{\mu}C_{mn} = 0\ \ ,\quad C_{mn} = \varepsilon_m^{\ \ ab}\partial_a(R_{bn} - \frac{1}{4}g_{bn}R)\ , \qquad (3.1.2)$$

donde C_{mn} es el tensor simétrico, sin traza de Cotton que caracteriza las propiedades conformales y reemplaza al tensor conformal de Weyl el cual se anula en 3D, el tensor de Cotton además es idénticamente igual a cero sí y solo sí la métrica es conformalmente plana.

Linealizando la acción alrededor de un espacio plano y utilizando el formalismo triádico, entonces la acción de la gravedad masiva topológica se escribe la siguiente manera:

$$I_{MT} = \int d^3x\ \{e_{mn}\varepsilon^{mnp}\partial_n W_{pq} + \frac{1}{\mu}W_{mq}\varepsilon^{mnp}\partial_n W_{pq}\}\,, \qquad (3.1.3)$$

donde W_{pq} viene dado de la forma

$$W_{pq} = -\varepsilon_q^{\ \ mn}\partial_m e_{np} + \frac{1}{2}\eta_{pq}\,\varepsilon^{mnr}\partial_m e_{nr}\ . \qquad (3.1.4)$$

Esta acción es invariante bajo las siguientes simetrías de calibre:

$$\delta e_{ma} = \partial_m\xi_a\ ,\quad y \quad \delta e_{ma} = \ \varepsilon_{mab}\lambda^b\,. \qquad (3.1.5)$$

Ahora analizaremos únicamente el término de Chern-Simons, realizando variaciones sobre este

$$\begin{aligned}\delta I_{CS} &= \frac{2}{\mu}\int d^3x\ \{\delta W_{mq}\varepsilon^{mnp}\partial_n W_{pq}\ \}\ .\\ &= \frac{2}{\mu}\int d^3x\ \{\ \delta e_{mq}\varepsilon^{mpn}\partial_n(-\varepsilon_p^{rs}\partial_r W_{sq} - \frac{1}{2}\eta_{pq}\varepsilon^{rst}\partial_r W_{st})\ \}\ .\\ &= \frac{2}{\mu}\int d^3x\ \{\ \delta e_{mq}\varepsilon^{mpn}\partial_n \Omega_p{}^q\ \}\ ,\end{aligned} \tag{3.1.6}$$

donde

$$\Omega_p{}^q\ =\ \varepsilon_p^{rs}\partial_r W_{sq} - \frac{1}{2}\eta_{pq}\varepsilon^{rst}\partial_r W_{st}\ . \tag{3.1.7}$$

Recordemos que la ecuación de Einstein-Hilbert linealizada viene dada por

$$\begin{aligned}G_{mq} &= \varepsilon_m{}^{rn}\varepsilon_q{}^{sp}\partial_r\partial_s e_{np}\ .\\ &= \frac{1}{2}\varepsilon_m{}^{np}\partial_n W_{pq}\ ,\end{aligned} \tag{3.1.8}$$

así las ecuaciones de movimiento de la gravedad masiva topológica son

$$\begin{aligned}\varepsilon_m{}^{pn}\partial_n W_{pq} + \frac{1}{\mu}\varepsilon_m^{pn}\partial_n\Omega_{pq} = 0\ .\\ \varepsilon_m{}^{pn}\partial_n(W_{pq} + \frac{1}{\mu}\Omega_{pq}) = 0\ ,\end{aligned} \tag{3.1.9}$$

por lo tanto, localmente se obtiene

$$W_{pq} + \frac{1}{\mu}\Omega_{pq} = \partial_p\chi_q\ . \tag{3.1.10}$$

Sí se escoge calibre de manera que $\chi_q = 0$, se obtiene las relaciones

$$W_{pq} = -\frac{1}{\mu}\Omega_{pq}\quad ,\qquad W = -\frac{1}{\mu}\Omega\ , \tag{3.1.11}$$

de las anteriores relaciones y usando la expresión para W_{pq} de la ecuación [3.1.4], se determina

$$\frac{1}{2}\varepsilon^{mnp}\partial_m(e_{np} + \frac{1}{\mu}W_{np}) = 0\ , \tag{3.1.12}$$

y por lo tanto, localmente

$$e_{np} + \frac{1}{\mu}W_{np} = \partial_n\xi_p\ . \tag{3.1.13}$$

Si se escoge calibre de manera que $\xi_q = 0$, se obtiene las relaciones

$$e_{np} = -\frac{1}{\mu} W_{np} \quad , \qquad e = -\frac{1}{\mu} W \ . \tag{3.1.14}$$

De nuevo, de las anteriores relaciones y usando la expresión para W_{pq} de la ecuación [3.1.4], se determina

$$\varepsilon_p{}^{rs} \partial_r e_{sr} - \mu(e_{np} - \eta_{np} e) = 0 \ , \tag{3.1.15}$$

que son justamente la ecuaciones de campo de la teoría de la *gravedad masiva autodual* que se estudiarán en la siguiente sección. Esta teoría propaga un solo grado de libertad para un gravitón masivo de espín 2.

3.2. Gravedad Masiva Autodual

La acción *autodual* en 3 dimensiones para espín 2 masivo, fue formulada en 1986 por C. Aragone y A. Khoudeir [4], como una descripción dual a la gravedad masiva topológica, que se describirá más adelante. Esta acción es de primer orden en sus derivadas y se describe mediante un campo w_{mn}, esta acción se escribe como:

$$I_{AD} = \int d^3x \ \{ \ \frac{1}{2\mu} w_{mq} \varepsilon^{mpr} \partial_p w_r{}^q - \frac{1}{2}(w_{mn} w^{nm} - w^2) \} \ . \tag{3.2.1}$$

Su ecuación de movimiento

$$\frac{I_{AD}}{\delta w_{mq}} = 0 \rightarrow \qquad G_{mq} = \varepsilon_q{}^{np} \partial_n w_{pm} - \mu(w_{mq} - \eta_{mq} w) = 0 \ . \tag{3.2.2}$$

Si ahora se determina la traza de su ecuación de movimiento

$$\eta^{mq} G_{mq} = \varepsilon^{mnp} \partial_n w_{pm} + \mu(3-1) w = 0 \ , \tag{3.2.3}$$

así el valor de la traza del campo w_{mn} viene determinado por

$$w = -\frac{1}{2\mu} \varepsilon^{mnp} \partial_n w_{pm} \ , \tag{3.2.4}$$

luego se descompone el campo el campo en su parte simétrica y antisimétrica

$$w_{mn} = h_{mn} + \varepsilon_{mnp} v^p \ , \tag{3.2.5}$$

considerando la divergencia de la ecuación de movimiento, se puede obtener la siguiente expresión

$$\partial^m G_{mq} = \partial^m w_{mq} - \partial_q w = 0 \ , \tag{3.2.6}$$

para luego sustituirlo en la parte antisimétrica de la ecuación de movimiento

$$\varepsilon_s{}^{mq} G_{mq} = \partial^p w_{ps} - \partial_s w - 2\mu v_s = 0 \; , \tag{3.2.7}$$

por lo tanto

$$v^p = 0 \; . \tag{3.2.8}$$

Si nos fijamos en la ecuación [3.2.4] para la traza del campo w_{mn} vemos que solo depende de la parte antisimétrica del mismo campo y por lo tanto

$$w = h = 0 \; . \tag{3.2.9}$$

Por último de la expresión para la divergencia de la ecuación de movimiento [3.2.6] se obtiene

$$\partial^m w_{mn} = \partial^m h_{mn} = 0 \; . \tag{3.2.10}$$

Por lo tanto hasta ahora la teoría propaga 2 grados de libertad. Si multiplicamos la ecuación de movimiento [3.2.2] por ε^{qle} para luego calcular su divergencia y teniendo en cuenta las ecuaciones [3.2.8], [3.2.9] y [3.2.10]

$$\varepsilon^{qlr} \partial_l G_{qm} = \Box \, h_{rm} - \mu^2 h_{rm} = 0 \; , \tag{3.2.11}$$

finalmente se puede obtener la ecuación de la gravedad autodual masiva para D=3 con h_{mn} simétrico, transverso y sin traza.

$$(\Box - \mu^2) h_{mq} = 0 \; . \tag{3.2.12}$$

Esos dos grados de libertad que hasta ahora sobreviven se descomponen de la siguiente manera

$$h_{mn} = h_{mn}^{+} \; + \; h_{mn}^{-} \; , \tag{3.2.13}$$

siendo

$$h_{mn}^{\pm} = \frac{1}{4} \left[\delta_m^p \delta_n^q + \delta_m^q \delta_n^p \; \pm \; \left(\varepsilon_m{}^{ps} \frac{\partial_s}{\mu} \; \delta_n^q + \varepsilon_n{}^{qs} \frac{\partial_s}{\mu} \; \delta_m^p \right) \right] h_{pq} \; , \tag{3.2.14}$$

a partir de la ecuación [3.2.12] se puede apreciar que la componente h_{mn}^{-} es

$$h_{mn}^{-} = 0 \; , \tag{3.2.15}$$

eliminando así 1 grado de libertad más, por lo tanto

$$(\Box - \mu^2) h_{mq}^{+} = 0 \; . \tag{3.2.16}$$

Por lo tanto es una teoría que propaga un solo grado de libertad para un gravitón masivo de espín 2

3.3. Equivalencia entre Gravedad Masiva Topológica y Gravedad Masiva Autodual

La acción intermedia fue propuesta de igual manera por C. Aragone y A. Khoudeir en el mismo paper de 1986 [4], para comprobar la equivalencia entre la gravedad masiva topológica y la gravedad masiva autodual para un espacio plano. Luego, en 2012 A. Khoudeir, P. Arias y J. Stephany [13] proponen un mecanismo más general para mostrar esta equivalencia. La relación entre ambos modelos es señalado por la existencia de una acción maestra que provee su equivalencia. Siguiendo una notación similar a este último artículo, la acción maestra se lee

$$I_1[w,e] = \int d^3x \, \{ \, -\frac{\mu}{2} \left(w_{mn} w^{nm} - w^2 \right) + w_{mn} \varepsilon^{mpq} \partial_p e_q^n - \frac{1}{2} e_{mn} \varepsilon^{mpq} \partial_p e_q^n \, \} \, , \qquad (3.3.1)$$

donde los campos tensoriales w_{mn} y e_m^n no poseen ninguna simétrica en específico. Tanto la acción intermedia como la Gravedad Masiva Autodual puede ser obtenidas de la acción anterior sustituyendo las ecuaciones de movimiento dentro de la acción. Si se determina inicialmente la ecuación de movimiento para el campo e_{mn}

$$\frac{\delta I_1[w,e]}{\delta e^{mn}} = 0 \;\; \rightarrow \;\; e_m{}^{pq} \partial_q w_{pn} - \varepsilon_m{}^{pq} \partial_q e_{pn} = 0 \; , \qquad (3.3.2)$$

sustituyendo esta ecuación de movimiento en la acción $I_1[w,e]$ se obtendrá la acción para la gravedad masiva autodual.

$$I_{AD} = \int d^3x \, \{ \, \frac{1}{2\mu} w_{mq} \varepsilon^{mpr} \partial_p w_r{}^q - \frac{1}{2} (w_{mn} w^{nm} - w^2) \} \; . \qquad (3.3.3)$$

Para obtener la acción intermedia, determinamos la ecuación de movimiento para el campo w_{mn} a partir de la acción $I_1[w,e]$

$$\frac{\delta I_1[w,e]}{\delta w^{mn}} = 0 \;\; \rightarrow \;\; w_{mn}[e] = \frac{1}{\mu} W_{mn}[e] = (\delta_m^p \, \delta_n^q - \frac{1}{2} \, \eta_{mn} \eta^{pq}) \, \varepsilon_p{}^{tr} \partial_t e_{rq} \, , \qquad (3.3.4)$$

sustituyendo la ecuación de movimiento anterior, en la acción $I_1[w,e]$ se obtiene la acción intermedia de segundo orden en sus derivadas, de la forma

$$\begin{aligned} I^{2do}[e] &= \int d^3x \, \{ \, \frac{1}{2\mu} \, \varepsilon^{mpq} \partial_p e_{qs} \, \varepsilon^{str} \partial_t e_{rm} - \frac{1}{4\mu} (\varepsilon^{mpq} \partial_p e_{qm})^2 - \frac{1}{2} e_{mn} \varepsilon^{mpq} \partial_p e_q^n \, \}. \\ &= \int d^3x \, \{ \, \frac{1}{\mu} e_m^n \, \varepsilon^{mpq} \partial_p W_{qn}[e] - \frac{1}{2} e_{mn} \varepsilon^{mpq} \partial_p e_q^n \, \}. \end{aligned} \qquad (3.3.5)$$

reescribiendo el término de Chern-Simons, usando un campo auxiliar, de la siguiente manera:

$$I_2^{2do}[e,v] = \int d^3x \; \{ \; \frac{1}{2\mu} e_{mn} \, \varepsilon^{mpq} \partial_p W_{qn}[e] - e_{mn} \, \varepsilon^{mpq} \partial_p v_q^n + \frac{1}{2} \, v_{mn} \, \varepsilon^{mpq} \partial_p v_q^n \; \} \; , \quad (3.3.6)$$

donde el tensor $W_{qn}[e]$ viene dado por la ecuación [3.3.4]. La ecuación de movimiento para el campo v_{mn} indica que la parte transversa de v_{mn} y e_{mn} son la misma y sustituyendo esta relación en la acción $I_2^{2do}[e,v]$ se obtiene de nuevo la acción $I^{2do}[e]$.

Si se realiza variaciones en la acción $I_2^{2do}[e,v]$ con respecto a e_{mn} obtenemos

$$\frac{\delta I_2^{2do}[e,v]}{\delta e_{mn}} \; = \; 0 \quad \rightarrow \quad \varepsilon^{mpq} \partial_p v_q^n = \frac{1}{\mu} \varepsilon^{mpq} \partial_p W_q^n[e] \; . \qquad (3.3.7)$$

Sustituyendo la relación anterior [3.3.7] en la acción $I_2^{2do}[e,v]$ se llega finalmente a la acción

$$I_{MT} = \int d^3x \; \{ e_{mn} \varepsilon^{mnp} \partial_n W_{pq} + \frac{1}{\mu} W_{mq} \varepsilon^{mnp} \partial_n W_{pq} \} \; . \qquad (3.3.8)$$

Que es la acción de la Gravedad Masiva Topológica, así se ha demostrado la equivalencia entre la gravedad masiva topológica y la acción autodual en un espacio plano. Para espacios curvos maximamente simétricos, esta equivalencia no se mantiene, como se demostrará en el capítulo siguiente, para esto se seguirá el mismo procedimiento pero en el caso cuando las acciones se encuentren acopladas a un background (A)dS.

Capítulo 4

"Partially Massless" y Autodualidad en (A)dS

Se prestará atención ahora a la acción maestra [4], la cual interpola entre la acción para la gravedad masiva autodual y la acción intermedia de segundo orden, pero ahora para un espacio (A)de Sitter, la cual depende de 2 campos tensoriales sin ninguna simetría en particular w_{mn} y e_{mn}. Esta acción fue estudiada en el capítulo anterior en un espacio plano y ahora la acoplaremos minimalmente a un background curvo, donde las derivadas parciales se remplazan por derivadas covariante y se pondrá el elemento de volumen $\sqrt{-g}$ donde corresponde, así la acción viene dada de la forma

$$I_1[w,e] = \int d^3x \ \{ \ w_m{}^q \varepsilon^{mnp} \nabla_n e_{pq} - \frac{1}{2} e_m^q \varepsilon^{mnp} \nabla_n e_{pq} - \frac{1}{2}\mu\sqrt{-g}(w_{mn}w^{nm} - w^2) \ \} \ . \quad (4.0.1)$$

Ahora si se realiza una redefinición sobre los campos tensoriales w_{mn} y e_{mn} de la siguiente manera:

$$w_{mn} \to \frac{1}{\sqrt{\mu}} \, w_{mn} \quad , \qquad e_{mn} \to \sqrt{\mu} \, e_{mn} \ . \quad (4.0.2)$$

Se obtiene la acción linealizada para la acción maestra de segundo orden de la forma

$$I_1[w,e] = \int d^3x \ \{ \ w_m{}^q \varepsilon^{mnp} \nabla_n e_{pq} - \frac{1}{2}\sqrt{-g}(w_{mn}w^{nm} - w^2) - \frac{1}{2}\mu \ e_m^q \varepsilon^{mnp} \nabla_n e_{pq} \} \ . \quad (4.0.3)$$

Se puede notar que los dos primeros términos de la acción anterior corresponden a la acción de "Partially Massless" en 3 dimensiones, el tercer y último término corresponde a un término masivo tipo Chern-Simons triádico. Así se llega a la siguiente acción

$$I_1[w,e] = I_{PM} - \int d^3x \; \{ \; \frac{1}{2}\mu \; e_m^{\;q}\varepsilon^{mnp}\nabla_n e_{pq}\} \; . \qquad (4.0.4)$$

Obteniendo la acción maestra y con esto posiblemente la acción de la gravedad masiva autodual, la cual es igual a la acción de “Partially Massless” con un término masivo tipo Chern-Simons triádico para un espacio (A)dS. El resto del capítulo final será dedicado a comprobar la acción anterior [4.0.4].

4.1. Ecuaciones de campo de “Partially Massless”

La acción de “Partially Massless” en formalismo triádico [2.4.21] ya mencionada en el capítulo dos viene dada de la forma

$$I_{PM} = \int d^3x \; \{w_{mq}\varepsilon^{mnp}\nabla_n {e_p}^q - \frac{1}{2}\sqrt{-g}(w_{mn}w^{nm} - w^2)\} \; . \qquad (4.1.1)$$

Se pueden obtener las siguientes ecuaciones de movimiento

$$\frac{\delta I_{PM}}{\delta e_{mn}} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \varepsilon^{mpq}\nabla_p {w_q}^n = 0 \; . \qquad (4.1.2)$$

$$\frac{\delta I_{PM}}{\delta w_{mn}} = 0 \qquad \rightarrow \qquad w^{mn} - g^{mn}w - \frac{1}{\sqrt{|g|}}\varepsilon^{mpq}\nabla_p {e_q}^n = 0 \; . \qquad (4.1.3)$$

Se realizará un análisis covariante para determinar la dinámica de esta teoría, iniciando con la ecuación de movimiento [4.1.2], Primero hallaremos la traza de la ecuación de movimiento de la forma

$$g_{mn}(\varepsilon^{mpq}\nabla_p {w_q}^n) = 0 \quad \rightarrow \quad \eta^{mpq}\nabla_p w_{qm} = 0 \; . \qquad (4.1.4)$$

Se puede descomponer el campo tensorial w_{mn} en su parte simétrica y antisimétrica de la siguiente manera

$$w_{mn} = w_{(mn)} + \eta_{mns}w^s \; , \qquad (4.1.5)$$

con

$$\eta^{mns} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\varepsilon^{mns} \quad o \quad \eta_{mns} = \sqrt{-g}\,\varepsilon_{mns} \; , \qquad (4.1.6)$$

donde $w_{(mn)}$ es la parte simétrica y $\eta_{mns}w^s$ es la parte antisimétrica del campo tensorial w_{mn}. Sustituyendo en la ecuación [4.1.4] se obtiene que

$$\nabla_s w^s = 0 \; . \qquad (4.1.7)$$

Calculando la divergencia de la ecuación de movimiento [4.1.2] se puede obtener más información

$$
\begin{aligned}
\varepsilon^{mpq}\nabla_m\nabla_p w_q{}^n &= \frac{1}{2}\varepsilon^{mpq}[\nabla_m,\nabla_p]w_q{}^n = 0\ . \\
\frac{1}{2}\varepsilon^{mpq}g^{nr}(R_{mpq}{}^s w_{sr} &+ R_{mpr}{}^s w_{qs}) = 0\ . \\
\Lambda\,\varepsilon^{npq}w_{qp} = 0 \quad &\rightarrow \quad w^s = 0\ .
\end{aligned}
\tag{4.1.8}
$$

Por lo tanto el campo tensorial w_{mn} solo posee parte simétrica, es decir, $w_{mn} = w_{(mn)}$.

De la parte antisimétrica de la ecuación de movimiento [4.1.2] se puede obtener la siguiente expresión

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{mns}\varepsilon^{mpq}\nabla_p w_q{}^n = 0\ . \\
\nabla_m w - \nabla_n w_m{}^n = 0\ .
\end{aligned}
\tag{4.1.9}
$$

Ahora se realizará un análisis a la ecuación de movimiento [4.1.3]: Si se obtiene la divergencia de la ecuación de movimiento para el campo w_{mn}

$$
\nabla_m w^{mn} - \nabla_m w - \frac{1}{\sqrt{|g|}}\varepsilon^{mpq}\nabla_m\nabla_p e_q{}^n = 0\ , \tag{4.1.10}
$$

de la ecuación [4.1.9] se sabe que la suma de los dos primeros términos de la ecuación anterior es idénticamente cero, así:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{|g|}}\varepsilon^{mpq}\nabla_m\nabla_p e_q{}^n &= \frac{1}{2\sqrt{|g|}}\varepsilon^{mpq}[\nabla_m,\nabla_p]e_q{}^n = 0\ . \\
\frac{1}{2\sqrt{|g|}}\varepsilon^{mpq}g^{nr}(R^s{}_{mpq}e_{sr} &+ R^s{}_{mpr}e_{qs}) = 0\ . \\
\frac{1}{\sqrt{|g|}}\varepsilon^{mpq}\ \Lambda\ e_{qp} &= 0\,,
\end{aligned}
\tag{4.1.11}
$$

si se considera la parte simétrica y antisimétrica de e_{qp}, esta última ecuación dice que la parte antimétrica se anula on shell, es decir, el tensor e_{qp} es totalmente simétrico. Ahora se usará la parte antisimétrica de la ecuación de movimiento para el campo tensorial w_{mn} [4.1.3]:

$$\varepsilon_{mnr}(w^{mn} - g^{mn}w - \frac{1}{\sqrt{|g|}}\varepsilon^{mpq}\nabla_p e_q{}^n) = 0 \; , \tag{4.1.12}$$

como el campo w_{mn} solo posee parte simétrica, por lo tanto los primeros dos términos son idénticamente cero, así:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{|g|}}\varepsilon_{mnr}\varepsilon^{mpq}\nabla_p e_q{}^n = 0 \; . \\
&\frac{1}{\sqrt{|g|}}(\delta^p_n\delta^q_r - \delta^q_n\delta^p_r)\nabla_p e_q{}^n = 0 \; . \\
&\nabla_n e_r{}^n - \nabla_r e = 0 \qquad \rightarrow \qquad \nabla_n h_r{}^n - \nabla_r h = 0 \; .
\end{aligned} \tag{4.1.13}$$

Siendo h_{mn} la parte simétrica del tensor e_{mn} y h su traza. Ahora, calculando la traza de la ecuación de movimiento [4.1.3] para el campo w_{mn}

$$\begin{gathered}
g_{mn}(w^{mn} - g^{mn}w - \frac{1}{\sqrt{|g|}}\varepsilon^{mpq}\nabla_p e_q{}^n) = 0 \; . \\
2w + \varepsilon^{mpq}\nabla_p e_{qm} = 0 \; .
\end{gathered} \tag{4.1.14}$$

Puesto que el campo tensorial e_{mn} es totalmente simétrico el segundo término de la última ecuación es idénticamente cero y así trae como consecuencia que la traza del campo w_{mn} sea igual a cero.

$$w = 0 \; . \tag{4.1.15}$$

La solución local para la ecuación de campo [4.1.2] viene dada de la forma

$$w_{mn} = \nabla_m\nabla_n\phi + \Lambda\, g_{mn}\phi \; , \tag{4.1.16}$$

se procederá a demostrar que la ecuación anterior es solución a dicha ecuación de movimiento:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_m{}^{pq}\nabla_p w_{qn} &= \varepsilon_m{}^{pq}\nabla_p(\nabla_q\nabla_n\phi + \Lambda\, g_{qn}\phi) \; . \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon_m{}^{pq}[\nabla_p, \nabla_q]\nabla_n\phi + \Lambda\varepsilon_m{}^p{}_n\nabla_p\phi \; . \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon_m{}^{pq}R_{pqn}{}^r\nabla_r\phi - \Lambda\,\varepsilon_{mnp}\nabla^p\phi \; . \\
&= \Lambda\,\varepsilon_{mnp}\nabla^p\phi - \Lambda\,\varepsilon_{mnp}\nabla^p\phi = 0 \; .
\end{aligned} \tag{4.1.17}$$

Hallando la traza de la ecuación [4.1.16] y teniendo en cuenta que $w = 0$, entonces:

$$(\nabla^2 + 3\Lambda)\phi = 0\,. \tag{4.1.18}$$

Que es justamente como propaga la teoría con un solo grado de libertad, para un campo escalar ϕ.

Otra manera de obtener el mismo resultado es sustituir la solución para el campo w_{mn} [4.1.16], en la acción de "Partially Massless" en formalismo triádico [4.1.1]. Como se demostró en el cálculo [4.1.17] se ve que el primer término en nuestra acción [4.1.1] es idénticamente cero sobreviviendo únicamente el segundo término:

$$I = \int d^3x\ \{-\frac{1}{2}\sqrt{-g}(w_{mn}w^{nm} - w^2)\}\ , \tag{4.1.19}$$

ahora se desarrollará un expresión para $w_{mn}w^{nm}$ y w^2:

$$\begin{aligned} w_{mn}w^{mn} &= (\nabla_m\nabla_n\phi + \Lambda\ g_{mn}\phi)(\nabla^n\nabla^m\phi + \Lambda\ g^{mn}\phi)\ . \\ &= \nabla_m\nabla_n\phi\nabla^n\nabla^m\phi + 2\Lambda\,\phi\nabla^2\phi + 3\Lambda\phi^2\ , \end{aligned} \tag{4.1.20}$$

y

$$\begin{aligned} w^2 &= (\nabla^2 + 3\Lambda)\phi(\nabla^2 + 3\Lambda)\phi\ . \\ &= \nabla^2\phi\nabla^2\phi + 6\Lambda\,\phi\nabla^2\phi + 9\Lambda^2\,\phi^2\ , \end{aligned} \tag{4.1.21}$$

así

$$\begin{aligned} I &= \int d^3x\ \sqrt{-g}\{w_{mn}w^{nm} - w^2\}\ . \\ &= \int d^3x\ \sqrt{-g}\{(\nabla_m\nabla_n\phi)(\nabla^n\nabla^m\phi) - \nabla^2\phi\nabla^2\phi - 4\Lambda\,\phi\nabla^2\phi - 6\Lambda^2\phi^2\}\ , \end{aligned} \tag{4.1.22}$$

debido a que estos términos se encuentran dentro de la acción, las derivadas se pueden intercambiar integrando por parte. Así, el primer término de la ecuación anterior se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} (\nabla_m\nabla_n\phi)(\nabla^n\nabla^m\phi) &= -g^{pn}g^{qm}\nabla_p\nabla_m\nabla_n\phi\nabla_q\ . \\ &= -g^{pn}g^{qm}(\nabla_m\nabla_p\nabla_n\phi\nabla_q\phi - R_m{}^r{}_{}\nabla_r\phi\nabla^m\phi)\ . \\ &= \nabla^2\phi\nabla^2\phi - 2\,\Lambda\,\nabla_m\phi\nabla^m\phi\,, \end{aligned} \tag{4.1.23}$$

sustituyendo en la acción:

$$I = 2\int d^3x\,\sqrt{-g}\{\nabla_m\phi\nabla^m\phi - 3\Lambda^2\phi^2\}\,, \tag{4.1.24}$$

realizando variaciones en ϕ

$$\frac{\delta I}{\delta\phi} = 0 \rightarrow \quad (\nabla^2 + 3\Lambda)\phi = 0\,. \tag{4.1.25}$$

Como vemos es el mismo resultado al cual se había llegado con anterioridad, la teoría propaga un grado de libertad para un campo escalar, debemos prestar atención al signo de esta última ecuación, ya que dependiendo de si nos encontramos en un espacio AdS o dS la teoría tiene o no un grado de propagación físicamente posible.

4.2. Ecuaciones de campo de la gravedad masiva autodual en (A)dS

La acción masiva autodual acoplada a un espacio curvo (A)dS se escribe como:

$$I_{AD} = \int d^3x\sqrt{-g}\,\{\,\frac{1}{2}w_m^q\varepsilon^{mnp}\nabla_n w_{pq} - \mu\sqrt{|g|}\,\frac{1}{2}(w_{mn}w^{mn} - w^2)\}\,. \tag{4.2.1}$$

Se procederá a conocer el contenido dinámico de esta teoría, para esto primero determinamos las ecuaciones de movimiento que vienen dada de la forma:

$$\frac{\delta I_{SD}}{\delta w_{mq}} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \varepsilon^{mnp}\nabla_n w_p{}^q - \mu\sqrt{|g|}(w^{qm} - g^{qm}w) = 0\,. \tag{4.2.2}$$

Se realizará nuevamente un análisis covariante para obtener información sobre como propaga el campo tensorial w_{mn}. Lo primero es obtener la traza de la ecuación de movimiento

$$\begin{aligned} g_{mq}(\varepsilon^{mnp}\nabla_n w_p{}^q - \mu\sqrt{|g|}\,(w^{qm} - g^{qm}w)) &= 0\,. \\ \varepsilon^{mnp}\nabla_n w_{pq} + 2\mu\sqrt{|g|}\,w &= 0\,. \\ w = -\frac{1}{2\mu\sqrt{|g|}}\,\varepsilon^{mnp}\nabla_m w_{np}\,, \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

así se ha encontrado el valor para la traza del campo w_{mn}. Ahora se halla la divergencia de la ecuación de movimiento

$$\varepsilon^{mnp}\nabla_m\nabla_n w_p^q - \mu\sqrt{|g|}\,(\nabla_m w^{qm} - \nabla^q w) = 0\,, \tag{4.2.4}$$

donde el primer término de la ecuación [4.2.4] se puede escribir como

$$\varepsilon^{mnp}\nabla_m\nabla_n w_p{}^q = \frac{1}{2}\, g^{qr}\varepsilon^{mnp}[\nabla_m, \nabla_n]w_{pr}\ , \tag{4.2.5}$$

así

$$\begin{aligned}\nabla_m w^{qm} - \nabla^q w &= \frac{1}{2\mu\sqrt{|g|}}\, g^{qr}\varepsilon^{mnp}(R_{mnp}{}^s w_{sr} + R_{mnr}{}^s w_{ps})\,. \\ \nabla_m w^{qm} - \nabla^q w &= -\frac{\Lambda}{\mu\sqrt{|g|}}\, \varepsilon^{qmn} w_{mn}\,. \end{aligned} \tag{4.2.6}$$

Ahora si se toma la parte antisimétrica de la ecuación de movimiento[4.2.2]

$$\begin{gathered}\varepsilon_{mqr}(\varepsilon^{mnp}\nabla_n w_p{}^q - \mu\sqrt{|g|}(w^{qm} - g^{qm}w)) = 0\,. \\ (\delta^n_q\delta^p_r - \delta^p_q\delta^n_r)\nabla_n w_p{}^q - \mu\sqrt{|g|}\ \varepsilon_{mqr}w^{qm} = 0\,. \\ \nabla_n w^{mn} - \nabla^m w = \mu\sqrt{|g|}\ \varepsilon_{mqr}w^{qm}\,. \end{gathered} \tag{4.2.7}$$

Combinando las ecuaciones [4.2.6] y [4.2.7], se obtiene:

$$(\mu^2 + \Lambda)\sqrt{|g|}\ \varepsilon_{mqr}w^{qm} = 0 \quad \to \quad \varepsilon_{mnp}w^{np} = 0\,. \tag{4.2.8}$$

Si el término $(\mu^2 + \Lambda) \neq 0$ en un espacio (A)dS.

A continuación, si se descompone el campo tensorial w_{np} en su parte simétrica y antisimétrica de la forma:

$$w_{np} = h_{np} + \eta_{npr}\, v^r\ , \tag{4.2.9}$$

de la ecuación [4.2.8] se halla la siguiente restricción:

$$\begin{gathered} v^r = 0\,. \\ w_{mn} = h_{mn}\,. \end{gathered} \tag{4.2.10}$$

En consecuencia de la ecuación [4.2.3], la traza del campo tensorial w_{mn} es idénticamente igual a cero

$$w = h = 0\,, \tag{4.2.11}$$

así de la ecuación [4.2.7] se obtiene:

$$\nabla^m w_{mq} = 0 \quad \to \quad \nabla^m h_{mq} = 0\,, \tag{4.2.12}$$

por lo tanto las ecuaciones de movimiento (on-shell) se reducen a:

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}}\,\varepsilon_{mnp}\nabla_n {h_p}^q - \mu\, h^{mq} = 0\,, \tag{4.2.13}$$

con h_{mn} simétrico, transverso y sin traza.

Introduciendo el siguiente proyector sensitivo a paridad de la forma:

$$P^{mqrs\pm} = \{\frac{1}{2}g^{mr}g^{qs} \pm \frac{1}{4\mu\sqrt{|g|}}(\varepsilon^{mnr}\nabla_n g^{sq} + \varepsilon^{qns}\nabla_n g^{rm})\}\,. \tag{4.2.14}$$

De tal manera que podemos descomponer las dos componentes de un tensor transverso en 3D como

$$h_{mq} = {h_{mq}}^{+} + {h_{mq}}^{-}\,, \tag{4.2.15}$$

donde

$$h_{mq}^{\pm} = \;{P_{mq}}^{rs\pm}\, h_{rs}\,. \tag{4.2.16}$$

Observando la ecuación [4.2.13] vemos que

$$h_{mq}^{-} = 0\,. \tag{4.2.17}$$

Se puede así, hallar todas las restricciones de la teoría

$$\underbrace{h = 0}_{-1}\,,\quad \underbrace{v^r = 0}_{-3}\,,\quad \underbrace{\nabla_m h^{mn} = 0}_{-3}\,,\quad \underbrace{h_{mq}^{-} = 0}_{-1}\,. \tag{4.2.18}$$

Para un total de 8 restricciones de los 9 grados de libertad que inicialmente posee el campo tensorial w_{mn}. Este análisis covariante muestra que la acción de la gravedad masiva autodual posee un solo grado de excitación, es decir, propaga en un solo grado de libertad cuando se encuentra acoplada a un background de Sitter.

Si se usa la ecuación [4.2.13], primero hallando su divergencia

$$\begin{gathered}\nabla_r(\frac{1}{\sqrt{|g|}}\,\varepsilon^{mnp}\nabla_n {h_p}^q - \mu\, h^{mq}) = 0\,.\\ \frac{1}{\sqrt{|g|}}\,\varepsilon_{mnp}\nabla_r\nabla_n {h_p}^q - \mu\,\nabla_r\, h^{mq} = 0\,,\end{gathered} \tag{4.2.19}$$

ahora, hallando la parte antisimétrica de esta ultima expresión

$$\varepsilon^{mrs}(\frac{1}{\sqrt{|g|}}\ \varepsilon_{mnp}\nabla_r\nabla^n h^{pq} - \mu\ \nabla_r\ h^{mq}) = 0\ .$$

$$(\delta^r_n\delta^s_p - \delta^s_n\delta^e_p)\nabla_r\nabla^n h^{pq} - \mu\ \varepsilon^{mrs}\ \nabla_r\ h^{mq} = 0\ . \tag{4.2.20}$$

$$\nabla^2 h_{mn} - g^{pq}\nabla_q\nabla_m h_{pn} - \mu^2\ h_{mn} = 0\ ,$$

donde el segundo término se puede escribir como:

$$\begin{aligned} -g^{pq}\nabla_m\nabla_q h_{pn} &= -g^{pq}[\nabla_q\nabla_m h_{pn} + R_{qmp}{}^{r} h_{rn} + R_{qmn}{}^{r} h_{pr}]\ . \\ &= -\nabla_m \underbrace{\nabla_q h^q{}_n}_{=0} - 3\Lambda\ h_{mn}\ . \\ &= -3\Lambda\ h_{mn}\ . \end{aligned} \tag{4.2.21}$$

Así las ecuaciones de campo de la gravedad masiva autodual para un espacio Anti de Sitter o de Sitter en 3D dimensiones vienen dadas de la forma:

$$(\nabla^2 - (\mu^2 + 3\Lambda)\ )h_{mn} = 0\ . \tag{4.2.22}$$

La cual describe la propagación dinámica de un solo grado de libertad masivo y de espín 2.

4.3. La acción de tercer orden

Se seguirá el procedimiento propuesto por A. Khoudeir, J. Stephany y P. Arias, en el primer apartado de su paper de 2012 [13], pero ahora para un espacio (A) de Sitter, la acción Intermedia

$$I_{Int} = \int d^3x\ \{\ w_{mq}\ \varepsilon^{mnp}\nabla_n e^q_p - \frac{1}{2}e_{mq}\ \varepsilon^{mnp}\nabla_n e^q_p - \frac{1}{2}\mu\ \sqrt{-g}\ (w_{mn}w^{nm} - w^2)\ \}\ , \tag{4.3.1}$$

Redefiniendo los campos de la siguiente manera:

$$w_{mn} \quad \to \quad \sqrt{\mu}\, w_{mn} \quad , \qquad e_{mn} \quad \to \quad \frac{1}{\sqrt{\mu}}\, e_{mn} \ , \tag{4.3.2}$$

así la acción maestra queda de la siguiente forma:

$$I_{Int} = \int d^3x \ \{ \ w_{mq}\, \varepsilon^{mnp} \nabla_n e^q{}_p - \frac{1}{2}\sqrt{-g}\,(w_{mn}w^{nm} - w^2) - \frac{1}{2\mu}\, e_{mq}\, \varepsilon^{mnp} \nabla_n e^q_p \ \} \ .$$

$$I_{Int} = \ I_{PM} - \frac{1}{2\mu} \int d^3x \ \{ \ e_{mq}\, \varepsilon^{mnp} \nabla_n e^q_p \ \} \ . \tag{4.3.3}$$

Si se obtiene la ecuación de movimiento para el campo tensorial w_{mn}, a partir de esta obtenemos el w_{mn} en función del campo e_{mn} para luego sustituirlo en la acción

$$I_{2^{do}Orden} = \int d^3x \ \{ \ \frac{1}{2}\, e_{mq}\, \varepsilon^{mnp} \nabla_n w^q{}_{p\,[e,\nabla e]} - \frac{1}{2}\,\mu\, e_{mq}\, \varepsilon^{mnp} \nabla_n e^q_p \ \} \ . \tag{4.3.4}$$

Siendo la acción anterior una acción intermedia de segundo orden. Con el campo w_{mn} dada por la siguiente expresión:

$$w_{mn\,[e,\nabla e]} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\, \varepsilon_n{}^{pq} \nabla_p e_{qm} - \frac{1}{2\sqrt{-g}}\, g_{mn}\, \varepsilon^{pqr} \nabla_p e_{qr} \ , \tag{4.3.5}$$

si se revierte la redefinición anterior [4.3.2] para el campo e_{mn}

$$e_{mn} = \ \frac{1}{\sqrt{\mu}}\, e_{mn} \ , \tag{4.3.6}$$

así

$$I_{2^{do}Orden} = \int d^3x \ \{ \ \frac{1}{2\,\mu}\, e_{mq}\, \varepsilon^{mnp} \nabla_n w^q{}_{p\,[e,\nabla e]} - \frac{1}{2}\, e_{mq}\, \varepsilon^{mnp} \nabla_n e^q_p \ \} \ . \tag{4.3.7}$$

Ahora, en la acción de segundo orden se introduce un nuevo campo tensorial auxiliar V_{mn} de la siguiente manera:

$$I_{2^{do}} = \int d^3x \ \{ \ \frac{1}{2\,\mu}\, e_{mq}\, \varepsilon^{mnp} \nabla_n w_p{}^q{}_{[e,\nabla e]} - \ e_{mq}\, \varepsilon^{mnp} \nabla_n V_p{}^q + \frac{1}{2}\, V_{mq}\, \varepsilon_{mnp} \nabla_n V^{pq} \ \} \ . \tag{4.3.8}$$

En efecto, si se usa la ecuación de movimiento para el campo V_{mn}

$$\varepsilon_m^{\ \ pq} \ \nabla_p e_{qn} = \varepsilon_m^{\ \ pq} \ \nabla_p V_{qn} \ . \tag{4.3.9}$$

Sustituyendo para eliminar V_{qn}, se recobra la acción intermedia de segundo orden $I_{2^{do}Orden}$. Mientras que la ecuación de campo que se obtiene al realizar variaciones independientes en el campo e_{mn} es:

$$\frac{1}{\mu} \ \varepsilon_m^{\ \ pq} \nabla_p w_{pq\,[e,\nabla e]} = \ \varepsilon_m^{pq} \nabla_p V_q \ , \tag{4.3.10}$$

y al sustituir la expresión anterior en la acción $I_{2^{do}}$, se obtiene

$$I_{3er_{Orden}} = \int d^3x \ \{ \ -\frac{1}{2\mu} \ e_{mq} \, \varepsilon^{mnp} \nabla_n w_p{}^q{}_{[e,\nabla e]} + \frac{1}{2\mu^2} w_{mq\,[e,\nabla e]} \varepsilon^{mnp} \nabla_n w_p{}^q{}_{[e,\nabla e]} \ \} \ . \tag{4.3.11}$$

Donde el primer término, cuando se sustituye la descomposición simétrica y antisimétrica del campo e_{mn} se obtiene la acción de Einstein-Hilbert linealizada. Queda ahora analizar el segundo término de la acción anterior, con tal fin se mostrará una identidad útil para usar más adelante, se quiere desarrollar:

$$\varepsilon^{mpt} \nabla_p w_t{}^n{}_{[e,\nabla e]} \ . \tag{4.3.12}$$

si se sustituye el campo w_{mn} dado por la expresión [4.3.5]

$$\varepsilon^{mpt} \nabla_p w_t{}^n{}_{[e,\nabla e]} \ = \ g^{nl} \, \varepsilon^{mpt} \, \varepsilon_{lsq} \nabla_p \nabla^s e_t{}^q - \frac{1}{2} \, \varepsilon^{mpn} \, \varepsilon_{srt} \nabla_p \nabla^s e^{rt} \ = \ 0 \ , \tag{4.3.13}$$

para luego desarrollar en la ultima ecuación los dos tensores Levi-Civita por su definición de delta de Kronecker obtenemos

$$\begin{aligned} \varepsilon^{mpq} \nabla_p w_q{}^n{}_{[e,\nabla e]} \ =& - g^{mn} (\nabla^2 e - \nabla_p \nabla_q e^{pq}) + \nabla^n \nabla^m e - \frac{1}{2} \, \nabla_p \nabla^n e^{pm} \\ &+ \frac{1}{2} \, \nabla_p \nabla^n e^{mn} + \frac{1}{2} \nabla^2 e^{nm} + \frac{1}{2} \, \nabla^2 e^{mn} \\ &- \frac{1}{2} \nabla_p \nabla^m e^{pn} - \frac{1}{2} \nabla_p \nabla^m e^{np} - \nabla^n \nabla_p e^{mp} = 0 \ , \end{aligned} \tag{4.3.14}$$

el último término se puede reescribir de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
-\nabla^n\nabla_p e^{mp} &= -g^{nr}g^{mp}g^{qs}(\nabla_s\nabla_r e_{pq} + R^t_{p\ rs}e_{tq} + R^t_{q\ rs}e_{pt})\ . \\
&= -\nabla^p\nabla^n e^m_{\ p} - \Lambda\, g^{mn}e + \Lambda(e^{mn}+e^{mn}) + \Lambda e^{mn}\ ,
\end{aligned}
\tag{4.3.15}
$$

sustituyendo esta expresión en la ecuación [4.3.14] y organizando todos los términos de una manera conveniente se obtiene

$$
\begin{aligned}
\varepsilon^{mpq}\nabla_p w_q{}^n{}_{[e,\nabla e]} =& - g^{mn}(\nabla^2 e - \nabla_p\nabla_q e^{pq}) + \nabla^n\nabla^m e + \frac{1}{2}\nabla^2(e^{mn}+e^{nm}) \\
&- \frac{1}{2}\nabla_p\nabla_n(e^{mp}+e^{pm}) - \frac{1}{2}\nabla_p\nabla^m(e^{np}+e^{pn}) \\
&- \Lambda\, g^{mn}e + \Lambda(e^{mn}+e^{mn}) + \Lambda e^{mn} = 0\ ,
\end{aligned}
\tag{4.3.16}
$$

seguido, se descompone el campo e_{mn} en su parte simétrica y antisimémtrica

$$
e^{mn} = h^{mn} + \eta^{mnq}\,V_q\ . \tag{4.3.17}
$$

Sustituyendo esta descomposición de nuevo en la ecuación [4.3.16]

$$
\begin{aligned}
\varepsilon^{mpq}\nabla_p w_q{}^n{}_{[e,\nabla e]} =& - g^{mn}(\nabla^2 h - \nabla_p\nabla_q h^{pq}) + \nabla^2 h^{mn} \\
&+ \nabla^m\nabla^n h - \nabla_p\nabla_n h^{mp} - \nabla_p\nabla^m h^{np} \\
&- \Lambda\, g^{mn}h + 3\Lambda\, h^{mn} + \Lambda\,\eta^{mnp}V_p = 0\ .
\end{aligned}
\tag{4.3.18}
$$

Ahora se comparará los términos de la expresión anterior [4.3.18] con las convenciones de linealización para el tensor de Ricci, el escalar de curvatura y el tensor de Einstein.

$$
\begin{aligned}
&R^{mn} = \ \frac{1}{2}\nabla^2 h^{mn} + \frac{1}{2}\nabla^m\nabla^n\, h - \frac{1}{2}\nabla_p\nabla^n h^{mp} - \frac{1}{2}\nabla_p\nabla^m h^{np}\ . \\
&R = \nabla^2\, h - \nabla_p\nabla_q h^{pq} - 2\,\Lambda\, h\ . \\
&G^{mn} = R^{mn} - \frac{1}{2}g^{mn}\, R - 2\Lambda\, g^{mn}\, h\ .
\end{aligned}
\tag{4.3.19}
$$

Así, la ecuación [4.3.18] se reescribe de la siguiente manera:

$$
\varepsilon^{mpq}\nabla_p w_q{}^n{}_{[e,\nabla e]} \ = \ -2G^{mn} - \Lambda\, h^{mn} + \Lambda\, g^{mn}h + \Lambda\,\eta^{mnp}v_p\ . \tag{4.3.20}
$$

Se reescribirá el segundo término en la acción [4.3.11] en su parte simétrica y antisimétrica, para esto

$$\mathcal{L}_{CS} = \frac{1}{2\mu^2} w_{mn\;[e,\nabla e]} \varepsilon^{mpq} \nabla_p w_q{}^n{}_{[e,\nabla e]} \,.$$
$$= \frac{1}{2\mu^2} w_{mn\;[e,\nabla e]} (-2G^{mn} - \Lambda\, h^{mn} + \Lambda\, g^{mn} h + \Lambda\, \eta^{mnp}\, V_p)\,. \quad (4.3.21)$$

Si sustituimos la definición de w_{mn} [4.3.5] en la ecuación anterior

$$\mathcal{L}_{CS} = \frac{1}{2\mu^2} (\varepsilon^{npq} \nabla_p e_q{}^m - \frac{1}{2} g^{mn} \varepsilon^{pqr} \nabla_p e_{qr})(-2G^{mn} - \Lambda\, h^{mn} + \Lambda\, g^{mn} h + \Lambda\, \eta^{mnp} V_p)\;, \quad (4.3.22)$$

desarrollando la expresión anterior:

$$\mathcal{L}_{CS} = 2\, e_q{}^m\, \varepsilon^{npq} \nabla_p G_{mn} - e_{qr} \varepsilon^{pqr} \nabla_p G - \Lambda e_q{}^m\, \varepsilon^{npq} \nabla_p\, \varepsilon_{mnr} V^r$$
$$+ \Lambda\, e_q{}^m \varepsilon^{npq} \nabla_p (h_{mn} - g_{mn}) - g^{mn} \frac{\Lambda}{2} e_{qr} \varepsilon^{pqr} \nabla_p (h_{mn} - g_{mn} h)\;, \quad (4.3.23)$$

con

$$G = -\frac{1}{2}\, R - 2\Lambda\, h\,. \quad (4.3.24)$$

Los primeros dos términos de $\mathcal{L}_{CS}$ se pueden escribir como

$$2\, e_q{}^m\, \varepsilon^{npq} \nabla_p G_{mn} - e_{qr} \varepsilon^{pqr} \nabla_p G\,.$$
$$= 2\, e_q{}^m\, \varepsilon^{npq} \nabla_p (R_{mn} - \frac{1}{4} g_{mn} R - 2\Lambda\, h_{mn}) + 2\, e_q{}^m\, \varepsilon^{npq} \nabla_p\, \Lambda\, g_{mn} h\,. \quad (4.3.25)$$
$$= 2\, e_q{}^m C_m{}^q + 2\, e_q{}^m\, \varepsilon^{npq} \nabla_p\, \Lambda\, g_{mn} h\;,$$

con $C_m{}^q$ siendo el tensor de Cotton dado por

$$C^{mn} = \varepsilon^{mpq} \nabla_p (R_q{}^n - \frac{1}{4} \delta^n_q R - 2\Lambda\, h_q{}^n)\,. \quad (4.3.26)$$

Se procederá a analizar el tensor de Cotton, primero se analizará su parte antisimétrica

$$\varepsilon_{mnr} C^{mn} = (\delta^p_n \delta^q_r - \delta^q_n \delta^p_r) \nabla_p (R_q{}^n - \frac{1}{4} \delta^n_q R - 2\Lambda\, h_q{}^n)\,.$$
$$= -\nabla_n (R_r{}^n - \frac{1}{2} \delta^n_r R - 2\Lambda h_r{}^n)\,. \quad (4.3.27)$$
$$= -\nabla_n G_r{}^n = 0\,.$$

Por lo tanto el tensor de Cotton es simétrico. Otras propiedades que se pueden demostrar son: el tensor de Cotton es sin traza $g_{mn}C^{mn} = 0$ y es transverso $\nabla_m G^{mn} = 0$.

El tercer término de $\mathcal{L}_{CS}$ se puede escribir separando el campo e_{mn} en su parte simétrica y antisimétrica [4.3.17]

$$\begin{aligned}-\Lambda e_q{}^m \, \eta^{npq} \nabla_p \, \eta_{mnr} V^r &= -\Lambda(h_{mn} + \eta_{qmr} V^r)\eta^{npq} \, g^{ms} \nabla_p(\eta_{smt} \, V^t) \; . \\ &= -\Lambda \, V^q \nabla_p h^p{}_q + \Lambda \, V^P \nabla_p \, h + \Lambda \, \eta^{nst} V_n \nabla_s V^t \; .\end{aligned} \tag{4.3.28}$$

El cuarto y quinto término de $\mathcal{L}_{CS}$ se puede escribir:

$$\Lambda \, e_q{}^m \varepsilon^{npq} \nabla_p (h_{mn} - g_{mn}) - g^{mn} \frac{\Lambda}{2} e_{qr} \varepsilon^{pqr} \nabla_p (h_{mn} - g_{mn} h) = \Lambda \, e_q{}^m \varepsilon^{npq} \nabla_p h_{mn}, \tag{4.3.29}$$

si se agrega a esta expresión el último término de la ecuación [4.3.25] y luego separando el campo e_{mn} en su parte simétrica y antisimétrica, se tiene entonces:

$$\begin{aligned}\Lambda \, e_q{}^m \varepsilon^{npq} \nabla_p (h_{mn} + 2g_{mn} h) &= \sqrt{-g} \Lambda (h_{qm} + \eta_{qmr} V^r) \eta^{npq} \nabla_p (h^m_n + 2\delta^m_n h) \; . \\ &= \Lambda \, (\sqrt{-g}[h_{qm} \eta^{npq} \nabla_p h^m_n] - V^r \nabla_m (h^m_n - \delta^m_n h) + 2V^p \nabla_p h) \; .\end{aligned} \tag{4.3.30}$$

De las ecuaciones [4.3.28] y [4.3.30] los términos que tienen la constante cosmológica (Λ) del término $\mathcal{L}_{CS}$ son:

$$\Lambda \, h_{qm} \varepsilon^{qnp} \nabla_p h_n{}^m - 2\Lambda V^r \nabla_m (h^m_n - \delta^m_n h) + \Lambda \, \eta^{npq} V_n \nabla_q V_q \; . \tag{4.3.31}$$

Sustituyendo los términos anteriores, el término con el tensor de Cotton, asi como el término linealizado de Einstein-Hilbert en la acción [4.3.11] se obtiene:

$$\begin{aligned}I_{3er} = \int d^3x \sqrt{-g} \, \{ \, &- \frac{1}{\mu} h_{mn} G^{mn} - \frac{1}{2\mu} \Lambda (h_{mn} - h^2) + \frac{1}{\mu} V_m V^m \\ &+ \frac{1}{\mu^2} h_{mn} C^{mn} - \frac{1}{\mu^2} \Lambda V^r \nabla_m (h^m_n - \delta^m_n h) \\ &+ \frac{1}{2\mu^2} \Lambda \, h_{qm} \varepsilon^{qnp} \nabla_p h_n{}^m + \frac{1}{2\mu^2} \Lambda \, \eta^{npq} V_n \nabla_q V_q + \frac{1}{\mu^2} V^p \nabla_p h \, \} \; .\end{aligned} \tag{4.3.32}$$

Esta acción es de tercer orden en lenguaje métrico e invariante bajo "partially massless", bajo las siguientes transformaciones de calibre:

$$\begin{aligned} \delta h_{mn} &= \nabla_m \nabla_n \xi + \Lambda\, g_{mn} \xi \ . \\ \delta V_m &= 0 \ . \end{aligned} \tag{4.3.33}$$

Se debe notar que la acción anterior no es solo la acción de la gravedad masiva topológica como se esperaba, sino contiene además otros términos. No se encuentra por lo tanto equivalencia entre la gravedad masiva topológica y la gravedad masiva autodual como en el caso plano.

4.4. La acción intermedia de segundo orden

Si se presta atención a la acción de segundo orden en lenguaje triádico obtenida en la sección anterior dada por [4.3.7]

$$\begin{aligned} I_{2^{do}Orden} &= \int d^3x \ \{ \ \frac{1}{2\,\mu}\ e_m{}^q\ \varepsilon^{mnp} \nabla_n w^q_{qp\,[e,\nabla e]} - \frac{1}{2}\ e_{mq}\ \varepsilon^{mnp} \nabla_n e^q_p \ \} \ . \\ &= \int d^3x \ \{ \ \frac{1}{2\,\mu}\ e_{mq}\ \varepsilon^{mnp} \nabla_n [\frac{1}{\sqrt{-g}}\ \varepsilon_p{}^{ts} \nabla_t e_{sq} - \frac{1}{2\,\sqrt{-g}}\ g_{pq}\, \varepsilon^{rst} \nabla_r e_{st}] \\ &\qquad - \frac{1}{2}\ e_{mq}\ \varepsilon^{mnp} \nabla_n e^q_p \ \} \ . \end{aligned} \tag{4.4.1}$$

Desarrollando los términos con dos tensores Levi-Civita y luego se descompone el campo e^{mn} en su parte simétrica y antisimétrica

$$e^{mn} = h_{mn} + \eta^{mnp} V_p \ . \tag{4.4.2}$$

Luego de realizar varios pasos intermedios simplemente de álgebra (muy parecidos al procedimiento realizado en el capítulo 2, sección 4) se obtiene una acción de segundo orden en lenguaje métrico de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} I_2 = \int d^3x \sqrt{-g}\ \{ & -\frac{1}{2} \nabla_p h_{mn} \nabla^p h^{mn} + \frac{1}{2} \nabla_p h \nabla^p h - \nabla_m h^{mn} \nabla_n h + \nabla_p h_{mn} \nabla^n h^{mp} \\ & + \frac{1}{2} \Lambda\ (3 h_{mn} h^{nm} - h^2) + \Lambda\, V_m V^m + \mu V^m (\nabla^n h_{mn} - \nabla_m h)\ \} \\ & - \frac{1}{2} \mu\, h_{mq}\, \varepsilon^{mnp} \nabla_n h^q_p + \frac{1}{2} \mu\, V_m\, \varepsilon^{mnp} \nabla_n V_p \ . \end{aligned} \tag{4.4.3}$$

Se olvidará por un momento esta acción y se analizará una acción linealizada en 3D formulada por C. Aragone, P. Arias y A. khoudeir en 1997 [7], de la forma

$$
\begin{aligned}
I = \int d^3x \, \{ & -\frac{1}{2}\partial_p h_{mn}\partial^p h^{mn} + \frac{1}{2}\partial_p h \, \partial^p h - \partial_m h^{mn}\partial_n h + \partial_p h_{mn}\partial^n h^{mp} \\
& - \frac{1}{2}\mu \, h_{mq} \, \varepsilon^{mnp}\partial_n h^q_p + \mu \, V^m(\partial^n h_{mn} - \partial_m h) - m^2 \, V_m V^m \\
& + \frac{1}{2}\mu \, V_m \, \varepsilon^{mnp}\partial_n V_p - \frac{1}{2}m^2 \, (h_{mn}h^{mnn} - h^2) \} \, ,
\end{aligned}
\tag{4.4.4}
$$

donde V_m desempeña el rol de un campo vectorial auxiliar, μ y m son parámetros de masa. Este sistema describe la propagación de dos grados de libertad con masas

$$
m^{\pm} = \pm\frac{1}{2}\,\mu + \sqrt{\frac{1}{4}\,\mu + m^2} \ . \tag{4.4.5}
$$

Esta acción admite una generalización sobre un background gravitacional (A)dS, de la siguiente manera

$$
\begin{aligned}
I = \int d^3x \, \{ & -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,\nabla_p h_{mn}\nabla^p h^{mn} + \frac{1}{2}\sqrt{-g}\,\nabla_p h \, \nabla^p h - \sqrt{-g}\,\nabla_m h^{mn}\nabla_n h \\
& + \sqrt{-g}\,\nabla_p h_{mn}\nabla^n h^{mp} + 2\Lambda\,\sqrt{-g}(h_{mn}h^{mn} - \frac{1}{2}h^2) - \frac{1}{2}\mu \, h_{mq} \, \varepsilon^{mnp}\nabla_n h^q_p \\
& + \mu\,\sqrt{-g}\,V^m(\nabla^n h_{mn} - \nabla_m h) + \frac{1}{2}\mu \, V_m \, \varepsilon^{mnp}\nabla_n V_p - m^2 \, V_m V^m \\
& - \frac{1}{2}m^2\sqrt{-g}\,(h_{mn}h^{mnn} - h^2) \} \, .
\end{aligned}
\tag{4.4.6}
$$

Ahora se realizará un análisis covariante para conocer la dinámica de esta teoría, y determinar los grados de libertad en que propaga la teoría. Para esto se obtienen las ecuaciones de movimiento:

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta I}{\delta h_{mn}} = 0 \ \rightarrow \ G_{mn} = & \nabla^2 h_{mn} + \nabla_m\nabla_n h - \nabla_p\nabla_m h_n{}^p - \nabla_p\nabla_n h^p_m \\
& - g_{mn}(\nabla^2 h - \nabla_p\nabla_q h^{pq}) + 4\Lambda\, h_{mn} - 2\Lambda\, g_{mn} h \\
& - m^2(h_{mn} + g_{mn} h) - \frac{\mu}{2\sqrt{-g}}\,(\varepsilon_n{}^{pq}\nabla_p h_{qm} + \varepsilon_m{}^{pq}\nabla_p h_{qn}) \\
& - \frac{\mu}{2}(\nabla_m V_n + \nabla_n V_m) + \mu\, g_{mn}\nabla_p V^p = 0 \, .
\end{aligned}
\tag{4.4.7}
$$

$$
\frac{\delta I}{\delta V_m} = 0 \ \rightarrow \ F^m = \mu\,\eta^{mnp}\nabla_n V_p + \mu\,(\nabla^{mn}_h - \nabla^m h) - 2m^2 V^m = 0 \, . \tag{4.4.8}
$$

Hallando la traza de la ecuación de movimiento [4.4.7]

$$G = g_{mn}G^{mn} = \nabla^2 h - \nabla_p \nabla_p h^{pq} + 2(\Lambda - m^2)h - 2\mu\, \nabla_p V^p = 0\ , \tag{4.4.9}$$

luego se determina la primera divergencia de G^{mn}:

$$\begin{aligned}\nabla_m G^{mn} =& - m^2(\nabla_m h^{mn} - \nabla^n h) - \frac{1}{2}\mu\, \eta^{mpq}\nabla_m \nabla_p {h_p}^n \\ & - \frac{1}{2}\mu\, \eta^{mnp}\nabla_m \nabla_p {h_q}^m + \mu \nabla^n \nabla_p V^P \\ & - \frac{1}{2}\mu\, (\nabla^2 V^n + \nabla_m \nabla^n V^m) = 0\,,\end{aligned} \tag{4.4.10}$$

algunos términos de la ecuación anterior se pueden escribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}1) - \frac{1}{2}\mu\, \eta^{mpq}\nabla_m \nabla_p {h_q}^n &= -\frac{1}{4}\mu\, \eta^{npq}[\nabla_m, \nabla_p]{h_q}^n\ . \\ &= -\frac{1}{4}\mu\, \eta^{npq} g^{nr}(R_{mpq}^{\ \ \ \ s} h_{qr} + R_{mpr}^{\ \ \ \ s} h_{qs})\,. \\ &= -\frac{1}{2}\mu\, \Lambda\, \eta^{npq} h_{qp} = 0\,.\end{aligned} \tag{4.4.11}$$

$$\begin{aligned}2) - \frac{1}{2}\mu\, \eta^{npq}\nabla_m \nabla_p {h_q}^m &= -\frac{1}{2}\mu\, g^{mr}\eta^{npq}(\nabla_p \nabla_m h_{qr} + R_{mpq}^{\ \ \ \ s} h_{sr} + R_{mpr}^{\ \ \ \ s} h_{qs})\,. \\ &= -\frac{1}{2}\mu\, \eta^{npq}\nabla_p \nabla_m {h_q}^m\,.\end{aligned} \tag{4.4.12}$$

$$\begin{aligned}3) - \frac{1}{2}\mu\, \nabla_m \nabla^n V^m &= -\frac{1}{2}\mu\, g^{np} g^{mq}(\nabla_p \nabla_m V_q + R_{mpq}^{\ \ \ \ r} V_r)\ . \\ &= -\frac{1}{2}\mu\, \nabla^n \nabla_m V^m - \mu\, \Lambda\, V^n\ ,\end{aligned} \tag{4.4.13}$$

sustituyendo las expresiones anteriores en la ecuación [4.4.10]

$$\begin{aligned}\nabla_m G^{mn} =& - m^2(\nabla_m h^{mn} - \nabla^n h) - \frac{1}{2}\mu\, \eta^{npq}\nabla_p \nabla_m h_q^m\ . \\ & - \frac{1}{2}\mu\, (\nabla^2 V^n - \nabla^n \nabla_m V^m) - \mu\, \Lambda\, V^n = 0\ .\end{aligned} \tag{4.4.14}$$

Hallando la segunda divergencia de la ecuación anterior, se obtiene

$$\nabla_n \nabla_m G_{mn} = -m^2(\nabla^2 h - \nabla_m \nabla_n h^{mn}) - \mu\, \Lambda\, \nabla_n V^n = 0\ . \tag{4.4.15}$$

Se analizará la ecuación de movimiento [4.4.8], hallando su divergencia

$$\nabla_m F^m = -(\nabla^2 h - \nabla_m \nabla_n h^{mn}) - 2\frac{m^2}{\mu}\nabla_m V^m = 0 \,, \tag{4.4.16}$$

si se unen las dos anteriores relaciones obtenemos la relación

$$\frac{(\mu^2\Lambda - 2m^4)}{\mu\, m^2}\nabla_m V^m = 0\,, \tag{4.4.17}$$

se asume $(\mu^2\Lambda - 2m^4) \neq 0 =$ entonces,

$$\nabla_m V^m = 0 \,. \tag{4.4.18}$$

Si ahora se observa la traza G ecuación [4.4.9], se reduce a

$$2(\Lambda - m^2)h = 0 \,, \tag{4.4.19}$$

si se asume que $\Lambda \neq m^2$ entonces:

$$h = 0 \,. \tag{4.4.20}$$

Eliminando así un grado de libertad a la teoría. Si se conoce que la traza del tensor h_{mn} es igual a cero, se puede hallar otra restricción más a partir de la ecuación [4.4.15]

$$\nabla_m \nabla_n h^{mn} = 0 \,. \tag{4.4.21}$$

Por lo tanto tenemos que no hay excitaciones escalares en la teoría debido a [4.4.18], [4.4.20] y [4.4.21].

Si se escribe de nuevo las ecuaciones "vectoriales" teniendo en cuenta las tres relaciones anteriores [4.4.18], [4.4.20] y [4.4.21] entonces:

$$\nabla_m G^{mn} = -m^2 \nabla_m h^{mn} - \frac{1}{2}\mu\, \eta^{npq}\nabla_p \nabla_r h_q{}^e - \frac{1}{2}\mu\, \nabla^2 V^n - \mu\, \Lambda\, V^n = 0\,, \tag{4.4.22}$$

mientras que

$$F^n = \eta^{npq}\nabla_p V_q - 2\frac{m^2}{\mu}V^n + \nabla_m h^{mn} = 0\,, \tag{4.4.23}$$

si multiplicamos la última ecuación por η_{nrs}, entonces

$$\eta_{nrs}F^n = \nabla_s V_r - \nabla_s V_r - 2\frac{m^2}{\mu}\eta_{rsn}V^n + \eta_{rsn}\nabla_m h^{nm} = 0\,. \tag{4.4.24}$$

Ahora obteniendo la divergencia de la ecuación anterior

$$
\begin{aligned}
\eta_{nrs}\nabla_s F^n &= \nabla^2 V_r - \nabla^s\nabla_r V_s - 2\frac{m^2}{\mu}\eta_{rsn}\nabla^s V^n + \eta_{rsn}\nabla^s\nabla_m h^{nm} = 0\ .\\
&= \nabla^2 V_r - g^{sp}(\nabla_r\nabla_p V_s + R_{prs}{}^{q}V_q) - 2\frac{m^2}{\mu}\eta_{rsn}\nabla^s V^n + \eta_{rsn}\nabla^s\nabla_m h^{nm} = 0\ .\\
&= \nabla^2 V_r - 2\Lambda\, V_r - 2\frac{m^2}{\mu}\eta_{rsn}\nabla^s V^n + \eta_{rsn}\nabla^s\nabla_m h^{nm} = 0\ ,
\end{aligned}
\tag{4.4.25}
$$

si se une la última expresión con la ecuación [4.4.22], podemos llegar a la relación

$$
-4(\Lambda + \frac{m^2}{\mu})V^n = 0\ , \tag{4.4.26}
$$

si $(\Lambda\,\mu + m^2) \neq 0$ entonces

$$
V^n = 0\ . \tag{4.4.27}
$$

Eliminando así tres grados de libertad de esta acción que inicialmente tenia nueve grados de libertad. Ahora, si se prestará atención a la ecuación [4.4.23], se llega a la última restricción de la teoría

$$
\nabla_n h^{mn} = 0\ . \tag{4.4.28}
$$

Eliminando otros 3 grados grados de libertad, y con h_{mn} simétrico, transverso y sin traza, por lo tanto el tensor h_{mn} se puede descomponer de la siguiente manera

$$
h_{mn} = h^{+}_{mn} + h^{-}_{mn}\ , \tag{4.4.29}
$$

siendo

$$
h^{\pm}_{mn} = \frac{1}{2}h_{mn} \pm \frac{1}{4}[\,\eta_m{}^{pq}\frac{\nabla_p}{\sqrt{\nabla^2}}h_{qn} - \eta_n{}^{pq}\frac{\nabla_p}{\sqrt{\nabla^2}}h_{qm}\,]\,, \tag{4.4.30}
$$

sustituyendo en la ecuación de movimiento las restricciones [4.4.18], [4.4.20], [4.4.21], [4.4.27] y [4.4.28] obtenemos

$$
\nabla^2 h_{mn} - 2\,\Lambda\, h_{mn} - m^2 h_{mn} - \frac{1}{2}\mu(\eta^{pq}_{m}\nabla_p h_{qn} - \eta^{pq}_{n}\nabla_p h_{qm}) = 0\ , \tag{4.4.31}
$$

la anterior relación se puede reescribir a partir de los h^{+}_{mn} y h^{-}_{mn} de la siguiente manera

$$
\nabla^2(h^{+}_{mn} + h^{-}_{mn}) - (+m^2 + 2\,\Lambda\,)(h^{+}_{mn} + h^{-}_{mn}) - \mu\sqrt{\nabla^2}(h^{+}_{mn} + h^{-}_{mn}) = 0\ . \tag{4.4.32}
$$

Proyectando sobre los subespacios $\pm$, se tiene las ecuaciones

$$[\nabla^2 \pm \mu\sqrt{\nabla^2} - (m^2 + 2\Lambda\,)]h^{\pm}_{mn} = 0\ . \tag{4.4.33}$$

Ahora, si se nota la relación [4.4.19], para el análisis anterior se escogió que $h = 0$, otro caso es cuando

$$\Lambda = m^2\ . \tag{4.4.34}$$

Si se sustituye este valor en nuestra acción [4.4.6], obtenemos justamente

$$\begin{aligned} I_{PM} = \int d^3x\sqrt{-g}\ \{ & -\frac{1}{2}\nabla_p h_{mn}\nabla^p h^{mn} + \frac{1}{2}\nabla_p h\nabla^p h - \nabla_m h^{mn}\nabla_n h + \nabla_p h_{mn}\nabla^n h^{mp} \\ & + \frac{1}{2}\Lambda\ (3h_{mn}h^{nm} - h^2) + \Lambda\, V_m V^m + \mu V^m(\nabla^n h_{mn} - \nabla_m h)\ \} \\ & - \frac{1}{2}\mu\, h_{mq}\,\varepsilon^{mnp}\nabla_n h^q_p + \frac{1}{2}\mu\, V_m\,\varepsilon^{mnp}\nabla_n V_p\ . \end{aligned} \tag{4.4.35}$$

Es decir, la acción a la cual hemos llegado en este trabajo en lenguaje métrico de segundo orden es el caso de "partially massless" para la acción propuesta C. Aragone, P. Arias y A. Khoudeir en 1997, donde parten de 2 masas μ y m, esta última se ajusta a la constante cosmológica dado por la relación [4.4.34].

Conclusión

En el presente trabajo se estudió el fenómeno de "Partially Massless" en formalismo triádico para espacios (A)dS y su relación con la teoría de gravedad masiva autodual en (A)dS en tres dimensiones. Se encontraron los siguientes resultados:

- Se obtuvo un modelo para el fenómeno de "Partially Massless" en lenguaje triádico en 3 dimensiones, el cual propaga en un solo grado de libertad. Se encontró con el hecho interesante de que a partir de la acción de E-H para un espacio plano en lenguaje triádico (sin grados de propagación dinámicos en 3D) acoplada minimalmente a un espacio curvo, se obtiene la acción de P.M en lenguaje triádico y aparece un grado de libertad inducido por este acoplamiento dando a la teoría propagación dinámica.

- Se determinó las ecuaciones de campo para la teoría de P.M en lenguaje triádico, obteniéndose un grado de propagación escalar en un espacio Anti de Sitter, ya que para el caso de Sitter la teoría propaga un campo escalar fantasma.

- Se determinó las ecuaciones de campo para la teoría de la gravedad masiva autodual para espacios (A)dS, obteniéndose una propagación dinámica de un solo grado de libertad masivo de espín 2.

- Se encontró un modelo de tercer orden en sus derivadas que no es el modelo de la gravedad masiva topológica en espacios (A)dS en 3D como se esperaba. Por lo tanto, no se encontró equivalencia entre la gravedad masiva topológica y la gravedad masiva autodual como en el caso plano.

- Se halló un modelo en lenguaje métrico de segundo orden a partir de la acción intermedia resultante del modelo autodual para (A)dS. Este modelo resultó ser el caso de "Partially Masless" para espacios (A)dS de una acción propuesta inicialmente para espacio plano por C. Aragone, P. Arias y A. khoudeir en 1997.

Apéndice

Apéndice A

Notaciones, Convenciones e Identidades

La métrica a utilizar en un espacio de Minkowski

$$\eta^{mn} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

$$\Box = -(\partial_0)^2 + \nabla^2 \quad , \qquad \nabla^2 = (\partial_i)^2 + (\partial_j)^2 .$$

El tensor antisimétrico de Levy-Civita es definido de la forma:

$$\varepsilon^{012} = -\varepsilon_{012} = 1 ,$$

y satisface

$$\varepsilon^{mnp}\varepsilon_{rst} = \delta^m_r\delta^n_s\delta^p_t - \delta^m_r\delta^p_s\delta^n_t + \delta^n_r\delta^p_s\delta^m_t - \delta^n_r\delta^m_s\delta^p_t + \delta^p_r\delta^m_s\delta^n_t - \delta^p_r\delta^n_s\delta^m_t .$$

$$\varepsilon^{mnp}\varepsilon_{mrs} = \delta^n_r\delta^p_s - \delta^p_r\delta^n_s .$$

$$\varepsilon^{mnp}\varepsilon_{mns} = -2\delta^n_s .$$

En dimensiones espaciales

$$\varepsilon^{0ij} = \varepsilon^{ij} .$$

$$\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kj} = \varepsilon_{ik} .$$

$$\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} = 2^{\text{o}};.$$

Apéndice B

Métrica en (A)dS

La métrica a utilizar en un espacio con curvatura constante, es decir, un espacio máximamente simétrico (A)dS es:

$$ds^2 = -dt^2 + \tau^2_{(t)}\delta_{ij}dx^i dx^j \ .$$

$$g_{mn} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \tau^2_{(t)} & 0 \\ 0 & 0 & \tau^2_{(t)} \end{pmatrix} \ , \quad g^{mn} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tau^2_{(t)}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\tau^2_{(t)}} \end{pmatrix} \ .$$

$$\sqrt{-g} = \tau^2_{(t)} \ , \quad g_{00} = -1 \ , \quad g_{0i} = 0 = g_{i0} \ , \quad g_{ij} = \tau^2_{(t)}\delta_{ij} \ .$$

Las conexiones de la métrica

$$\Gamma^0_{ij} = \tfrac{1}{2}\delta_{ij}\frac{d\tau^2_{(t)}}{dt} \ , \quad \Gamma^i_{0j} = \delta^i_j \frac{d}{dt}\log(\tau^2_{(t)}) \ , \quad \Gamma^0_{00} = \Gamma^0_{0i} = \Gamma^0_{ij} = \Gamma^i_{00} = \Gamma^k_{ij} = 0 \ .$$

El tensor de Riemann para un espacio de curvatura constante (máximamente simétrico) viene dado por

$$R_{mpnq} = \frac{2 \ \Lambda}{(D-2)(D-1)}(g_{mn}g_{pq} - g_{mq}g_{pn}) \ .$$

El tensor de Ricci, viene dado por sus componentes:

$$R_{mn} = R^p_{mpn} = \partial_p \Gamma^p_{mn} - \partial_n \Gamma^p_{pm} + \Gamma^p_{pq}\Gamma^q_{mn} - \Gamma^p_{nq}\Gamma^p_{qm} \ .$$

$$R_{00} = \frac{2}{\tau_{(t)}}\frac{d^2\tau_{(t)}}{dt^2} \quad , \quad R_{ij} = \delta_{ij}(\frac{d\tau_{(t)}}{dt})^2 + \delta_{ij}\tau_{(t)}\frac{d^2\tau_{(t)}}{dt^2} \ .$$

En un espacio máximamente simétrico el tensor de Ricci viene dado por

$$R_{mn} = \frac{2\ \Lambda}{(D-2)} g_{mn}\ .$$

El escalar de Ricci, es decir, el escalar de curvatura viene dado por

$$R = \frac{2D}{(D-2)}\ \Lambda\ .$$

En 3 dimensiones el escalar de Ricci:

$$R = g^{mn}R_{mn} = g^{00}R_{00} + g^{ij}R_{ij} = 6\Lambda$$

$$R = 6\alpha^2 = 6\Lambda\ .$$

$$\alpha^2 = \Lambda\,, \quad \text{Por lo tanto} \quad \tau_{(t)} = e^{\sqrt{\Lambda}t}\ .$$

Apéndice C

Formalismo Vielbein

Los Vielbein [14] (palabra alemana para referirse a muchas piernas) son utilizados cuando se desea describir objetos tensoriales en el espacio tangente en cada punto de una variedad n-dimensional y así evitar el utilizar coordenadas curvilíneas que carecen de generalización. Los Vielbein son vectores bases del espacio tangente y además poseen índices mudos. En tres dimensiones los Vielbein son conocido como *Tríadas*.

Las Vielbein son definidas por objetos de la forma ${e_\mu}^a$ que transforman entre el espacio tangente al espacio de coordenadas usado, la base para un espacio tangente (T_p) en un punto dado viene dado por

$$\hat{e}_{(\mu)} = \partial_\mu \,.$$

Donde las derivadas parciales son respecto a las coordenadas en un punto. Similarmente, el espacio cotangente (T_p^*) viene dado por los gradientes de las funciones coordenadas

$$\hat{\theta}^{(\mu)} = d\,x^\mu \,.$$

Ahora se introduce un conjunto de vectores bases $\hat{e}_a$, preferiblemente ortogonales, (índices con letras latinas para recordar que son independientes de cualquier sistema coordenado, a diferencia de las letras griegas).

El punto de tener una base, es que cualquier vector puede ser expresado como una combinación lineal de vectores bases. Se puede expresar la base vieja a partir de la nueva base de la siguiente forma

$$\hat{e}_{(\mu)} = e^a_\mu \hat{e}_{(a)}.$$

Donde las componentes e^a_μ son los Vielbein y forman una matriz invertible DxD.

La inversa de las Vielbein vienen definidas como:

$$e_a^\mu \, e_\nu^a = \delta_\nu^\mu \quad ; \quad e_\mu^a \, e_b^\mu = \delta_b^a.$$

Así para el espacio tangente: $\hat{e}_{(a)} = e_a^\mu \, \hat{e}_{(\mu)}$,

y el espacio cotangente: $\hat{\theta}_{(a)} = e_a^\mu \, \hat{\theta}_{(\mu)}$.

Los Vielbein deben de cumplir

$$e_a^\mu \, e_b^\nu \, g_{\mu\nu} = \eta_{ab} \;, \;\; \text{o} \quad g_{\mu\nu} = e_\mu^a \, e_\nu^b \, \eta_{ab}.$$

Así el determinante de la métrica:

$$e = \sqrt{-g} \;.$$

Cualquier tensor se puede escribir como

$$v_b^a = e_\mu^a \, v_b^\mu = e_b^\nu \, v_\nu^a = e_\mu^a \, e_b^\nu \, v^{\mu\nu}.$$

Los cambios de coordenadas son de la forma:

$$\hat{e}_{(a)} \to \hat{e}_{(a\prime)} \;\; = \;\; \Lambda_{a\prime}{}^a \hat{e}_{(a)},$$

por los tanto los cambios en coordenada en la métrica son de la forma:

$$\Lambda_{a\prime}{}^a \Lambda_{b\prime}{}^b \eta_{ab} \;\; = \;\; \eta_{a\prime b\prime}.$$

Podemos realizar al mismo tiempo tanto transformaciones locales bajo Lorentz o transformaciones de coordenadas generales de la siguiente manera:

$$T^{a\prime\mu\prime}{}_{b\prime\nu\prime} \;\; = \;\; \Lambda^{a\prime}{}_a \frac{\partial X^{\mu\prime}}{\partial X^\mu} \Lambda_{b\prime}{}^b \frac{\partial X^\nu}{\partial X^{\nu\prime}} \, T^{a\mu}{}_{b\nu}.$$

Cuando se deriva covariantemente, se debe reemplazar las conexiones $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ por las conexiones de espín $w_{\mu\ b}^{a}$

$$\nabla_\mu X^a{}_b \; = \; \partial_\mu X^a{}_b + w_{\mu\ c}^{a} X^c{}_b - w_{\mu\ b}^{c} X^a{}_c \;.$$

Llamadas así debido a que pueden ser usadas para para obtener derivadas covariantes de espinores, lo cual es imposible usando la convención usual de coordenadas. Ahora, se comparará con la derivada covariante en base coordenada:

$$\nabla X \;=\; (\partial_\mu X^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\lambda}\, x^\lambda)\, d\,x^\mu \otimes \partial_\nu.$$

Se halla el mismo objeto en una base mezclada y se convertirá una base coordenada

$$\begin{aligned}
\nabla X &= (\partial_\mu + w^a_{\mu\ \ b} X^b)\, d\,x^\mu \otimes \hat{e}_{(a)} \\
&= (\,\partial_u(e^a_\nu\, x^\nu) + w^a_{\mu\ \ b}\, e^b{}_\lambda X^\lambda)\, d\,x^\mu \otimes (e^\sigma_a \partial_\sigma) \\
&= (\,\partial_u\, x^\nu + e^\nu{}_a\, x^\lambda \partial_\mu e^a{}_\lambda + e^\nu{}_a\, e^b{}_\lambda w^a_{\mu\ \ b}\, X^\lambda)\, d\,x^\mu \otimes \partial_\nu,
\end{aligned}$$

así por comparación

$$\Gamma^\nu_{\mu\lambda} \;=\; e^\nu{}_a\, \partial_\mu e^a{}_\lambda + e^\nu{}_a\, e^b{}_\lambda w^a_{\mu\ \ b}. \qquad \text{o} \qquad w^a_{\mu\ \ b} \;=\; e^a{}_{nu} e^\lambda_{\ b}\, \Gamma^\nu_{\mu\lambda} - e^\lambda_{\ b} \partial_\mu e^a{}_\lambda.$$

Con un poco de álgebra se puede obtener la relación que la derivada covariante de las triadas es idénticamente cero

$$\nabla_\mu\, e^a{}_\nu \;=\; 0.$$

Esto es cierto sin necesidad de asumir nada acerca de las conexiones de espín.

Las conexiones de espín no obedecen las leyes de transformaciones; bajo transformaciones generales de coordenadas el índice griego de abajo transforma de la manera correcta, pero bajo transformaciones locales de Lorentz las conexiones de espín transforman de manera no homogénea:

$$w^a_{\mu'\ \ b} \;=\; \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} w^a_{\mu\ \ b} \qquad \text{y} \qquad w^{a'}_{\mu\ \ b'} \;=\; \Lambda^{a'}_a \Lambda^{b'}_b\, w^a_{\mu\ \ b} - \Lambda^c_{b'} \partial_\mu \Lambda^{a'}_c.$$

Otra propiedad importante se halla cuando se determina la derivada covariante de la métrica en la base ortonormal η_{ab}

$$\nabla_\mu \eta_{ab} = \partial_\mu \eta_{ab} - w^c_{\mu\ \ a} \eta_{cb} - w^c_{\mu\ \ b} \eta_{ac} \;=\; 0.$$

De lo anterior se deduce que las conexiones de espín son antisimétricas en sus últimos dos índices cuando se encuentren ambos arriba o ambos abajo:

$$w_{\mu ab} = -w_{\mu ba}\,.$$

Ahora se puede definir una derivada más general, por ejemplo aplicado al tensor T^a_μ

$$\nabla_\nu T^a_\mu \;=\; \partial_\nu - \Gamma^\lambda_{\nu\mu}\, T^a_\lambda + w_\mu{}^a{}_b\, T^b_\nu\, \eta_{ac}\,.$$

También, se puede definir el tensor de Riemann en lenguaje triádico a partir del mismo en el sistema coordenado

$R_{\mu\nu}{}^{ab} = e^{a\lambda}\, e^{b\rho}\, R_{\mu\nu\lambda\rho}$.

Reescribiendo de manera conveniente para usarlo en la formulación de la relatividad general en lenguaje triádico

$R_{mn}{}^{a} = \varepsilon^{abc}\, R_{mnbc}$. $R_{mn}{}^{a} = \partial_m w_n{}^{a} - \partial_n w_m{}^{a} + \varepsilon^{abc} w_{mb} w_{nc}$,

con $\quad w_m{}^{a} = \dfrac{1}{2}\,\varepsilon^{abc}\, w_{mbc}$.

Bibliografía

[1] Albert Einstein. The Foundation of the General Theory of Relativity. *Annalen Phys.*, 49:769–822, 1916. [Annalen Phys.14,517(2005)].

[2] M. Fierz and W. Pauli. On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, A173:211–232, 1939.

[3] S. Deser, R. Jackiw, and S. Templeton. Topologically Massive Gauge Theories. *Annals Phys.*, 140:372–411, 1982. [Annals Phys.281,409(2000)].

[4] C. Aragone and A. Khoudeir. Selfdual Massive Gravity. *Phys. Lett.*, B173:141–144, 1986.

[5] S. Deser and R. Nepomechie. Gauge Invariance Versus Masslessness in De Sitter Space. *Annals Phys.*, 154:396, 1984.

[6] S. Deser and A. Waldron. Stability of massive cosmological gravitons. *Phys. Lett.*, B508:347–353, 2001.

[7] C. Aragone, P. Arias, and A. Khoudeir. On the spontaneous breakdown of massive gravities in (2+1)-dimensions. *Nuovo Cim.*, B112:63–74, 1997.

[8] Steven Weinberg. *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*, volume 67. Wiley New York, 1972.

[9] E. C. G. Stueckelberg. Theory of the radiation of photons of small arbitrary mass. *Helv. Phys. Acta*, 30:209–215, 1957.

[10] P. K. Townsend, K. Pilch, and P. van Nieuwenhuizen. Selfduality in Odd Dimensions. *Phys. Lett.*, B136:38, 1984. [Addendum: Phys. Lett.B137,443(1984)].

[11] S. Deser and R. Jackiw. 'Selfduality' of Topologically Massive Gauge Theories. *Phys. Lett.*, B139:371–373, 1984.

[12] S. Deser and R. Jackiw. Classical and Quantum Scattering on a Cone. *Commun. Math. Phys.*, 118:495, 1988.

[13] P. Arias, A. Khoudeir, and J. Stephany. Master actions for linearized massive gravity models in 3-D. *Int. J. Mod. Phys.*, A27:1250015, 2012. [Erratum: Int. J. Mod. Phys.A27,1292002(2012)].

[14] S.M. Carroll. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity.* Addison Wesley, 2004.