



Universidad de los Andes  
Facultad de Ciencias  
Departamento de Física

Ecuaciones Efectivas del Modelo Cosmológico LQC-Campo  
Escalar

**Br:** Nairy A. Villarreal

**Tutor:** Aureliano Skirzewski

**Jurados:** Alejandra Melfo.

Nelson Pantoja.

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al grado  
académico de Licenciada en Física

Mérida-Venezuela

Enero, 2014

[www.bdigital.ula.ve](http://www.bdigital.ula.ve)

# Dedicatoria

A mi Madre, Yrian

[www.bdigital.ula.ve](http://www.bdigital.ula.ve)

[www.bdigital.ula.ve](http://www.bdigital.ula.ve)

# Resumen

Partiendo de Gravedad y Cosmología Cuántica a Lazos, se consideraron efectos cuánticos en el modelo cosmológico Friedmann-Robertson-Walker plano ( $k = 0$ ) acoplado a un campo escalar. Se calcularon las ecuaciones efectivas del modelo cuantizado a orden  $\ell_{Planck}^2$ , haciendo un estudio de los grados de libertad cuánticos introducidos como fluctuaciones de los operadores básicos en el Hamiltoniano del modelo, tal como se establece en la Formulación Geométrica de la Mecánica Cuántica. Esta forma de cuantizar permitió eliminar la singularidad del modelo clásico al inicio del universo conocida como Big Bang y representa una base para considerar correcciones cuánticas de orden superior en  $\ell_{Planck}$  en las ecuaciones clásicas.

[www.bdigital.ula.ve](http://www.bdigital.ula.ve)

# Contenido

Resumen . . . . .	5
Introducción . . . . .	9
<b>1 Ecuaciones Efectivas</b>	<b>11</b>
1.1 Formulación Geométrica de la Mecánica Cuántica . . . . .	11
1.1.1 Mecánica Clásica . . . . .	11
1.1.2 Mecánica Cuántica . . . . .	12
1.1.3 Grados de Libertad Cuánticos . . . . .	15
1.1.4 Hamiltoniano Cuántico y Ecuaciones de Movimiento . . . . .	16
1.2 Oscilador Anarmónico Cuántico . . . . .	17
1.2.1 Hamiltoniano Cuántico y Ecuaciones de Movimiento . . . . .	18
1.2.2 Acción Efectiva . . . . .	20
<b>2 LQG y LQC</b>	<b>23</b>
2.1 Acciones Equivalentes a Relatividad	
General . . . . .	23
2.1.1 Formalismo de Cartan . . . . .	24
2.1.2 Acción Hilbert-Palatini . . . . .	24
2.1.3 Acción de Holst . . . . .	25
2.1.4 Formulación Hamiltoniana en términos de las Variables de Ashtekar . . . . .	25
2.2 Gravedad Cuántica a Lazos(LQG) . . . . .	26
2.2.1 Holonomías y Flujos . . . . .	26
2.2.2 Geometría Discreta . . . . .	27
2.2.3 Vínculo Hamiltoniano . . . . .	29
2.3 Cosmología Cuántica a Lazos (LQC) . . . . .	29
2.3.1 Modelo Cosmológico	
Friedmann-Robertson-Walker (FRW) . . . . .	30
2.3.2 El problema del tiempo . . . . .	30

2.3.3	Variables Básicas en LQC . . . . .	32
2.3.4	Representación . . . . .	32
2.3.5	Hamiltoniano Clásico del Modelo FRW . . . . .	33
2.3.6	Resultados de Bojowald . . . . .	33
<b>3</b>	<b>Ecuaciones Efectivas LQC-Campo Escalar</b>	<b>35</b>
3.1	Modelo FRW Clásico . . . . .	35
3.1.1	Hamiltoniano Clásico . . . . .	37
3.2	Cuantización del Hamiltoniano . . . . .	37
3.2.1	Álgebra de las Variables Básicas . . . . .	37
3.2.2	Hamiltoniano Cuántico . . . . .	38
3.3	Ecuaciones de Movimiento . . . . .	39
3.3.1	Identidad de Jacobi . . . . .	42
3.3.2	Relación de Incertidumbre . . . . .	43
3.4	Ecuaciones Efectivas . . . . .	46
3.4.1	Hamiltoniano Efectivo . . . . .	49
	Discusión y Conclusiones . . . . .	51

## REFERENCIAS

53

www.bdigital.ula.ve

# Introducción

En el universo temprano, es posible y quizás necesario tomar en cuenta aspectos cuánticos para explicar los fenómenos observados, tales como el fondo de radiación de microondas. Una de las principales dificultades que se presentan cuando hablamos de una cuantización de la gravedad, es que debido al éxito de la Relatividad General (GR) en predecir la evolución del universo, se deben recuperar los mismos resultados aún partiendo de teorías cuánticas.

Existen varios enfoques en la construcción de una Teoría Cuántica de la Gravedad, todos ellos con grandes problemas matemáticos, conceptuales o de predicción. Dentro de estas están la Teoría de Cuerdas y la menos conocida, Gravedad Cuántica a Lazos (LQG), ambas predicen diferentes aspectos de la naturaleza y presentan importantes y difíciles problemas abiertos.

En nuestro intento por cuantizar, no la gravedad como teoría completa, sino un modelo cosmológico, haremos uso de los aspectos generales de la teoría de la Gravedad Cuántica a Lazos (LQG) ya que entre otros aspectos, nos brinda una formulación invariante bajo difeomorfismos e independiente de la métrica de fondo de la variedad.

Uno de los primeros pasos en la formulación de la Gravedad Cuántica a Lazos (LQG), se hizo en 1986 cuando se establece una formulación para la Relatividad General (GR) en términos de una conexión y una triada densitizada [18, 25, 26] conocidas como las variables de Ashtekar. Las cuales representan un par canónico y dan paso a una formulación hamiltoniana, que resulta ser fundamental para establecer las holonomías y los flujos como variables básicas de LQG. Uno de los problemas más estudiados de LQG es el planteamiento y solución del Vínculo Hamiltoniano de la teoría completa, esto debido a que es extremadamente difícil incluso llegar a una expresión que considere la dinámica completa. Sin embargo como mencionamos, este trabajo se trata de encontrar una solución a un modelo cosmológico bien

conocido, como es el modelo Friedmann-Robertson-Walker (FRW) plano ( $k = 0$ ) y sin tomar en cuenta la constante cosmológica, pero considerando los criterios de Gravedad Cuántica a Lazos (LQG).

En este sentido estableceremos los aspectos generales de la Cosmología Cuántica a Lazos (LQC) siguiendo a Bojowald [14,15]. Donde se ha estudiado este modelo encontrando soluciones interesantes y en cuyo proceso se han resuelto diversos problemas en la implementación de la teoría, como es el problema del tiempo y se ha dejado abierta la discusión sobre una forma metódica para establecer las condiciones de realidad en las soluciones. Ya que aunque Gravedad Cuántica a Lazos (LQG) y Cosmología Cuántica a Lazos (LQC) implican una forma considerablemente sencilla de cuantizar, se paga el precio de trabajar en un espacio con variables complejas y cuyas soluciones deben limitarse de manera tal que las cantidades observables sean reales y comparables con los resultados conocidos clásicamente.

La forma en que nos proponemos encontrar una solución al modelo cuantizado Friedmann-Robertson-Walker (FRW) plano según Cosmología Cuántica a Lazos (LQC), es calculando las Ecuaciones Efectivas. Es decir, vamos a estudiar la dinámica de los valores medios de operadores básicos y sus fluctuaciones, siguiendo la formulación establecida en [1] y con aspectos considerados en [14, 15]. En este estudio se establece un espacio de fase cuántico con infinitos grados de libertad, que nos brindan la posibilidad de estudiar ya sea la desviación mínima del comportamiento clásico del modelo o de manera equivalente, el límite semi-clásico del modelo cuántico. En lugar de encontrar la función de onda, que contiene toda la información del sistema de forma que no podemos extraerla directamente, sino a través de integrales para conocer cantidades observables, tal como se haría en la aproximación WKB, donde además no se puede establecer un límite semi-clásico [16].

En el primer capítulo estableceremos los conceptos básicos sobre la Formulación Geométrica de la Mecánica Cuántica basada en [1], considerando sistemas mecánico cuánticos en general desde el punto de vista geométrico y mostraremos el ejemplo por excelencia en este caso, que es el oscilador anarmónico cuántico. Luego en el capítulo 2, se estudiarán los aspectos generales de la teoría de la Gravedad Cuántica a Lazos y sus consecuencias en la Cosmología Cuántica a Lazos. Finalmente, en el capítulo 3 nos concentraremos en nuestro modelo, mostraremos el proceso para encontrar las Ecuaciones Efectivas del modelo FRW plano siendo consistentes con los aspectos del Capítulo 1 y 2.

# Capítulo 1

## Ecuaciones Efectivas

*Las teorías efectivas son usadas para encontrar solución a diversos sistemas en diferentes ramas de la ciencia. Estas teorías tratan de describir el sistema considerando que tienen información relevante a una escala específica, de manera que los constituyentes básicos en cada escala pueden ser resueltos de manera independiente y proveen una descripción simplificada. Para el estudio de sistemas cuánticos en general, consideraremos una teoría efectiva, basada en la descripción en términos de valores medios de los operadores básicos  $\hat{q}$  y  $\hat{p}$  y de sus fluctuaciones, entendiendo estos últimos como grados de libertad del sistema cuántico.*

*Las ecuaciones efectivas serán obtenidas estudiando los grados de libertad adicionales que introducimos en sistemas clásicos al cuantizar, estos permiten establecer un límite semi-clásico donde podemos, en principio, identificar las contribuciones de los grados de libertad cuánticos.*

### 1.1 Formulación Geométrica de la Mecánica Cuántica

#### 1.1.1 Mecánica Clásica

A lo largo de la historia han surgido diferentes teorías para describir los fenómenos clásicos, partiendo de la mecánica Newtoniana, pasando por formalismos un poco más generales como la mecánica lagrangiana y la mecánica Hamiltoniana, la cual nos brinda la facilidad de describir la evolución temporal de un sistema resolviendo ecuaciones diferenciales de

primer orden.

Las ecuaciones de Hamilton pueden ser generadas si estudiamos el espacio de fase clásico desde el punto de vista geométrico. Con este fin, el espacio de fase clásico es dotado de una *estructura simpléctica*, es decir, una 2-forma cerrada y no degenerada definida como  $\Omega(.,.)$  [3]. A su vez, se pueden definir *campos vectoriales simplécticos*  $X_F$  asociados a la función  $F$  del espacio de fase, a través de  $dF(\eta) = \Omega(X_F, \eta)$ , para un campo vectorial  $\eta$ . Estos están asociados a las funciones del espacio de fase clásico y representan las simetrías de la estructura simpléctica, mejor conocidas como transformaciones canónicas.

Si consideramos dos funciones  $g$  y  $f$  del espacio de fase podemos determinar sus campos vectoriales simplécticos asociados  $X_f$  y  $X_g$ , con los cuales se puede definir un corchete de Poisson [1], dado por

$$\{f, g\} = \Omega(X_f, X_g) \quad (1.1)$$

con las cuales pueden ser escritas las ecuaciones de Hamilton clásicas, considerando que la evolución temporal es dada por  $d/dt = X_H$ , donde  $H$  es el Hamiltoniano.

### 1.1.2 Mecánica Cuántica

Cuando consideramos un sistema cuántico lo primero que usualmente se hace es establecer el *espacio de Hilbert*  $\mathcal{H}$ , es decir, un espacio vectorial equipado con un producto interno no degenerado, además de un *álgebra de operadores*. La evolución respecto al tiempo de estos sistemas es generada por la transformación unitaria del operador Hamiltoniano  $\hat{H}$  y puede ser definida mediante la ecuación de Schrödinger [4].

$$\frac{1}{i\hbar} \hat{H}|\Psi\rangle = \frac{d|\Psi\rangle}{dt} \quad (1.2)$$

Vamos a establecer el espacio de estados de los sistemas mecánico cuánticos, como un espacio *proyectivo de Hilbert*  $\mathcal{P}$  [1], es decir, un espacio donde se cumple  $\phi = c\psi$  con  $c \in \mathbb{C}$ , siempre que los estados  $\phi$  y  $\psi$  sean físicamente equivalentes y donde un estado es representado *por un punto* y no por un vector.

En este sentido, desde el punto de vista geométrico [1], un espacio proyectivo de Hilbert, es definido como el espacio de fase de la mecánica

cuántica, con un producto interno entre dos vectores  $\eta_1$  y  $\eta_2$  dado por

$$\langle \eta_1, \eta_2 \rangle = \frac{1}{2\hbar} G(\eta_1, \eta_2) + \frac{i}{2\hbar} \Omega(\eta_1, \eta_2) \quad (1.3)$$

donde  $G$  es la métrica y  $\Omega$  es la estructura simpléctica.

Como resultado de la identificación de la estructura simpléctica del espacio de Hilbert, como la parte antisimétrica del producto interno [7, 8] [9], se pueden definir campos vectoriales simplécticos  $X_F$  y  $X_K$  asociados a las funciones  $F = \langle \Psi, \hat{F}\Psi \rangle$  y  $K = \langle \Psi, \hat{K}\Psi \rangle$ , donde hemos definido las funciones del espacio proyectivo de Hilbert como los valores esperados de los operadores  $\hat{F}$  y  $\hat{K}$ , además de  $\langle \Psi | \Psi \rangle = 1$ . Así, en el espacio de Hilbert las funciones valor medio son generadores de transformaciones canónicas en este espacio de funciones. Por otra parte, la derivada de Lie de una función  $F$  en la dirección de un campo vectorial  $\eta$  para un punto  $\Psi$ , viene dado por [1]

$$\mathcal{L}_\eta F = dF(\eta) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{d}{d\epsilon} \langle \Psi + \epsilon\eta | \hat{F} | \Psi + \epsilon\eta \rangle = \langle \eta, \hat{F}\Psi \rangle + \langle \Psi, \hat{F}\eta \rangle \quad (1.4)$$

De manera que podemos escribir la derivada de Lie en términos de la estructura simpléctica haciendo

$$dF(\eta) = \frac{\hbar}{i} \left( \langle \frac{1}{i\hbar} \hat{F}\Psi, \eta \rangle - \langle \eta, \frac{1}{i\hbar} \hat{F}\Psi \rangle \right) = \Omega(X_F, \eta) \quad (1.5)$$

con lo cual el campo vectorial simpléctico de una función  $F$  en un punto  $\Psi$ , [2] viene dado por

$$X_F(\Psi) = \frac{1}{i\hbar} \hat{F}\Psi \quad (1.6)$$

Continuando con la idea de que la ecuación de Schrödinger (1.2) proporciona la evolución temporal de los sistemas mecánico cuánticos, podemos considerar un operador  $\hat{F}$  que genere transformaciones unitarias y escribir de forma general [2]

$$\frac{d}{dt} |\Psi\rangle = \frac{1}{i\hbar} \hat{F} |\Psi\rangle = X_F(\Psi) \quad (1.7)$$

Con lo cual, tenemos la *evolución del sistema asociado a la estructura simpléctica*, lo que representa la base de la formulación Geométrica de la Mecánica Cuántica.

Es decir, la definición de campos vectoriales simplécticos, análogos a los establecidos en mecánica clásica, implica que en el caso del espacio de Hilbert  $\mathcal{P}$ , también hay una estructura simpléctica con la cual se define el corchete de Poisson entre funciones  $F$  y  $K$  como [2]

$$\{F, K\} = \Omega(X_F, X_K) = \frac{1}{i\hbar} \left\langle [\hat{F}, \hat{K}] \right\rangle \quad (1.8)$$

Esto nos brinda la posibilidad de resolver un sistema mecánico cuántico por medio de la evolución de cantidades de interés, como método alternativo a encontrar la solución a la ecuación de Schrödinger.

Siguiendo con la idea de la evolución de sistemas cuánticos, cuando nos referimos a un conjunto de cantidades cuánticas de interés, estamos considerando específicamente los valores esperados de operadores básicos  $\hat{q}$  y  $\hat{p}$ , que podemos asociar con cantidades clásicas como la posición y el momento, tal como lo hicimos para  $F$  y  $K$ . La evolución de los valores medios de los operadores esta basada en el teorema de Ehrenfest, junto con la ecuación (1.8). De manera que para un operador lineal  $\hat{O}$  y el operador Hamiltoniano  $\hat{H}$  del espacio de Hilbert  $\mathcal{P}$ , tenemos lo siguiente

$$\frac{d\langle \hat{O} \rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \left\langle [\hat{O}, \hat{H}] \right\rangle = \left\{ \langle \hat{O} \rangle, \langle \hat{H} \rangle \right\}_Q \quad (1.9)$$

Donde el subíndice  $Q$  especifica que se trata del *Corchete de Poisson Cuántico* [1, 14, 15]. Vamos a describir la dinámica de los sistemas cuánticos en términos de valores medios de operadores básicos mediante

$$\frac{d\langle \hat{q} \rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \left\langle [\hat{q}, \hat{H}] \right\rangle = \left\{ \langle \hat{q} \rangle, \langle \hat{H} \rangle \right\}_Q \quad (1.10)$$

$$\frac{d\langle \hat{p} \rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \left\langle [\hat{p}, \hat{H}] \right\rangle = \left\{ \langle \hat{p} \rangle, \langle \hat{H} \rangle \right\}_Q \quad (1.11)$$

Además de describir la evolución de los valores esperados de operadores básicos, es necesario aumentar la dimensionalidad del sistema considerando grados de libertad cuánticos adicionales, como fluctuaciones de los operadores básicos, que nos permitirán establecer ecuaciones efectivas de sistemas cuánticos.

### 1.1.3 Grados de Libertad Cuánticos

Las ecuaciones efectivas de los sistemas cuánticos describen el comportamiento de los valores esperados de los operadores básicos  $\hat{q}$  y  $\hat{p}$ , y también de un conjunto infinito de variables adicionales, llamados *Momentos Cuánticos*. Definidos por Bojowald-Skirzewski [1], como

$$G^{a,b} = \left\langle (\hat{q} - \langle \hat{q} \rangle)^a (\hat{p} - \langle \hat{p} \rangle)^b \right\rangle_{Weyl} \quad (1.12)$$

donde el subíndice Weyl implica que el producto de operadores esta ordenado de Weyl, además esta definido para  $a + b \geq 2$  [1, 15]. Estas variables adicionales representan un aumento en los grados de libertad del sistema, por lo cual, si nuestro propósito es encontrar la solución del sistema cuántico, deberíamos resolver infinitas ecuaciones diferenciales asociadas a cada momento, lo que hace necesario imponer un régimen o aproximación que nos permita encontrar la solución para un conjunto finito de grados de libertad que consideremos relevantes, específicamente nos referimos al *regimen semi-clásico*, en el cual vamos a tener la evolución de los valores medios de los operadores básicos y los momentos, que representen las correcciones cuánticas a las ecuaciones clásicas a cierto orden.

Según la definición (1.12), podemos escribir los momentos, que representan las primeras fluctuaciones de los operadores básicos, para un sistema mecánico cuántico en general

$$G^{qq} = \langle (\hat{q} - \langle \hat{q} \rangle)^2 (\hat{p} - \langle \hat{p} \rangle)^0 \rangle = \langle (\hat{q} - \langle \hat{q} \rangle)^2 \rangle = \langle (\hat{\Delta}q)^2 \rangle \quad (1.13)$$

$$G^{pp} = \langle (\hat{q} - \langle \hat{q} \rangle)^0 (\hat{p} - \langle \hat{p} \rangle)^2 \rangle = \langle (\hat{p} - \langle \hat{p} \rangle)^2 \rangle = \langle (\hat{\Delta}p)^2 \rangle \quad (1.14)$$

$$G^{qp} = \langle (\hat{q} - \langle \hat{q} \rangle)^1 (\hat{p} - \langle \hat{p} \rangle)^1 \rangle = \langle [\hat{q}, \hat{p}]_+ \rangle - \langle \hat{q} \rangle \langle \hat{p} \rangle \quad (1.15)$$

donde tenemos la fluctuación de la posición, del momentum y la covarianza, respectivamente. Estos momentos están asociados a campos vectoriales simplécticos de manera que son simplécticamente ortogonales a las variables básicas  $\langle \hat{q} \rangle$  y  $\langle \hat{p} \rangle$ , lo que hace que  $\{G^{a,b}, \langle \hat{q} \rangle\}_Q = 0 = \{G^{a,b}, \langle \hat{p} \rangle\}_Q$  [1]. Al mismo tiempo, los momentos deben cumplir con un *Principio de Incertidumbre*, esto implica que los valores de los momentos no son arbitrarios.

La dinámica de los sistemas cuánticos es obtenida por medio de estados que saturan el principio de incertidumbre, de manera que el espacio de estados puede ser pensado como dividido en diferentes regiones. Una región de estados que saturan el principio de incertidumbre llamados *estados coherentes*, los cuales proveen información sobre las desviación mínima en el comportamiento clásico del sistema y son físicamente posibles. La región de estados que satisfacen la desigualdad del principio de incertidumbre y que también son físicamente posibles, y finalmente otra región que no tiene sentido físico ya que no cumple con el principio de incertidumbre. Partiendo de la desigualdad de Schwarz podemos calcular la relación de incertidumbre para infinitos grados de libertad, en el caso de (1.13), (1.14) y (1.15) la relación de incertidumbre que deben cumplir [1], viene dada por

$$G^{qq}G^{pp} \geq \frac{\hbar^2}{4} + (G^{qp})^2 \quad (1.16)$$

#### 1.1.4 Hamiltoniano Cuántico y Ecuaciones de Movimiento

En la descripción anterior, establecimos que la evolución de los sistemas cuánticos puede ser determinada mediante la ecuación (1.9), donde aparece el operador Hamiltoniano del sistema. Además, definimos las funciones del del espacio de fase cuántico como los valores esperados de los operadores. Ahora, vamos a definir concretamente  $\langle \hat{H} \rangle$ , el cual llamamos Hamiltoniano Cuántico  $H_Q$  [1]. Este *Hamiltoniano Cuántico*, es el generador del flujo en este espacio de fase y puede ser calculado haciendo una expansión en serie de Taylor [1], dada por (1.17), que por convención se toma como ordenado de Weil.

$$H_Q = \langle \hat{H}(\langle \hat{q} \rangle, \langle \hat{p} \rangle) \rangle_{Weyl} = \sum_{a+b=0, a=0}^{\infty, a+b} \frac{1}{(a+b)!} \binom{a+b}{a} \frac{\partial^{a+b} H(\langle \hat{q} \rangle, \langle \hat{p} \rangle)}{\partial \langle \hat{p} \rangle^a \partial \langle \hat{q} \rangle^b} G^{a,a+b} \quad (1.17)$$

Las ecuaciones de movimiento generadas por este Hamiltoniano Cuántico, vienen dadas por [1]

$$\begin{aligned} \dot{\langle \hat{q} \rangle} &= \{ \langle \hat{q} \rangle, H_Q \}_Q \\ \dot{\langle \hat{p} \rangle} &= \{ \langle \hat{p} \rangle, H_Q \}_Q \\ \dot{G}^{a,b} &= \{ G^{a,b}, H_Q \}_Q \end{aligned} \quad (1.18)$$

esta última ecuación requiere el calculo de un corchete de Poisson adecuado para los momentos de cada sistema en particular.

Aunque estamos considerando ecuaciones que tienen la forma de las ecuaciones de Hamilton clásicas, estamos describiendo con ellas sistemas cuánticos y su similitud es superficial. El flujo generado por  $H_Q$  en el espacio de fase cuántico es equivalente a la evolución generada por la ecuación de Schrödinger, pero la descripción que estamos haciendo permite establecer de manera más clara el límite semi-clásico que se obtiene haciendo  $\hbar \rightarrow 0$ , en otras palabras, hacer cero las correcciones cuánticas. En la práctica establecer este límite no es sencillo, dado que dependiendo del conjunto de grados de libertad que consideremos podemos tener un conjunto de ecuaciones de movimiento acopladas, cuya solución no esta garantizada. [1]

Sin embargo, se han estudiado varios sistemas bajo este enfoque como podemos ver en [1], donde estudian el oscilador armónico, sistemas lineales y oscilador anarmónico, además de un primer acercamiento al estudio de modelos cosmológicos con este método.

www.bdigital.ula.ve

## 1.2 Oscilador Anarmónico Cuántico

Un sistema interesante para estudiar es el oscilador anarmónico, debido a que se ha logrado encontrar una solución, empleando el estudio de la dinámica de los momentos cuánticos, al menos con las correcciones a orden  $\hbar$  y además se logra construir una acción en la cual es evidente la contribución cuántica.

El Hamiltoniano clásico del oscilador anarmónico viene dado por  $H = \frac{1}{2}mp^2 + \frac{1}{2}m\omega^2q^2 + U(q)$ , donde  $U(q)$  es un potencial que depende únicamente de la posición  $q$  [1], es evidente que  $H$  genera las ecuaciones de movimiento clásicas usando las ecuaciones de Hamilton. Sin embargo lo que estamos buscando es cuantizar este sistema, por lo que debemos construir un Hamiltoniano Cuántico como en la sección 1.1.4. Calculamos el Hamiltoniano cuántico en términos de  $g^{a,b} = \hbar^{-(a+b)/2}(m\omega)^{(a+b)/2}G^{a,b}$  [1], que implica un reescalamiento en la variables cuánticas de manera que las  $g^{a,b}$  son adimensionales.

### 1.2.1 Hamiltoniano Cuántico y Ecuaciones de Movimiento

Dado el Hamiltoniano clásico  $H$  del sistema, se obtiene el Hamiltoniano cuántico  $H_Q$  mediante la ecuación (1.17) [1]

$$H_Q = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2q^2 + U(q) + \frac{\hbar\omega}{2}(g^{qq} + g^{pp}) + \sum_{a+b} \frac{1}{(a+b)!} \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{(a+b)/2} U^{(a+b)}(q)g^{a,0} \quad (1.19)$$

donde llamamos  $q = \langle \hat{q} \rangle$  y  $p = \langle \hat{p} \rangle$ . Para encontrar las ecuaciones de movimiento usamos el conjunto de ecuaciones (1.18). En el caso de  $\dot{q}$  y  $\dot{p}$  el cálculo se hace de manera similar a como lo haríamos con las ecuaciones clásicas de Hamilton. Mientras que para  $\dot{G}^{a,b}$ , es necesario establecer un corchete de Poisson adecuado. Este corchete de Poisson puede ser calculado explícitamente para los momentos en general y viene dado por

$$\{G^{a,b}, G^{c,d}\} = \sum_{r,s} \binom{a}{r} \binom{b}{s} \binom{c}{s} \binom{d}{r} r!s! \left(\frac{\hbar}{2}\right)^{r+s-1} \sin\left(\frac{\pi}{2}(r-s)\right) G^{a+c-r-s, b+d-r-s} - adG^{a-1,b}G^{c,d-1} + bcG^{a,b-1}G^{c-1,d} \quad (1.20)$$

con  $0 \leq r \leq \min(a, d)$  y  $0 \leq s \leq \min(c, b)$

del cual se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{g}^{a,b} &= -\omega b g^{a-1,b-1} + a\omega g^{a-1,b+1} - \frac{U''(q)b}{m\omega} \\ &+ \frac{\hbar^{1/2}U'''(q)}{3!(m\omega)^{3/2}} \left( -3b g^{a+2,b-1} + \frac{b(b-1)(b-2)}{4} g^{a,b-3} + 3b g^{a,b-1} g^{2,0} \right) \\ &+ \frac{\hbar U''''(q)}{6(m\omega)^2} \left( -4b g^{a+3,b-1} + \frac{b(b-1)(b-2)}{4} g^{a+1,b-1} + 4b g^{a,b-1} g^{3,0} \right) \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (1.21)$$

mientras que las ecuaciones de movimiento para las variables  $q$  y  $p$  vienen dadas por

$$\dot{q} = \frac{p}{m} \quad (1.22)$$

$$\dot{p} = -m\omega^2 q - U'(q) - \sum_n \frac{1}{n!} \left( \frac{\hbar}{m\omega} \right)^{n/2} U^{(n+1)}(q) g^{n,0} \quad (1.23)$$

Esto representa un conjunto infinito de ecuaciones diferenciales acopladas, donde se observan correcciones en la ecuación de movimiento de  $\dot{p}$  para  $a+b \geq 2$ . Resolverlo requiere, entre otras cosas, imponer infinitas condiciones iniciales, por lo que es necesario truncar el conjunto de ecuaciones y llevarlo a un conjunto finito de ecuaciones diferenciales más sencillo de manejar, es decir, establecer las ecuaciones efectivas del sistema.

Vamos a considerar varios aspectos, por un lado, los valores de los momentos cuánticos no son arbitrarios y deben satisfacer la relación de incertidumbre (1.16), lo cual resulta crucial para encontrar las ecuaciones efectivas del sistema. Por otro lado, las variables cuánticas pueden ser expandidas perturbativamente en potencias de  $\hbar^{1/2}$ , ya que las correcciones aparecen de esta forma. En este sistema en particular, se puede considerar en los grados de libertad cuánticos una aproximación adiabática [1], lo que permite desacoplar y resolver el sistema de ecuaciones. Las variables cuánticas se expanden de la siguiente forma

$$g^{a,b} = \sum_r \sum_e (\hbar)^{r/2} \lambda^e g_{r,e}^{a,b} \quad (1.24)$$

Al reemplazar esta expansión en las ecuaciones de movimiento, estamos introduciendo por un lado la expansión perturbativa en potencias de  $\hbar^{r/2}$  y por otro la *aproximación adiabática*, que implica un cambio lento de las variables cuánticas respecto al tiempo, dada por la expansión en  $\lambda^e$ . Pero manteniendo la evolución de las variables  $q$  y  $p$  libre. Además, hacemos un reescalamiento de la derivada temporal, introduciendo en las ecuaciones de movimiento  $d/dt \rightarrow \lambda d/dt$  donde  $\lambda$  es un parámetro pequeño. Al truncar estas expansiones obtenemos un sistema de ecuaciones efectivas, donde en el caso de [1], se mantienen los términos a orden cero en  $\hbar$  y a primer orden en  $\lambda$ , lo que toma en cuenta que las primeras correcciones se presentan en la ecuación de movimiento de  $p$  como el término que contiene  $g^{qq}$ , las ecuaciones efectivas de movimiento una vez resuelto el sistema son

$$\dot{q} = \frac{p}{m} \quad (1.25)$$

$$\dot{p} = -m\omega^2 q - U'(q) - \frac{U''(q)}{2} g^{qq} \quad (1.26)$$

donde

$$g^{qq} = \frac{\hbar}{2m\omega} \left(1 + \frac{U''(q)}{m\omega^2}\right)^{1/2} + \frac{\lambda^2 \hbar p U'''(q)}{16m^3\omega^5} \left(1 + \frac{U''(q)}{m\omega^2}\right)^{-5/2} \\ - \frac{5\lambda^2 \hbar p^2 (U'''(q))^2}{64m^5\omega^7} \left(1 + \frac{U''(q)}{m\omega^2}\right)^{-7/2} + \frac{\lambda^2 \hbar p^2 U''''(q)}{16m^4\omega^5} \left(1 + \frac{U''(q)}{m\omega^2}\right)^{-5/2} \quad (1.27)$$

para encontrar la solución de estas ecuaciones es necesario definir la función  $U(q)$ .

### 1.2.2 Acción Efectiva

Retomando las ecuaciones efectivas de las variables  $\dot{q}$  y  $\dot{p}$ , sustituyendo (1.25) en (1.26), podemos escribir una ecuación de segundo grado

$$\ddot{q} \left( m - \frac{\lambda^2 \hbar U'''(q)^2}{32m^2\omega^5 \left(1 + \frac{U''(q)}{m\omega^2}\right)^{5/2}} \right) \\ + \dot{q} \frac{\lambda^2 \hbar \left( 4m\omega^2 U'''(q) U''''(q) \left(1 + \frac{U''(q)}{m\omega^2}\right) - 5U'''(q)^3 \right)}{128m^3\omega^7 \left(1 + \frac{U''(q)}{m\omega^2}\right)^{7/2}} \\ + m\omega^2 q + U'(q) + \frac{\hbar U''''(q)}{4m\omega \left(1 + \frac{U''(q)}{m\omega^2}\right)^{1/2}} = 0 \quad (1.28)$$

De manera que haciendo  $\lambda = 1$ , calculamos un lagrangeano efectivo y más fundamental aún, una *acción efectiva* [1], donde podemos ver explícitamente las correcciones cuánticas a las ecuaciones clásicas. La acción clásica del sistema es

$$S = \int dt \left( \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 - U(q) \right) \quad (1.29)$$

Y la acción efectiva encontrada en [1] para el oscilador anarmónico cuántico viene dada por

$$S_{ef} = \int dt \left[ \frac{1}{2} \left( m + \frac{\hbar U'''(q)^2}{2^5 m^2 (\omega^2 + m^{-1} U''(q))^{5/2}} \right) \dot{q}^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 - U(q) - \frac{\hbar \omega}{2} \sqrt{1 + \frac{U'(q)}{m(\omega)^2}} \right] \quad (1.30)$$

En esta acción, podemos observar términos multiplicados por  $\hbar$  que son consecuencia de los grados de libertad cuánticos adicionales del sistema clásico. Además, notemos que al hacer estos términos iguales a cero recuperamos la acción del sistema clásico y también que, esta acción efectiva, sólo considera las correcciones a orden  $\hbar$ , por lo que es posible considerar más correcciones, que lleven a un conjunto distinto de ecuaciones efectivas y por tanto a una acción diferente.

www.bdigital.ula.ve

[www.bdigital.ula.ve](http://www.bdigital.ula.ve)

# Capítulo 2

## LQG y LQC

*Una de las grandes teorías que surgieron a principios del siglo XX, fue la Relatividad General (GR) de Einstein, ésta describe el universo en (3+1) dimensiones, rompiendo con la intuición que tenemos de un mundo en 3-D. Desde hace décadas se ha buscado la manera de cuantizar esta teoría, en este proceso han surgido varios enfoques tales como la Teoría de Cuerdas y más recientemente la Gravedad Cuántica a Lazos (LQG). Estas teorías por distintas que parezcan tienen algo en común, ambas requieren de un cambio en la percepción del espacio-tiempo. En este capítulo seguiremos una línea de estudio desde la conocida Acción de Einstein-Hilbert hasta discretización del espacio basado en LQG y las implicaciones en modelos cosmológicos.*

### 2.1 Acciones Equivalentes a Relatividad General

La acción de la teoría de la relatividad de Einstein viene dada por

$$S_{EH} = \int d^4x \sqrt{-g} R \quad (2.1)$$

donde  $g$  es el determinante de la métrica y  $R$  es el escalar de Ricci. Las ecuaciones de movimiento generadas por esta acción, así como sus propiedades de covariancia son bien conocidas, y deben ser garantizadas en otras formulaciones que pretendan describir el espacio-tiempo.

### 2.1.1 Formalismo de Cartan

La métrica del espacio-tiempo puede ser descrita definiendo un conjunto de cuatro vectores ortogonales entre si, llamados *tétradas*  $e_I^\alpha$ , en cada punto del espacio-tiempo. Estas tétradas nos permiten suponer que existe un espacio Minkowski Local en cada punto. De manera que los índices  $\alpha$  se refieren a las coordenadas generales del espacio-tiempo y las  $I$  se refieren a las coordenadas del marco de referencia local. Las tétradas son independientes del sistema de coordenadas en el que se representen y además nos permiten reproducir la métrica  $g_{\mu\nu}$  vía  $g_{\mu\nu} = e_\mu^I e_\nu^J \eta_{IJ}$ , donde  $\eta_{\mu\nu}$  es la métrica de Minkowski [23].

Con el fin de encontrar una acción y verificar que esta sea equivalente a (2.1), se asocia una conexión de espín a las tétradas, definida como  $\omega_{IJ}^\alpha = e_\nu^I \partial_\alpha e^{\nu J} + e_\nu^I e^{\sigma J} \Gamma_{\sigma\alpha}^\nu$ , y su curvatura asociada viene dada por  $R_{IJ}^{\alpha\beta} = \partial_{[I} \omega_{\beta]}^{J\alpha} - \omega_{K[I}^\alpha \omega_{\beta]}^{KJ}$  y podemos escribir la Acción Einstein-Hilbert como

$$S_C = \int d^4x (\det e_I^\alpha) e_I^\alpha e_J^\beta R_{\alpha\beta}^{IJ}(\omega[e_I^\alpha]) \quad (2.2)$$

haciendo variaciones respecto a la tétrada se obtiene la ecuación

$$e_K^\alpha e_I^\gamma e_J^\beta R_{\gamma\beta}^{KJ} - \frac{1}{2} e_K^\gamma e_J^\beta R_{\gamma\beta}^{KJ} e_I^\alpha = 0 \quad (2.3)$$

que resulta ser análoga con la ecuación de movimiento generada por la ecuación (2.1). Por lo que hereda sus características y propiedades [23].

### 2.1.2 Acción Hilbert-Palatini

Las ecuaciones de movimiento y la acción (2.2), pueden ser generadas de forma alternativa proponiendo una acción que use una conexión  $\omega_\gamma^{KL}$  como campo auxiliar *independiente de la métrica*, esta nueva acción tiene el nombre de la acción de Hilbert-Palatini y viene dada por

$$S_{HP} = \int d^4x (\det e_I^\alpha) e_I^\alpha e_J^\beta R_{\alpha\beta}^{IJ}(\omega_\gamma^{KL}) \quad (2.4)$$

donde la diferencia entre (2.2) y (2.4) es solo la dependencia de la conexión  $\omega$  en las tétradas. La acción (2.4) es considerada una acción de primer orden ya que en las ecuaciones de movimiento solo se observan derivadas de primer orden. Las ecuaciones de movimiento que genera esta acción son

$$e_K^\alpha e_I^\gamma e_J^\beta R_{\gamma\beta}^{KJ} - \frac{1}{2} e_K^\gamma e_J^\beta R_{\gamma\beta}^{KJ} e_I^\alpha = 0 \quad (2.5)$$

$$D_{[\alpha} e_{K]}^\gamma = 0 \quad (2.6)$$

con la ecuación (2.5) recuperamos (2.3), la ecuación (2.6) implica la condición de torsión cero de GR, y solo puede ser resuelta si la conexión es compatible con la tétrada [23].

### 2.1.3 Acción de Holst

Con la acción de Palatini, logramos establecer una formulación que no depende de la métrica del espacio-tiempo, sin embargo existen generalizaciones de ésta, una de ellas propuesta por Holst [24], donde introduce el término dual más simple posible, obteniendo

$$S_H = \int d^4x (\det e^I_\alpha) e_I^\alpha e_J^\beta \left( R_{\alpha\beta}^{IJ} + \frac{\gamma}{2} \epsilon_{KL}^{IJ} R_{KL}^{\alpha\beta} \right) \quad (2.7)$$

donde  $\gamma$  es un parámetro complejo. El término dual es cero sobre las ecuaciones de movimiento, de manera que obtenemos la misma información que con la acción (2.4). Este formalismo, puede dar lugar a diferentes formulaciones dependiendo del valor de  $\gamma$ .

Cuando  $\gamma$  es real y positivo, es conocido como el parámetro de Barbero-Immirzi [14, 15] y nos permite proponer formulaciones para GR, haciendo algunas transformaciones canónicas, que llevan a una forma sencilla de cuantizar pero hacen que el espacio de fase de GR sea complejo.

### 2.1.4 Formulación Hamiltoniana en términos de las Variables de Ashtekar

La formulación canónica de la Relatividad General es descrita usualmente por la parte espacial de la métrica  $g_{ab}$  y la curvatura extrínseca  $K^{ab}$  definida sobre una rebanada espacial  $\Sigma$  definida para  $t = \text{const}$  [15]. En la acción de Holst se establece un formalismo independiente de la métrica del espacio, por lo que la descripción canónica usual no resulta la más indicada para proponer una teoría cuántica de la gravedad.

En su lugar se propone una formulación Hamiltoniana en términos de una transformación canónica compleja que resultan ser las Variables de Ashtekar.

Las variables de Ashtekar  $E_i^a$  y  $A_a^i$ , están definidas como una *tríada densitizada* dada por  $E_i^a = \sqrt{\det g} e_i^a$ , donde  $e_i^a$  es la parte espacial de las tétradas que describen el espacio-tiempo y  $g$  es la parte espacial de la métrica [14, 15]. Esta tríada densitizada es construida de manera tal que podemos recuperar la métrica vía  $E_i^a E_j^b = g^{ab} \det(g)$ . La otra variable es una conexión con características particulares de transformación conocida como la *conexión de Ashtekar-Barbero*, introducida en [17] y [18] dada por  $A_a^i = \Gamma_a^i + \gamma K_a^i$ , donde  $\Gamma_a^i$  es la conexión de espín compatible con la tríada densitizada  $E_i^a$ ,  $\gamma$  es el parámetro de Barbero-Immirzi [14, 15].

La formulación Hamiltoniana resultante permite escribir una acción en términos sólo de vínculos, como se muestra a continuación

$$S_A = \frac{1}{8\pi G} \int dt \int d^3x (E^{ai} \dot{A}_{ai} - N^a D_a - NH - \lambda_i G^i) \quad (2.8)$$

donde  $N^a$ ,  $N$  y  $\lambda_i$  son multiplicadores de Lagrange.  $G^i$  es el *Vínculo de Gauss*, generador de rotaciones locales en  $SO(3)$ ;  $D_a$  es el *Vínculo de Difeomorfismos*, introduce deformaciones en la rebanada espacial  $\Sigma$  y una vez resuelto, garantiza la invariancia bajo transformaciones de coordenadas espaciales y el *Vínculo Hamiltoniano*  $H$  representa un cambio relativo entre los campos y es de interés particular, ya que no debe ser entendido como el Hamiltoniano que genera la evolución en el tiempo del sistema sino como un generador de transformaciones canónicas que dejan invariante el sistema físico.

## 2.2 Gravedad Cuántica a Lazos(LQG)

*Con el proposito de establecer una teoría cuántica de la gravedad, buscamos cuantizar grados de libertad físicos y garantizar que la descripción sea invariante bajo difeomorfismos, por lo que no podemos cuantizar directamente  $E_i^a$  y  $A_a^i$  sino sus regularizaciones, obteniendo objetos con la misma información, pero cuya álgebra es bien comportada y permitan hacer una cuantización independiente de la métrica de fondo.*

### 2.2.1 Holonomías y Flujos

En general, cuando se realiza la regularización de campos se necesita una región de fondo sobre la cual integrar, esto se hace usualmente en un

espacio tipo Minkowski o un espacio curvado, de manera que no se presentan problemas. El inconveniente surge si intentamos describir el espacio usando las variables de la formulación canónica usual  $(g_{ab}, K^{ab})$ , de manera que debemos regularizar la métrica y la curvatura extrínseca. Entonces, si la métrica representa el espacio y vamos a integrarlo sobre una región, la pregunta es ¿Sobre que región lo hacemos? Hacer esto requeriría la introducción de una métrica de fondo que no tiene sentido físico.

Para lograr reproducir un espacio tridimensional, que mantenga la independencia de fondo son usadas las variables de Ashtekar, esto se debe a que las variables pueden ser regularizadas de forma natural, aunque no de forma convencional. Es decir, la conexión de Ashtekar  $A_a^i$  es naturalmente integrable sobre una curva de manera que su regularización da como resultado las *Holonomías* [15]

$$h_e(A) = P e^{\int_e ds \dot{e}^a A_a^i \tau_i} \quad (2.9)$$

donde  $e$  es una curva del espacio,  $P$  es el producto ordenado de camino sobre la curva y  $\tau_j = -1/2i\sigma_j$  es la representación en  $SU(2)$  en términos de las matrices de Pauli. De manera similar, la tríada densitizada es naturalmente integrable sobre superficies 2-D y el resultado de la regularización son los *Flujos* [15]

$$F_s(E) = \int_s \tau_i E_i^a n_a d^2y \quad (2.10)$$

donde  $n_a$  son co-normales a la superficie  $s$ .

Estos objetos son independientes de la métrica de fondo y su corchete de Poisson no contiene deltas, por lo que se dice que su álgebra es bien comportada. Toda la información contenida en la métrica espacial y la curvatura extrínseca es reproducida vía las holonomías y los flujos, brindando así un marco para la Gravedad Cuántica a Lazos (LQG) con implicaciones importantes sobre nuestra percepción de la geometría del espacio.

### 2.2.2 Geometría Discreta

Con la elección de las holonomías y los flujos como objetos básicos para describir el espacio, podemos establecer una posible representación de la teoría cuántica de la gravedad. En esta teoría cuántica, se escoge un espacio de Hilbert donde los estados son generados por las holonomías que toman

valores en  $SU(2)$  y permite escribir operadores como el *área* de una superficie y el *volumen* de una región, que a nivel cuántico llevan a una discretización de la geometría espacial. En el caso del operador área [20], el espectro está dado por

$$A_j = \mu^2 \sqrt{j(j+1)} = 16\pi \ell_p^2 \sqrt{j(j+1)} \quad (2.11)$$

la similitud con el espectro del operador momento angular en mecánica cuántica es evidente. Las contribuciones a este espectro vendrán dadas por un número finito de intercepciones entre las curvas (holonomías) y las superficies (flujos).

Mientras que el espectro del operador área es bien conocido, la descripción del operador volumen es considerablemente más complicada. Sin embargo, podemos decir que existe un espectro discreto para este operador como consecuencia de las contribuciones de los nodos o uniones entre holonomías que especifican una región del espacio [19, 20]. Rovelli [19] expone una perspectiva sobre esta representación, que nos ayuda a tener una imagen del espacio, él propone un espacio formado por “gránulos”, de forma que gránulos adyacentes unidos forman superficies entre ellas y estas superficies son interceptadas por curvas, cada uno de estos gránulos estará etiquetado por un nodo, como se muestra en la Figura 2.1. Bajo esta descripción el *espacio de estados puede ser considerado como una red* formada por curvas y nodos, que además es independiente bajo difeomorfismos.

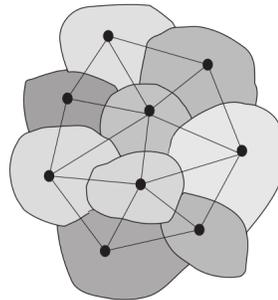


Figura 2.1: Imagen de un espacio granular donde cada nodo especifica un volumen del espacio [19].

### 2.2.3 Vínculo Hamiltoniano

El vínculo Hamiltoniano de LQG es uno de los problemas más discutidos de la teoría. Este viene dado en términos de las variables de Ashtekar por

$$H_{grav}(A_a^i, E_i^a) = \frac{-E_i^a E_j^b \epsilon_k^{ij}}{16\pi G \sqrt{|\det(E_i^c)|}} (F_{ab}^k - (1 + \gamma^{-2}) \epsilon_{mn}^k (A_a^m - \Gamma_a^m)(A_b^n - \Gamma_b^n)) \quad (2.12)$$

donde  $F_{ab}^k$  es la curvatura de la conexión de Ashtekar-Barbero [16].

Existe una posible singularidad al calcular la inversa del determinante de la tríada densitizada, lo cual evita la cuantización directa del vínculo, sin embargo puede ser cuantizado en el límite semi-clásico definiendo una inversa apropiada mediante la identidad clásica

$$\left\{ A_a^i, \int \sqrt{|\det E|} d^3x \right\} \propto \epsilon^{ijk} \epsilon_{abc} \frac{E_j^b E_k^c}{\sqrt{|\det E|}} \quad (2.13)$$

introducida por Thiemann(1988a) [21]. El lado izquierdo de esta expresión involucra las componentes de la conexión, expresadas en términos de holonomías que pueden ser cuantizadas y el volumen espacial, de los cuales se construye el operador volumen cuya cuantización mencionamos anteriormente. De modo que se establece un ingrediente clave en la aplicación de técnicas para encontrar ecuaciones efectivas, ya que se espera que las correcciones cuánticas aparezcan en este vínculo debido a que él incluye toda la dinámica de la teoría.

## 2.3 Cosmología Cuántica a Lazos (LQC)

*Encontrar la solución para el vínculo Hamiltoniano de la teoría completa Gravedad Cuántica a Lazos (LQG) es extremadamente complicado y sigue siendo un problema abierto. Sin embargo, se han estudiado modelos cosmológicos, principalmente los modelos FRW con simetría esférica y plana. Estos modelos heredan todas las características y lineamientos establecidos en la teoría completa. Lo que implica que si queremos ser consistentes con LQG, debemos garantizar que las variables con que escribimos el modelo cosmológico estén dentro de las restricciones impuestas por la formulación de LQG.*

### 2.3.1 Modelo Cosmológico Friedmann-Robertson-Walker (FRW)

El modelo cosmológico FRW describe un universo homogéneo e isotrópico, cuya métrica viene dada por

$$ds^2 = -N(t)^2 dt^2 + a^2(t)((1 - kr^2)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2) \quad (2.14)$$

donde  $N(t)$  es la función lapso,  $a^2(t)$  es el factor de escala y  $k = -1, 0, 1$  establece la geometría del espacio. Las ecuaciones que rigen el universo según este modelo son las ecuaciones de Friedmann dadas por

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G\rho}{3} + \frac{\Lambda}{3} \quad (2.15)$$

$$-3\frac{\ddot{a}}{a} = 4\pi G(\rho + 3p) - \Lambda \quad (2.16)$$

$$\dot{\rho} = -3(\rho + p)\frac{\dot{a}}{a} \quad (2.17)$$

La ecuación (2.15), describe la dinámica del sistema, de manera que podemos escribir un Hamiltoniano  $H(\dot{a}, a)$  con la que podamos establecer una formulación adecuada para cuantizar, pero antes debemos tomar en cuenta un detalle relacionado con los sistemas relativistas, como es la no existencia de un tiempo global.

### 2.3.2 El problema del tiempo

En general, al tratar sistemas relativistas, debemos considerar que no existe una variable temporal global que permita medir la evolución de las demás variables, éste es un problema al que la gravedad cuántica debe hacer frente. Ya que la dinámica de sistemas relativistas es resultado de una teoría covariante y puede ser descrita totalmente en términos de vínculos, no existe un Hamiltoniano único que genere la evolución, de manera que se hace evidente la necesidad de la escogencia de una variable temporal global. La escogencia adecuada de un tiempo interno globalmente válido es complicada [14]. Sin embargo, se puede considerar una variable temporal como un campo escalar sin masa  $\phi$ , que se comporte como un grado de libertad monótonamente creciente, cuya única contribución en el Hamiltoniano del

sistema viene dado por su momento  $p_\phi$ . Obtenemos entonces un sistema desparametrizado que nos permite escribir un *Vínculo Hamiltoniano*  $C = p_\phi^2 - H(a, \dot{a})$  donde  $H(a, \dot{a})$  es el Hamiltoniano del sistema independiente de  $\phi$  y  $p_\phi$ , en términos del factor de escala  $a$  [15], para el modelo FRW plano y sin constante cosmológica. Por simplicidad, podemos escribir el vínculo Hamiltoniano  $C$  como

$$C = -\frac{3}{4\pi G} a \dot{a}^2 + a^{-3} p_\phi^2 = 0 \quad (2.18)$$

de esta ecuación podemos obtener dos posibles soluciones para  $\phi(t)$  dadas por  $\phi(t) = \pm \sqrt{3/4\pi G} \ln(t^{1/3})$  que se muestran en la Figura 2.2. Para que este campo pueda ser utilizado como un tiempo físico debe ser monótonamente creciente, por lo que vamos a elegir la solución representada por la línea sólida.

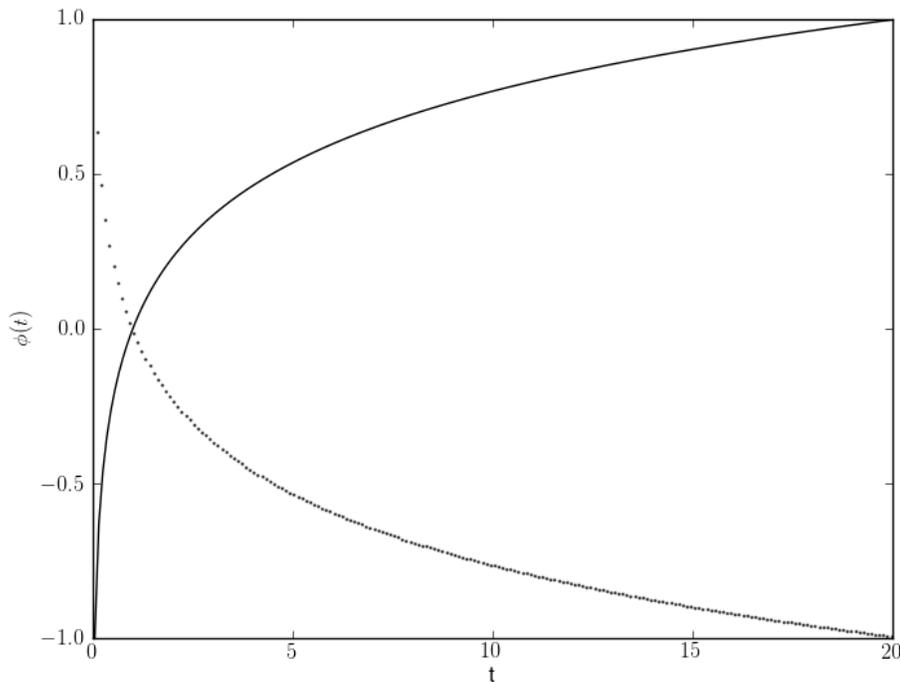


Figura 2.2: Soluciones de la variable temporal global  $\phi$  como función del tiempo  $t$

### 2.3.3 Variables Básicas en LQC

Al restringirnos a un espacio con isotropía y homogeneidad, tanto las variables de Ashtekar como las holonomías y los flujos pueden ser simplificadas enormemente. Las variables de Ashtekar asumiendo isotropía vienen dadas en [16], como

$$A_a^i = c\delta_a^i \quad y \quad E_j^b = p_c\delta_j^b \quad (2.19)$$

donde  $c = \gamma\dot{a}$  y  $|p_c| = a^2$  que son las variables dinámicas del sistema,  $a$  es el factor de escala. El corchete de Poisson de estas variables derivado a partir de la formas simplécticas viene dado por [16]

$$\{c, p_c\} = \frac{8\pi\gamma G}{3} \quad (2.20)$$

Estas variables de Ashtekar específicas dan lugar a formas simples de holonomías y flujos, que pueden ser calculadas de manera explícita

$$h_{e_j}(A_a^i) = \exp(\tau_j\mu c) \quad y \quad F_{S_j}(E_j^b) = \mu^2 p_c \tau_j \quad (2.21)$$

donde  $e_j$  son curvas de longitud  $\mu\ell_P$ , mientras que  $S_j$  son las superficies sobre las que se regularizan los operadores de flujo. De manera que estas curvas y superficies pueden ser representadas en una red de longitud  $\mu\ell_P$ , que captura todos los grados de libertad del modelo cosmológico y que nos permite relacionar este modelo con la teoría completa interpretando esta red, como *la red de estados*.

### 2.3.4 Representación

Ya que en este caso conocemos la forma de los objetos básicos y la información de LQG, donde los estados del espacio de Hilbert dependen sólo de las holonomías, para LQC podemos establecer una representación donde los estados son combinaciones lineales de las holonomías [15], es decir

$$\varphi(c) = \sum_{I \in \mathcal{I} \subset \mathbb{R}, \text{contable}} f_I \exp(i\mu_I c) \quad (2.22)$$

Esto implica que el espacio de Hilbert es no separable y equivalente a  $L^2(d\mu(c), \mathbb{R}_{Bohr})$ , con funciones  $\varphi(c)$  definidas sobre la línea real compactificada de Bohr [15], con un producto interno dado por

$$\int d\mu(c) \varphi(c) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \varphi(c) dc \quad (2.23)$$

la escogencia de este espacio de Hilbert (2.23) implica que  $\hat{c}$  no puede ser asociado a un operador en  $L^2(d\mu(c), \mathbb{R}_{Bohr})$  y debe ser reemplazado por funciones casi periódicas agregando correcciones de orden superior en  $c$  y por lo tanto en la holonomías [15]. Esta representación nos impone restricciones sobre la forma de las variables y modificaciones del vínculo Hamiltoniano del modelo cosmológico que proponemos cuantizar.

### 2.3.5 Hamiltoniano Clásico del Modelo FRW

En las primeras secciones de este capítulo, establecimos las bases de LQG, que son los requerimientos con los que debe cumplir cualquier modelo con simetría reducida que consideremos. Uno de estos requerimientos es considerar un vínculo Hamiltoniano consistente con LQG para cuantizar.

Para resolver el vínculo dado por la ecuación (2.18) consideramos resolver el sistema [15] haciendo

$$p_\phi = \pm \sqrt{\frac{3}{4\pi G}} (a^2 \dot{a}) \quad (2.24)$$

donde  $p_\phi$  actuará como el Hamiltoniano que genera la evolución respecto a  $\phi$ , que es nuestra variable temporal, un tiempo físico. Este modelo es muy particular y por lo general no es usado para hacer predicciones físicas sino para ilustrar las propiedades de la dinámica de la cosmología cuántica, sin embargo con interpretaciones cuidadosas se pueden obtener resultados con implicaciones interesantes [14].

### 2.3.6 Resultados de Bojowald

En general, encontrar soluciones en cosmología cuántica es complicado, aunque se han obtenido resultados para casos especiales como el espacio isotrópico y plano para el que construimos (2.24). La forma del Hamiltoniano sugiere que puede manejarse como el oscilador armónico en mecánica cuántica. Pero la naturaleza cuadrática del mismo requiere el reemplazo de las variables por unas acordes a LQG. Bojowald [15, 16], propone el cambio

de las variables dinámicas por  $c = \gamma\dot{a}$  y  $p_c = a^2$ , cuyo corchete de Poisson está dado por (2.20), de forma que (2.24) es reescrito como

$$p_\phi = \pm \sqrt{\frac{3}{4\pi G\gamma}} |cp_c| \quad (2.25)$$

pero para cuantizar de forma consistente con LQC, la forma de las holonomías y el espacio de Hilbert de LQC, requieren funciones casi periódicas de las variables. Es claro que cualquier función casi periódica es una posible elección, sin embargo, Bojowald ha realizado varios trabajos reemplazando  $c \rightarrow \sin(\mu c)/\mu$ , con  $\mu$  un parámetro real, que implica correcciones al Hamiltoniano. En [16], Bojowald considera unas nuevas variables

$$V = \frac{3p^{1-x}}{8\pi\gamma G(1-x)} \quad y \quad J = V \exp(i\mu p^x c) \quad (2.26)$$

con las cuales se establece un álgebra cerrada no canónica. De forma que el operador Hamiltoniano [16] esta dado por

$$\hat{p}_\phi = \pm \sqrt{\frac{4\pi G}{3}} (1-x) \left| \frac{\hat{J} - \hat{J}^\dagger}{i\mu} \right| \quad (2.27)$$

con el cual se encuentra un Hamiltoniano Cuántico lineal, cuya soluciones son

$$\langle \hat{V} \rangle (\phi) = A \exp(C\phi) + B \exp(-C\phi) \quad (2.28)$$

$$\langle \hat{J} \rangle (\phi) = A \exp(C\phi) + B \exp(-C\phi) + \frac{i\mu}{C} p_\phi \quad (2.29)$$

donde  $C = \pm 2\sqrt{4\pi G/3}(1-x)$ . A y B son constantes de integración.

Las condiciones de realidad establecidas en el régimen semiclásico dan lugar a que podamos escribir  $\langle \hat{V} \rangle (\phi) \propto \cosh(C(\phi - \phi_0))$  el cual nunca es cero. Esto implica que al hacer la regularización de la variable  $c$  para que sea compatible con la forma de las holonomías, es decir,  $c \rightarrow \sin(\mu c)/\mu$ , en este modelo se reemplaza la singularidad clásica al inicio del universo, conocida como Big Bang, por un *rebote*. Evidentemente, los resultados obtenidos dependen directamente de la elección que se haga para sustituir  $\hat{c}$ .

# Capítulo 3

## Ecuaciones Efectivas LQC-Campo Escalar

*Según los resultados de Bojowald, la elección de las holonomías como variables fundamentales que regularizan las ecuaciones de la relatividad general, es crucial para obtener una descripción efectiva que no involucre infinitos en los modelos de LQC. Continuando con el modelo FRW plano y con la elección de Bojowald,  $c \rightarrow \sin(\mu c)/\mu$  con  $\mu$  un parámetro real pequeño, nos proponemos encontrar una solución para este modelo haciendo uso de un tratamiento considerablemente distinto, es decir, aplicando las técnicas para obtener ecuaciones efectivas del Capítulo 1.*

### 3.1 Modelo FRW Clásico

Hemos establecido el vínculo Hamiltoniano del modelo FRW plano (2.18). De la ecuación obtenida logramos determinar  $\phi(t)$ , como una función monótonamente creciente que puede ser usada para medir los cambios en el tiempo. Además, podemos obtener la evolución del factor de escala  $a(t)$ , como se muestra en la Figura 3.1, cuya dependencia es proporcional a  $t^{1/3}$ .

Aquí observamos un universo que está en expansión y en cuyo origen hay una singularidad como es común en los modelos FRW clásicos. Por otra parte, combinando  $\phi(t)$  y  $a(t)$  podemos describir la evolución del factor de escala en términos del tiempo físico  $\phi$ . Graficamos  $a(\phi)$  en la Figura 3.2, en este caso mostramos las dos soluciones posibles, es decir,  $a(\phi) = e^{\pm\sqrt{(4\pi G/3)}\phi}$ , observamos un universo en expansión para todo  $\phi$  (línea sólida) y otro

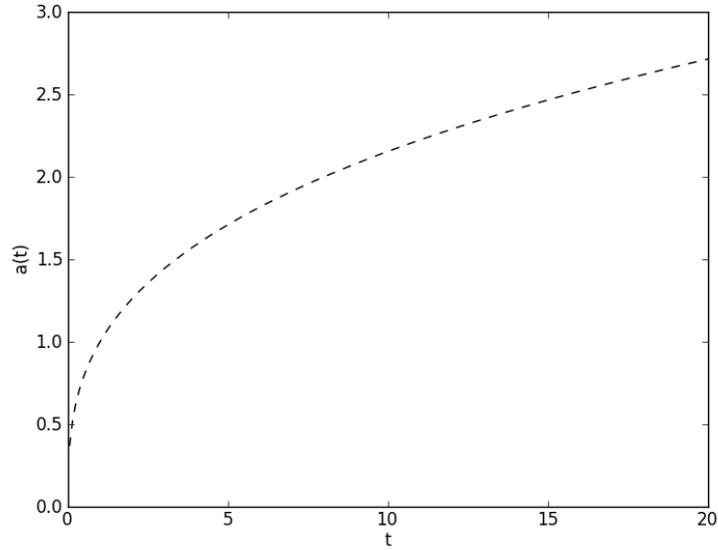


Figura 3.1: Evolución del factor de escala  $a(t)$  clásica

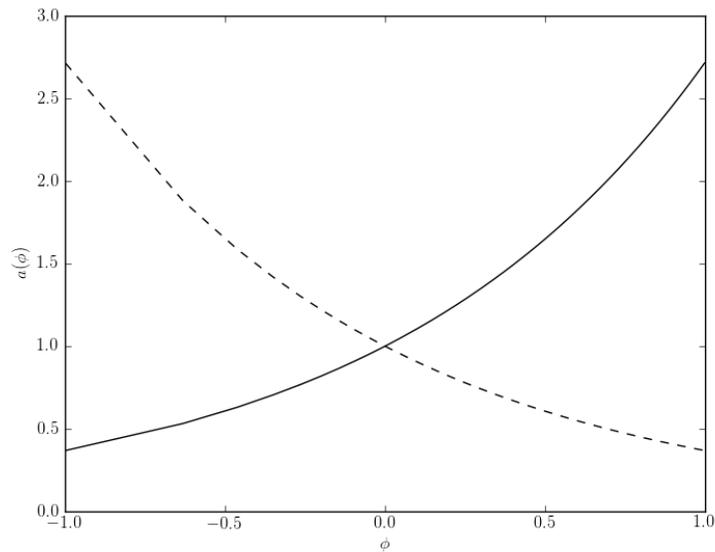


Figura 3.2: Evolución del factor de escala  $a(\phi)$  clásica

universo en contracción (línea punteada).

### 3.1.1 Hamiltoniano Clásico

En LQC vimos que el Hamiltoniano dado por la ecuación (2.24) puede ser escrito en términos de  $c = \dot{a}$  y  $p_c = a^2$  como

$$p_\phi = \pm \sqrt{\frac{3}{4\pi G}} c p_c \quad (3.1)$$

de forma análoga a Bojowald hacemos el cambio de  $c \rightarrow \sin(\mu c)/\mu$  y llamamos  $N = \pm \sqrt{3/(4\pi G)}/2\mu$ , podemos escribir el Hamiltoniano como

$$p_\phi = \frac{N}{i} p_c e^{-i\mu c} \left( (e^{i\mu c})^2 - 1 \right) \quad (3.2)$$

Renombramos  $q = e^{i\mu c}$  y  $p = p_c e^{-i\mu c}$  y escribimos el *Hamiltoniano clásico* como

$$p_\phi = \frac{N}{i} p (q^2 - 1) \quad (3.3)$$

de manera que esta expresión es compatible con LQC. Es este Hamiltoniano el que nos propondremos cuantizar de forma que podamos establecer el límite semi-clásico y las consecuencias de las correcciones cuánticas.

## 3.2 Cuantización del Hamiltoniano

Como vimos en el Capítulo 1, una vez que hemos construido el Hamiltoniano clásico (3.3) debemos establecer el Hamiltoniano que describe el sistema cuantizado. Para tal efecto, siguiendo la expansión en (1.17) debemos calcular el valor medio del operador  $p_\phi$  y así obtener el Hamiltoniano Cuántico.

Primeramente, es necesario introducir los grados de libertad cuánticos  $G^{a,b}$  y establecer algunos aspectos de las variables básicas que elegimos.

### 3.2.1 Álgebra de las Variables Básicas

Para comenzar vamos a establecer los operadores básicos  $\hat{q}$  y  $\hat{p}$  de la siguiente forma

$$\hat{q} = \widehat{\exp(i\mu c)} \quad y \quad \hat{p} = [\hat{p}_c, \widehat{\exp(-i\mu c)}]_+ \quad (3.4)$$

notemos que estos operadores no son autoadjuntos, son complejos y su conmutador es  $[\hat{q}, \hat{p}] = -\mu\ell_p^2\gamma/3$ , por su definición  $\hat{q}$  es unitario. Recordemos que  $\ell_p$  es la longitud de Planck proporcional a  $\hbar^{1/2}$  y  $\gamma$  es el parámetro de Barbero-Immirzi. Escribimos el operador  $\hat{p}_\phi$  como

$$\hat{p}_\phi = -iN(\hat{p}^\dagger - \hat{p}) \quad (3.5)$$

Se puede demostrar que el operador adjunto de  $\hat{p}$  puede ser escrito como  $\hat{p}^\dagger = [\hat{q}, [\hat{q}, \hat{p}]_+]_+$ , esta simetrización del operador  $\hat{p}_\phi$  nos permite definir los grados de libertad cuánticos una vez calculemos el Hamiltoniano cuántico.

*En adelante nos referiremos a los valores medios de los operadores básicos (3.4) como  $q = \langle \hat{q} \rangle$  y  $p = \langle \hat{p} \rangle$ , se puede calcular el Corchete de Poisson entre  $q$  y  $p$  considerando la definición*

$$\{q, p\} = \frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{q}, \hat{p}] \rangle = \frac{i\mu\kappa\gamma}{3} \quad (3.6)$$

donde  $\kappa = 8\pi G$ . Es importante resaltar que en el modelo cuántico, las variables  $q$  y  $p$  no son las variables clásicas sino funcionales de la función de onda.

### 3.2.2 Hamiltoniano Cuántico

Ya que hemos definido el operador Hamiltoniano  $\hat{p}_\phi$  dado por (3.5), calculamos el Hamiltoniano cuántico como el valor esperado del Hamiltoniano clásico

$$H_Q = \langle \hat{p}_\phi \rangle = -iN(\langle [\hat{q}, [\hat{q}, \hat{p}]_+]_+ \rangle - \langle \hat{p} \rangle) \quad (3.7)$$

Introducimos los grados de libertad cuánticos adicionales necesarios para encontrar las ecuaciones efectivas, sustituyendo en (3.7)

$$\langle [\hat{q}, [\hat{q}, \hat{p}]_+]_+ \rangle = \left\langle [(q + \Delta q), [q + \Delta q, p + \Delta p]_+]_+ \right\rangle \quad (3.8)$$

Obteniendo

$$H_Q = -iN \left( q^2 p + 2q \langle [\hat{\Delta}q, \hat{\Delta}p]_+ \rangle + p \langle [\hat{\Delta}q, \hat{\Delta}q]_+ \rangle + \langle [\hat{\Delta}q, [\hat{\Delta}q, \hat{\Delta}p]_+]_+ \rangle - p \right) \quad (3.9)$$

Definimos los momentos o grados de libertad cuánticos como

$$G^{qq} = \langle [\hat{\Delta}q, \hat{\Delta}q]_+ \rangle \quad (3.10)$$

$$G^{qp} = \langle [\hat{\Delta}q, \hat{\Delta}p]_+ \rangle \quad (3.11)$$

$$G^{qqp} = \langle [\hat{\Delta}q, [\hat{\Delta}q, \hat{\Delta}p]_+]_+ \rangle \quad (3.12)$$

de manera que el Hamiltoniano Cuántico con el que vamos a generar las ecuaciones de movimiento, viene dado por

$$H_Q = -iN \left( (q^2 - 1)p + 2qG^{qp} + pG^{qq} + G^{qqp} \right) \quad (3.13)$$

en este Hamiltoniano cuántico podemos identificar primer término como el Hamiltoniano clásico dado por (3.3) y los siguientes son perturbaciones o correcciones de orden  $\ell_p^2$  y  $\ell_p^3$  que como hemos mencionado son proporcionales a potencias de  $\hbar^{1/2}$ .

### 3.3 Ecuaciones de Movimiento

Las ecuaciones de movimiento son generadas por el Hamiltoniano cuántico (1.18), por lo que las ecuaciones de movimiento de las variables  $q$  y  $p$  resultantes son

$$\dot{q} = \{q, H_Q\}_Q = \frac{N\mu k\gamma}{3} (q^2 - 1 + G^{qq}) \quad (3.14)$$

$$\dot{p} = -\{p, H_Q\}_Q = -\frac{2N\mu k\gamma}{3} (qp + G^{qp}) \quad (3.15)$$

donde aplicamos las ecuaciones de Hamilton considerando el corchete de Poisson (3.6). En las ecuaciones (3.14, 3.15) observamos que existen correcciones cuánticas tanto en  $\dot{q}$  como en  $\dot{p}$ . Por otra parte, recordemos que las ecuaciones de movimiento de los momentos se obtienen mediante

$$\dot{G}^{a,b} = \{G^{a,b}, H_Q\}_Q$$

por lo que necesitamos calcular el corchete de Poisson adecuado para estos momentos, en este caso viene dado por

$$\{G^{a,b}, G^{c,d}\} = \frac{i\mu k\gamma}{3} \left( bcG^{a,b-1}G^{c-1,d} - adG^{a-1,b}G^{c,d-1} + \frac{1}{2} \sum_{r,s} \frac{a!b!c!d!((-1)^s - (-1)^r)}{r!s!(a-r)!(b-s)!(c-s)!(d-r)!} \left(\frac{\mu\gamma\ell_p^2}{6}\right)^{r+s-1} G^{a+c-r-s,b+d-r-s} \right) \quad (3.16)$$

con  $0 \leq r \leq \min(a, d)$  y  $0 \leq s \leq \min(c, b)$ .

En particular consideraremos  $a + b = 2$ , con lo que se generan las ecuaciones de movimiento para los momentos

$$\dot{G}^{qq} = 2\frac{N\mu k\gamma}{3}(2qG^{qq} + G^{qqq}) \quad (3.17)$$

$$\dot{G}^{qp} = -\frac{N\mu k\gamma}{3}(2pG^{qq} + G^{qpp}) \quad (3.18)$$

$$\dot{G}^{pp} = -4\frac{N\mu k\gamma}{3}(qG^{pp} + pG^{qp} + G^{ppp}) \quad (3.19)$$

Aquí tenemos un sistema de ecuaciones acoplado con correcciones de orden  $\ell_p^2$ , dadas principalmente por  $G^{qq}$ ,  $G^{qp}$  y  $G^{pp}$  y de orden  $\ell_p^3$  dadas por  $G^{qqq}$ ,  $G^{qpp}$  y  $G^{ppp}$ .

En este trabajo vamos a definir un sistema efectivo que incluya las correcciones de primer orden en el comportamiento clásico, es decir, vamos a mantener los términos de orden  $\ell_p^2$ . Para obtenerlos hacemos una expansión de las variables cuánticas en potencias de  $\ell_p^2$  que es el parámetro natural para cosmología cuántica.

Proponemos la expansión perturbativa de los momentos de forma que  $G^{a,b} = \sum_r \ell_p^{r+a+b} G_r^{a,b}$ , y para nuestro sistema de ecuaciones tendremos

$$\dot{q} = \frac{N\mu k\gamma}{3}(q^2 - 1 + \ell_p^2 G_0^{qq} + \ell_p^3 G_1^{qq} + \dots)$$

$$\dot{p} = -\frac{N\mu k\gamma}{3}(2qp + 2\ell_p^2 G_0^{qp} + 2\ell_p^3 G_1^{qp} + \dots)$$

$$\ell_p^2 \dot{G}_0^{qq} + \ell_p^3 \dot{G}_1^{qq} + \dots = \frac{2N\mu k\gamma}{3}(2q(\ell_p^2 G_0^{qq} + \ell_p^3 G_1^{qq} + \dots) + \ell_p^3 G_0^{qqq} + \ell_p^4 G_1^{qqq} + \dots)$$

$$\ell_p^2 \dot{G}_0^{qp} + \ell_p^3 \dot{G}_1^{qp} + \dots = -\frac{N\mu k\gamma}{3} (2p(\ell_p^2 G_0^{qq} + \ell_p^3 G_1^{qq} + \dots) + \ell_p^3 G_0^{qqp} + \ell_p^4 G_1^{qqp} + \dots)$$

$$\ell_p^2 \dot{G}_0^{pp} + \ell_p^3 \dot{G}_1^{pp} + \dots = \frac{-4N\mu k\gamma}{3} (q(\ell_p^2 G_0^{pp} + \ell_p^3 G_1^{pp} + \dots) + p(\ell_p^2 G_0^{qp} + \ell_p^3 G_1^{qp} + \dots) + \ell_p^3 G_0^{qqp} + \dots)$$

Manteniendo los términos a orden cero para cada una de las ecuaciones de movimiento, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\dot{q} = \frac{N\mu k\gamma}{3} (q^2 - 1 + G_0^{qq}) \quad (3.20)$$

$$\dot{p} = -\frac{2N\mu k\gamma}{3} (qp + G_0^{qp}) \quad (3.21)$$

$$\dot{G}_0^{qq} = 4 \frac{N\mu k\gamma}{3} q G_0^{qq} \quad (3.22)$$

$$\dot{G}_0^{qp} = -2 \frac{N\mu k\gamma}{3} p G_0^{qp} \quad (3.23)$$

$$\dot{G}_0^{pp} = -4 \frac{N\mu k\gamma}{3} (q G_0^{pp} + p G_0^{qp}) \quad (3.24)$$

Debido a que existen correcciones tanto en  $\dot{q}$  como en  $\dot{p}$ , nos enfocaremos primero en encontrar la solución de las ecuaciones de movimiento de los momentos, ya que  $q$  y  $p$  son las cantidades que podemos asociar a cantidades clásicas y que son las que finalmente darán cuenta de las correcciones cuánticas.

Para encontrar solución a las ecuaciones, restringimos la dinámica de los momentos a un subespacio parametrizado por  $q$  y  $p$ , esto lo hacemos reemplazando

$$\frac{d}{d\phi} = \dot{q} \frac{\partial}{\partial q} + \dot{p} \frac{\partial}{\partial p} \quad (3.25)$$

en cada una de las ecuaciones en (3.22, 3.23 y 3.24), se convierte en un sistema de ecuaciones diferenciales parciales de primer orden, para el que podemos calcular las curvas características  $H = (q^2 - 1)p$  y proponemos que la otra

variable sea  $q$ . Obtenemos para cada una de las ecuaciones de los momentos, una ecuación diferencial cuya solución fue calculada y están dadas por

$$G_0^{qq} = A(H)(q^2 - 1)^2 \quad (3.26)$$

$$G_0^{qp} = -2A(H)qH + B(H) \quad (3.27)$$

$$G_0^{pp} = \frac{C(H)}{(q^2 - 1)} + \frac{4q^2 H^2 A(H)}{(q^2 - 1)^2} - \frac{4qHB(H)}{(q^2 - 1)^2} \quad (3.28)$$

donde  $A(H)$ ,  $B(H)$  y  $C(H)$  son constantes de integración, que debemos determinar. Como habíamos mencionado en el Capítulo 1, los momentos cuánticos no son arbitrarios y deben satisfacer un principio de incertidumbre, pero además cumplen con la identidad de Jacobi, de manera que podemos utilizar estas dos características para obtener información sobre las funciones y establecer los momentos.

### 3.3.1 Identidad de Jacobi

Luego de haber encontrado la solución de las ecuaciones de movimiento de las correcciones cuánticas a orden  $\ell_p^2$ , podemos pensar que estas ecuaciones son el resultado de un Hamiltoniano Efectivo  $H_{ef}$ , ya que hemos descartado algunas contribuciones en el Hamiltoniano Cuántico (3.13). En este sentido, podemos suponer que existen ecuaciones de movimiento generadas de la siguiente forma  $\dot{p} = \{p, H_{ef}\}_{ef}$  y  $\dot{q} = \{q, H_{ef}\}_{ef}$ , si ahora escribimos la identidad de Jacobi para  $q$ ,  $p$  y  $H_{ef}(q, p, G_b^a)$

$$\left\{ q, \{p, H_{ef}\}_{ef} \right\}_{ef} + \left\{ H_{ef}, \{q, p\}_{ef} \right\}_{ef} + \left\{ p, \{H_{ef}, q\}_{ef} \right\}_{ef} = 0 \quad (3.29)$$

donde el subíndice  $ef$  significa que se trata de un *Corchete de Poisson Efectivo*, que resulta de evaluar la estructura simpléctica del espacio de fase cuántico en un subespacio que tiene la misma dimensión que el espacio clásico, lo cual introduce correcciones al corchete de Poisson (3.6) de las variables  $q$  y  $p$

$$\{q, p\} = \frac{i\mu k\gamma}{3}(1 + \epsilon) \quad (3.30)$$

donde  $\epsilon$  es la corrección, que puede ser determinada haciendo coincidir las ecuaciones generadas por el Hamiltoniano cuántico antes de la evaluación con las ecuaciones efectivas.

En el caso de las ecuaciones cuánticas de  $\dot{q}$  y  $\dot{p}$ , hemos establecido que  $\epsilon = 0$ , para que las ecuaciones efectivas coincidan. En consecuencia, el segundo término en la identidad de Jacobi es cero ya que el corchete de Poisson de  $q$  y  $p$  es constante y tenemos  $\left\{q, \{p, H_{ef}\}_{ef}\right\}_{ef} = \left\{p, \{q, H_{ef}\}_{ef}\right\}_{ef}$  ó  $\{q, \dot{p}\}_{ef} = \{p, \dot{q}\}_{ef}$ , sustituyendo  $\dot{p}$  y  $\dot{q}$  respectivamente, tenemos

$$-2\{q, qp\} - 2\{q, B(H)\} + 4\{q, A(H)qp(q^2 - 1)\} = \{p, q^2\} + \{p, A(H)(q^2 - 1)^2\} \quad (3.31)$$

Donde obtenemos

$$-\frac{dB(H)}{dH} = 0 \quad y \quad 4qA(H) = -3qH \frac{dA(H)}{dH} \quad (3.32)$$

Resolviendo las ecuaciones diferenciales obtenemos que  $B(H) = b$  y  $A(H) = a/H^{4/3}$ , donde  $a$  y  $b$  son constantes, en principio complejas que debemos determinar y además nos queda por determinar  $C(H)$ .

### 3.3.2 Relación de Incertidumbre

Puesto que estamos buscando los estados coherentes del sistema, que nos proporcionan la desviación mínima del comportamiento clásico, es necesario saturar la desigualdad del principio de incertidumbre. Hemos derivado la relación de incertidumbre de manera general para infinitos grados de libertad a partir de la desigualdad de Schwarz donde tomamos en cuenta la característica compleja de las variables del modelo. Partiendo de

$$\left| (\alpha_i \Delta \hat{X}^i + \beta_j \Delta \hat{X}^{\bar{j}}) |\Psi\rangle \right|^2 \geq 0$$

O de forma equivalente

$$\langle (\alpha_i \Delta \hat{X}^i + \beta_j \Delta \hat{X}^{\bar{j}}) (\alpha_{\bar{i}} \Delta \hat{X}^{\bar{i}} + \beta_j \Delta \hat{X}^j) \rangle \geq 0 \quad (3.33)$$

escribimos

$$\alpha_i \Lambda^{\bar{i}} \alpha_{\bar{i}} + \alpha_i \Lambda^{ij} \beta_j + \beta_j \Lambda^{\bar{i}} \alpha_{\bar{i}} + \beta_j \Lambda^{\bar{j}} \beta_j \geq 0 \quad (3.34)$$

Donde hemos definido las matrices  $\Lambda^{ij} = \langle \Delta \hat{X}^i \Delta \hat{X}^j \rangle$ ,  $\Lambda^{\bar{i}\bar{j}} = \langle \Delta \hat{X}^i (\Delta \hat{X}^j)^\dagger \rangle$  con cualquier combinación de  $i$  y  $j$  y sus adjuntos. Minimizamos respecto a  $\beta_k$  y  $\beta_{\bar{k}}$ , de manera que las constantes  $\alpha_i$  y  $\alpha_{\bar{i}}$  se pueden escribir en términos de  $\beta_k$  y  $\beta_{\bar{k}}$  y de las inversas apropiadas de las matrices, para obtener

$$\beta_{\bar{j}} \beta_j \Lambda^{\bar{j}k} (\epsilon_{km} (\Lambda^T)^{ml} \epsilon_{li} \Lambda^{\bar{i}\bar{m}} (\Lambda^T)^{\bar{m}\bar{l}} \epsilon_{\bar{l}\bar{k}} \Lambda^{\bar{k}j} - \delta_k^j \det(\Lambda^{ik}) \det(\Lambda^{\bar{i}\bar{k}})) \geq 0 \quad (3.35)$$

Para saturar el principio de incertidumbre nos basta con resolver

$$\det[\epsilon_{km} (\Lambda^T)^{ml} \epsilon_{li} \Lambda^{\bar{i}\bar{m}} (\Lambda^T)^{\bar{m}\bar{l}} \epsilon_{\bar{l}\bar{k}} \Lambda^{\bar{k}j} - \delta_k^j \det(\Lambda^{ik}) \det(\Lambda^{\bar{i}\bar{k}})] = 0 \quad (3.36)$$

Debemos escribir la expresión en términos de las variables del sistema  $q$ ,  $p$ ,  $G_0^{qq}$ ,  $G_0^{qp}$  y  $G_0^{pp}$  para esto construimos cada una de las matrices  $\Lambda^{ij}$ , de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \Lambda^{ij} &= \langle \Delta \hat{X}^i \Delta \hat{X}^j \rangle = \langle [\Delta \hat{X}^i, \Delta \hat{X}^j]_+ \rangle + \frac{1}{2} \langle [\Delta \hat{X}^i, \Delta \hat{X}^j] \rangle \\ \Lambda^{ij} &= G^{ij} - \frac{\mu\gamma\ell_p^2 \epsilon^{ij}}{6} = \begin{pmatrix} G_0^{qq} & G_0^{qp} - \frac{\mu\gamma\ell_p^2}{6} \\ G_0^{qp} + \frac{\mu\gamma\ell_p^2}{6} & G_0^{pp} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} \Lambda^{\bar{i}\bar{j}} &= \langle \Delta \hat{X}^{\bar{i}} \Delta \hat{X}^{\bar{j}} \rangle = \overline{G^{ij}} - \frac{\mu\gamma\ell_p^2 \epsilon^{\bar{i}\bar{j}}}{6} \\ \Lambda^{\bar{i}\bar{j}} &= \begin{pmatrix} \overline{G_0^{qq}} & \overline{G_0^{qp}} - \frac{\mu\gamma\ell_p^2}{6} \\ \overline{G_0^{qp}} + \frac{\mu\gamma\ell_p^2}{6} & \overline{G_0^{pp}} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\Lambda^{\bar{i}\bar{i}} = \langle \Delta \hat{X}^i \Delta \hat{X}^{\bar{i}} \rangle = \begin{pmatrix} \langle \Delta \hat{q} \Delta \hat{q}^\dagger \rangle & \langle \Delta \hat{q} \Delta \hat{p}^\dagger \rangle \\ \langle \Delta \hat{p} \Delta \hat{q}^\dagger \rangle & \langle \Delta \hat{p} \Delta \hat{p}^\dagger \rangle \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

$$\Lambda^{\bar{i}\bar{i}} = \begin{pmatrix} 1 - |q|^2 & q^2 G_0^{qp} + 2qp G_0^{qq} - \frac{\mu\gamma\ell_p^2}{6} q^2 \\ q^2 \overline{G_0^{qp}} + 2\bar{q}\bar{p} \overline{G_0^{qq}} - \frac{\mu\gamma\ell_p^2}{6} q^2 & q^2 G_0^{pp} + 2qp G_0^{qp} - \frac{\mu\gamma\ell_p^2}{3} qp \end{pmatrix}$$

$$\Lambda^{\bar{k}j} = \langle \Delta \hat{X}^{\bar{k}} \Delta \hat{X}^j \rangle = \begin{pmatrix} \langle \Delta \hat{q}^\dagger \Delta \hat{q} \rangle & \langle \Delta \hat{q}^\dagger \Delta \hat{p} \rangle \\ \langle \Delta \hat{p}^\dagger \Delta \hat{q} \rangle & \langle \Delta \hat{p}^\dagger \Delta \hat{p} \rangle \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

$$\Lambda^{\bar{k}j} = \begin{pmatrix} 1 - |q|^2 & \bar{q}^2 \overline{G_0^{qp}} + 2\bar{q}\bar{p} \overline{G_0^{qq}} + \frac{\mu\gamma\ell_p^2}{6} \bar{q}^2 \\ q^2 G_0^{qp} + 2qp G_0^{qq} + \frac{\mu\gamma\ell_p^2}{6} q^2 & q^2 G_0^{pp} + 2qp G_0^{qp} - \frac{\mu\gamma\ell_p^2}{3} qp \end{pmatrix}$$

Lo que sigue es sustituir en la expresión (3.36) cada una de estas matrices y los momentos cuánticos, para encontrar relaciones entre las funciones  $A(H)$ ,  $B(H)$  y  $C(H)$ . Dado lo extenso de este producto se utilizó el Programa de Manipulación Algebraica MAPLE. A continuación se describe el proceso a seguir

1. Definir las variables necesarias.
  - Recordando que  $H = (q^2 - 1)p$  de donde podemos escribir  $p$  como función de  $H$  y  $q$ .
  - Usamos la información obtenida de la identidad de Jacobi, es decir,  $A(H) = a/H^{4/3}$  y  $B(H) = b$
2. Escribimos las soluciones que encontramos de los momentos y sus conjugados.
3. Definimos cada una de las matrices  $\Lambda$  y sus conjugados.
4. Escribimos la expresión (3.36) para saturar el principio de incertidumbre y factorizamos.

Una de las soluciones encontradas es

$$\frac{a}{H^{4/3}}C(H) - b^2 + \frac{\mu^2\gamma^2\ell_p^4}{6^2} = 0 \quad (3.41)$$

Si bien logramos saturar la relación de incertidumbre, aún no hemos determinado el valor de  $a$  y  $b$  que necesitamos para establecer las correcciones que encontramos en las ecuaciones de movimiento de las variables  $\dot{q}$  y  $\dot{p}$ .

Por otro lado la relación de incertidumbre (3.34) no sólo puede ser minimizada respecto a  $\beta_j$  y  $\beta_{\bar{j}}$ , sino que de forma análoga se puede minimizar respecto a  $\alpha_i$  y  $\alpha_{\bar{i}}$ . Al realizar esto encontraremos una nueva relación de incertidumbre que debe ser saturada.

Entonces haciendo uso de la información obtenida de la identidad de Jacobi y la relación entre las funciones  $A$ ,  $B$  y  $C$ , obtenemos

$$\beta^{\bar{j}}\beta^j \left( \Lambda^{\bar{j}j} \det(\Lambda^{k\bar{i}}) - \Lambda^{\bar{j}k} \epsilon_{\bar{i}l} (\Lambda^T)^{\bar{l}m} \epsilon_{mk} \Lambda^{kj} \right) \geq 0 \quad (3.42)$$

Hacemos uso de las matrices que construimos y que son necesarias para sustituir en esta expresión, además con la solución que encontramos

anteriormente podemos saturar el principio de incertidumbre. De nuevo por lo extenso del producto utilizamos el Programa de Manipulación Algebraica MAPLE y seguimos el mismo procedimiento de la vez anterior. Esta vez obtuvimos un polinomio de  $H$  y para lograr saturar la expresión asumimos  $a \in \mathbb{R}$  y  $|q|^2 = 1$  ó  $q = e^{i\mu c}$ , los valores de  $a$  y  $b$  que saturan este principio de incertidumbre son  $a = 0$  y  $b = \frac{\mu\gamma\ell_p^2}{6}$ .

### 3.4 Ecuaciones Efectivas

Hemos establecido los valores de  $a$  y  $b$  que saturan el principio de incertidumbre, lo que nos permite escribir las primeras correcciones cuánticas que modifican las ecuaciones de movimiento del sistema. Éstas vienen dadas por

$$G_0^{qq} = 0 \quad (3.43)$$

$$G_0^{qp} = \frac{\mu\gamma\ell_p^2}{6} \quad (3.44)$$

de manera que las ecuaciones de movimiento de  $\dot{q}$  y  $\dot{p}$ , son

$$\dot{q} = \frac{N\mu k\gamma}{3}(q^2 - 1) \quad (3.45)$$

$$\dot{p} = -2\frac{N\mu k\gamma}{3}\left(qp + \frac{\mu\gamma\ell_p^2}{6}\right) \quad (3.46)$$

estas ecuaciones describen las correcciones cuánticas al modelo de Friedmann-Robertson-Walker homogéneo e isotrópico. Aun cuando podemos encontrar la solución de estas dos ecuaciones diferenciales, nos concentraremos en la solución de  $q$  que viene dada por

$$q(\phi) = -\tanh\left(\frac{N\mu k\gamma}{3}\phi + i\frac{\pi}{4}\right) \quad (3.47)$$

a la cual llegamos utilizando las condiciones que exigimos para saturar el principio de incertidumbre, es decir, que  $q = e^{i\mu c}$ , de forma que  $|q|^2 = 1$ . Adicionalmente vamos a considerar un orden más en las correcciones de  $G_0^{qq}$  haciendo una expansión en serie de Taylor de la ecuación (3.47), asumiendo

$q(\phi) = -\tanh\left(\frac{2N\mu\kappa\gamma}{3}\phi + i\pi/4 + ik\ell_p^2\right)$ , en este caso  $|q|^2 \neq 1$ . La razón por la cual hemos realizado esta expansión en  $q$ , es que al cuantizar el modelo FRW plano la cantidad que necesitamos conocer es el factor de escala  $a^2(\phi)$  corregido y debemos exigir que éste sea real. En este sentido, habíamos definido  $p_c = a^2$  y por condiciones de realidad decimos que  $p_c = qp$ . Ahora podemos encontrar el factor de escala corregido como función de  $q(\phi)$  haciendo

$$\dot{p}_c = \frac{dp_c}{dq}\dot{q} = \dot{q}p + \dot{p}q \quad (3.48)$$

de donde obtenemos la ecuación diferencial

$$\frac{dp_c}{dq} + \frac{q^2 + 1}{q^2 - 1} \frac{p_c}{q} = -\frac{\mu\gamma\ell_p^2}{6}q \quad (3.49)$$

cuya solución es

$$p_c = \frac{(K_a q(\phi) - \frac{\mu\gamma\ell_p^2}{6}q^2(\phi))}{q^2(\phi) - 1} \quad (3.50)$$

donde  $K_a$  es la constante de integración que debemos determinar, con este fin se puede demostrar que la solución puede ser escrita como

$$p_c = \frac{\mu\gamma\ell_p^2|q|^2}{6(1 - |q|^2)} \quad (3.51)$$

igualando las ecuaciones, encontramos que a orden cero en  $\ell_p^2$ ,  $K_a = 0$  y para el siguiente orden  $K_a$  es válido para todo  $k \in \mathbb{R} \neq 0$ . Finalmente obtenemos el factor de escala en términos de  $\phi$

$$a^2(\phi) = \frac{\mu\gamma}{6|k|} \left( \cosh\left(\frac{2N\mu\kappa\gamma}{3}\phi\right) - |k|\ell_p^2 \right) \quad (3.52)$$

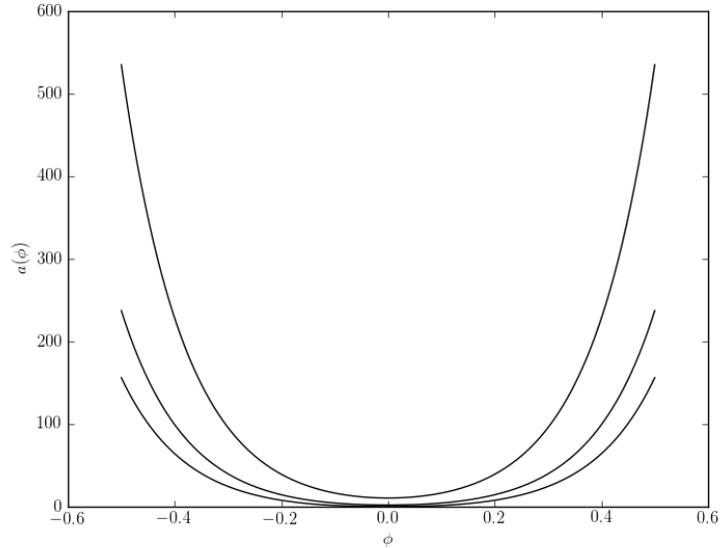


Figura 3.3: Evolución de  $a^2(\phi)$  corregido

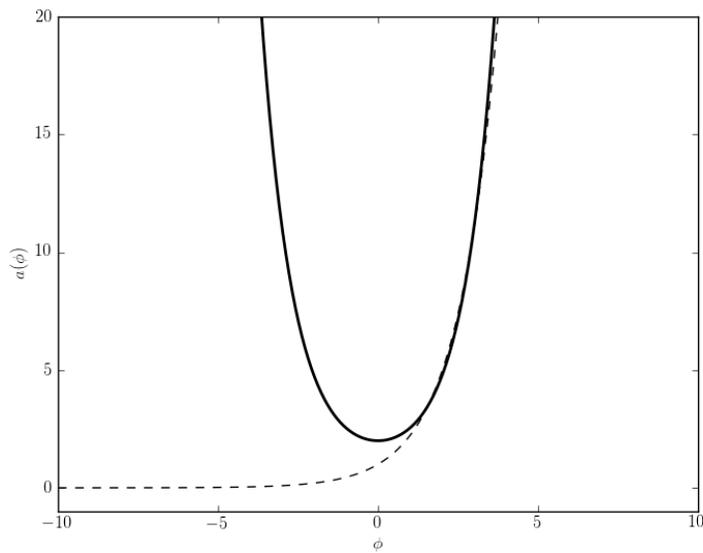


Figura 3.4: Evolución de  $a^2(\phi)$  corregido (Sólida) y clásico (Punteada)

De manera que la solución para el factor de escala corregido viene dado por (3.52) y su evolución se muestra en la Figura 3.3 para tres valores de  $k$ . Una de las ventajas que ofrece esta cuantización del modelo FRW es que podemos comprobar si el modelo cuantizado tiende al modelo clásico a gran escala esto se muestra en la Figura 3.4, tenemos que la línea sólida es el factor de escala corregido (3.52) para un valor de  $k$ , mientras que la línea punteada representa el universo clásico que evolucionan como  $e^\phi$ , descrito en la Figura 3.4, es evidente que para  $\phi$  grande son semejantes, mientras que para  $\phi \rightarrow 0$  observamos que clásicamente tendríamos un universo o el otro, en el caso cuántico es la evolución de un mismo universo y es claro el rebote que elimina la singularidad clásica al inicio del universo.

### 3.4.1 Hamiltoniano Efectivo

Las ecuaciones de movimiento que establecimos para el modelo son resultado de un Hamiltoniano Efectivo. Este Hamiltoniano Efectivo es consecuencia de no haber considerado las correcciones de orden superior en  $\ell_p^2$  en el Hamiltoniano Cuántico. Al haber establecido las condiciones de realidad tanto en las ecuaciones de movimiento como en el factor de escala corregido podemos escribir el Hamiltoniano Efectivo real partiendo de las ecuaciones de movimiento, obteniendo

$$H_{ef} = \sqrt{\frac{3}{4\pi G}} \sqrt{\frac{\gamma^2 \ell_p^4}{18} + \left( \frac{\gamma^4 \ell_p^8}{18^2} + \frac{16\dot{a}^2 a^8}{\mu^2 \gamma^2 N_L^2} \right)^{1/2}} \quad (3.53)$$

donde  $N_L$  es la función Lapso. Si quisieramos comparar este Hamiltoniano efectivo con el Hamiltoniano clásico (2.24) haríamos  $\ell_p = 0$  y observamos que los comportamientos difieren. De igual forma la ecuación (2.18) es modificada y viene dada por

$$C_{ef} = \frac{1}{2} a^{-3} p_\phi^2 - \frac{3}{8\pi G} a^{-3} \left( \frac{\gamma^2 \ell_p^4}{9} + \frac{16N^2 \dot{a}^2 a^8}{\gamma^2 N_L^2 p_\phi^2} \right) \quad (3.54)$$

Es evidente que si hacemos  $\ell_p = 0$  no recuperamos la ecuación (2.18) que describe el modelo clásico basado en las ecuaciones de Friedmann.

[www.bdigital.ula.ve](http://www.bdigital.ula.ve)

# Discusión y Conclusiones

Motivados por conocer las consecuencias de los efectos cuánticos en modelos cosmológicos, en particular, estudiar el fondo de radiación de microondas predichas en el modelo cosmológico Friedmann-Robertson-Walker acoplado a un campo escalar, hemos encontrado las ecuaciones efectivas del modelo FRW plano, a orden  $\ell_p^2$ , considerando aspectos generales de LQG y LQC, tales como la regularización de la variable  $c \rightarrow \sin(\mu c)/\mu$ . Otra de las consideraciones de LQG que debimos tomar en cuenta fue el problema del tiempo, el cual fue solucionado escogiendo el campo escalar  $\phi$  como la variable temporal monotonamente creciente, respecto a la cual obtuvimos la evolución de las demás variables.

Las ecuaciones efectivas del modelo fueron calculadas considerando grados de libertad cuánticos, introducidos en el Hamiltoniano Cuántico del sistema, tal como en la Formulación Geométrica de la Mecánica Cuántica. Esto permitió establecer un sistema efectivo, en el sentido de que las ecuaciones de movimiento pueden ser derivadas de un Hamiltoniano Efectivo  $H_{ef}$ . Bajo esta consideración se logro determinar algunas de las constantes de integración de las ecuaciones para los grados de libertad cuánticos, de manera que obtuvimos la solución de las ecuaciones de movimiento con correcciones de orden  $\ell_p^2$ , mediante la aplicación de la Identidad de Jacobi y el Principio de Incertidumbre.

Para conocer la evolución del universo en el modelo FRW clásico, debemos saber como se comporta el factor de escala; en el modelo cuántico calculamos el factor de escala corregido de manera que podemos compararlos. Hemos obtenido una diferencia a escalas pequeñas, ya que en el modelo clásico existe una singularidad al inicio del universo conocida como Big Bang, mientras que el universo que describimos considerando efectos cuánticos, presenta un rebote al inicio del mismo. Cabe destacar que a gran escala las dos soluciones, tanto la clásica como la cuántica, presentan un comportamiento similar.

Aún cuando hemos encontrado la solución del sistema con las primeras correcciones en las ecuaciones clásicas, puede resultar necesario extender la descripción y probar si el sistema puede ser resuelto considerando correcciones de orden superior a  $\ell_p^2$ , esto implica garantizar que las soluciones encontradas tengan sentido físico, en otras palabras lograr establecer las condiciones de realidad.

Adicionalmente, se sugiere para futuras investigaciones considerar modelos cosmológicos anisotrópicos, es decir, sistemas cuyas correcciones cuánticas contengan anisotropías. Además, como una forma de hacer más completo el modelo se podrían estudiar otros tipos de fuente tales como radiación, materia, etc.

[www.bdigital.ula.ve](http://www.bdigital.ula.ve)

# Bibliografía

- [1] A. Skirzewski, Ph.D. Thesis Effective Equations Of Motion for Quantum Sístems, Humboldt-Universität Berlin (2006)
- [2] Bojowald, M. and Skirzewski, A. 2006. Effective Equations of Motion for Quantum Systems. *Rev. Math. Phys.*, 18, 713745, arXiv math-ph/0511043v2
- [3] V.I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer. Second Edition. 1989.
- [4] C. Tannoudji. *Quantum Mechanics*. Vol 1 and Vol 2. 1992.
- [5] T. A. Schilling. *Geometrical Formulation of Quantum Mechanics*. PhD thesis, The Pennsylvania State University, 1996.
- [6] A. Ashtekar and T. A. Schilling. *Geometrical Formulation of Quantum Mechanics*, pages 23.65. Springer, New York, 1999. arXiv gr-qc/9706069.
- [7] P.R. Chernoff, J.E. Marsden, *Properties of infinite dimensional Hamiltonian Systems*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, (1974)
- [8] A. Heslot, Quantum mechanics as a classical theory, *Phys.Rev.* D31, 1341-1348, (1985)
- [9] J. Anandan and Y. Aharonov, Geometry of quantum evolution, *Jour.Gem.Phys.* 8, 147.162, (1992)
- [10] L.P. Hughston, Geometric aspects of quantum mechanics, in *Twistor Theory*, Ed. S.A. Huggett,(Marcel Dekker, 1995).

- [11] R. Cirelli, A. Mania and L. Piccocchero, Quantum Mechanics as an infinite-dimensional system with uncertainty structure Part I and II, *J. Math. Phys.* 31, 2891-2903, 1990.
- [12] M. Bojowald. Large Scale Effective Theory for Cosmological Bounces. *Phys. Rev. D* 75 (2007) 081301(R). [gr-qc/0608100]
- [13] M. Bojowald, A. Skirzewski. Quantum Gravity and Higher Curvature Actions (2006). arxiv 0606232v1
- [14] M. Bojowald. Loop Quantum Cosmology. *Living Rev. Relativity*, 11, (2008), 4. arxiv 1101.5592v1
- [15] M. Bojowald, Loop Quantum Gravity and Cosmology A Dynamical Introduction. 2011. arXiv 11015592v1.
- [16] M. Bojowald, Quantum Cosmology Effective Theory. 2012. arXiv 1209.3403v1.
- [17] Barbero G., J. F. Real Ashtekar Variables for Lorentzian Signature Space-Times. 1995. *Phys. Rev. D*, 51(10), 5507.5510.
- [18] Ashtekar, A. 1987. New Hamiltonian Formulation of General Relativity. *Phys. Rev. D*, 36(6), 1587.1602.
- [19] Rovelli, C. 2010. A new look at loop quantum gravity, arxiv 1004.1780v4.
- [20] Rovelli, C. Loop Quantum Gravity, *Living Rev. Rel.* 1 (1998) 1, [gr-qc/9710008v1]
- [21] Thiemann, T. 1988a. Quantum Spin Dynamics (QSD). *Class. Quantum Grav.*, 15, 839-873.
- [22] M. Bojowald, P. A. Höhn, and A. Tsobanjan, An effective approach to the problem of time, *Class. Quantum Grav.* 28 (2011) 035006, [arXiv 1009.5953]
- [23] P. Peldán. Actions for Gravity, with Generalizations A Review (1933), [gr-qc/9305011v1]
- [24] S. Holst. Barbero's Hamiltonian derived from a generalized Hilbert-Palatini action (1995).

- [25] Sen, A., “Gravity as a spin system”, *Phys. Lett.*, B119,89–91, (1982).
- [26] Ashtekar, A., “New variables for classical and quantum gravity”, *Phys. Rev. Lett.*, 57(18), 2244–2247, (1986).

[www.bdigital.ula.ve](http://www.bdigital.ula.ve)

[www.bdigital.ula.ve](http://www.bdigital.ula.ve)

# Agradecimientos

Los más sinceros agradecimientos a

Mi Madre, Yrian, por darme la vida, brindarme su invaluable amistad y apoyo en todo momento. Este logro también es tuyo

La familia Villarreal Valero, mi familia, por su apoyo. En particular a mis Abuelos, Agustín y Atilia, por brindarme un hogar

Mi tutor, Aureliano, por su amistad y paciencia. Infinitas gracias por guiarme en este proyecto y por compartir sus conocimientos

Mis compañeros de clase y Profesores de la Facultad de Ciencias que contribuyeron a mi formación como persona y profesional