



PROYECTO DE GRADO

Presentado ante la ilustre UNIVERSIDAD DE LOS ANDES como requisito parcial para
obtener el Título de LICENCIADO EN FÍSICA

NO-LOCALIDAD EN SISTEMAS DE MUCHOS CUERPOS Y EL LOOPHOLE DE DETECCIÓN

Por

Br. Manuel Vidal Vielma Blanco

Tutor: Dr. Antonio Acín (Instituto de Ciencias Fotónicas - ICFO)

Tutor Académico: Dr. Nelson Pantoja (Centro de Física Fundamental ULA)

julio 2014

©2014 Universidad de Los Andes Mérida, Venezuela

No-localidad en sistemas de muchos cuerpos y el loophole de detección

Br. Manuel Vidal Vielma Blanco

Proyecto de Grado — Licenciatura en Física, 54 páginas

Resumen: Se estudian aquí los efectos de considerar detectores no ideales en experimentos de Bell basados en desigualdades construidas a partir de funciones de correlación de dos cuerpos. Una caracterización de esta familia de desigualdades se ha introducido, siguiendo los resultados presentados recientemente en [18] y [19], para los casos con simetría permutacional o traslacional en experimentos en los que se miden dos cantidades dicotómicas. Los valores de eficacia crítica para que el loophole de detección sea cerrado en algunas de estas desigualdades simétricas se han calculado partiendo de una estrategia de asignación de eventos de no detección que permite considerar escenarios no ideales sin añadir una salida válida extra. Los valores de eficacia crítica hallados fueron siempre superiores al 66 %, lo que significa que no están dentro del rango accesible en la actualidad. Sin embargo, de perfeccionarse el uso de átomos entrelazados en experimentos de Bell, por ejemplo, donde las eficacias son cercanas a 100 %, las desigualdades estudiadas serían útiles por encima de los valores críticos aquí determinados.

Palabras clave: No-localidad, Teorema de Bell, Sistemas de muchos cuerpos, Detección de no-localidad, El loophole de detección, Eficacias de detección.

www.bdigital.ula.ve

A mis padres y a la memoria de Félix Blanco

Índice general

Índice de Cuadros	VI
Índice de Figuras	VII
Agradecimientos	VIII
1. Introducción	1
2. Preliminares	8
2.1. No-localidad de Bell	8
2.2. Correlaciones	10
2.2.1. Correlaciones no-señalizadoras	10
2.2.2. Correlaciones clásicas	11
2.2.3. Correlaciones cuánticas	12
2.2.4. No-localidad más allá de la Teoría Cuántica	12
2.3. Desigualdades de Bell	14
2.3.1. Desigualdades de Bell y Geometría Convexa	15
2.3.2. Determinación de las cotas	16
2.4. Cuantificación de la no-localidad	17
2.5. Entrelazamiento cuántico	18
2.5.1. Entrelazamiento y no-localidad	19
2.6. No-localidad en sistemas de muchos cuerpos	19
2.6.1. No-localidad genuina en sistemas de muchos cuerpos	20
2.6.2. No-localidad y entrelazamiento en sistemas de muchos cuerpos	21

3. Desigualdades de Bell a partir de funciones de correlación de dos cuerpos	23
3.1. Correlaciones en escenarios con muchos cuerpos	23
3.2. TBCBI	26
3.3. Imponiendo simetría bajo permutaciones	26
3.3.1. Una familia simétrica particular de TBCBIes	28
3.4. Imponiendo simetría bajo traslaciones	31
3.5. TBCBI con invariancia traslacional para el caso $N = 4$	33
4. Detección de no-localidad en sistemas de muchos cuerpos	35
4.1. Aspectos experimentales	35
4.2. El loophole de detección	36
4.2.1. La desigualdad CHSH modificada	38
4.3. TBCBIes modificadas	39
4.3.1. El caso de invariancia permutacional	43
4.3.2. El caso de invariancia traslacional	46
5. Observaciones finales	48
Bibliografía	50

Índice de cuadros

3.1. Algunas de las TBCBIs con invariancia traslacional para $N = 4$ presentadas en [19]. Los coeficientes son los correspondientes a los de la ecuación (3.45) y las cotas han sido calculadas siguiendo algoritmos bien conocidos [51]	34
4.1. El valor de η^* para tres TBCBIs con invariancia traslacional usando dos estrategias de asignación distintas. Nótese que la eficacia crítica es inversamente proporcional a la diferencia entre β_Q y β_C , lo que significa que estados de mayor no-localidad son más robustos a ineficacias de detección.	47

Índice de figuras

3.1. Violación de la desigualdad (3.25)	31
---	----

www.bdigital.ula.ve

Agradecimientos

Esta tesis sufriría de la más severa manquedad sin estas palabras de agradecimiento. No sólo se vería privada del carácter sentimental, más importante de lo que se suele admitir, que está siempre presente en estas circunstancias, sino que, falta imperdonable, los nombres de los hombres y mujeres que, en la misma medida que el mío propio, han hecho posible su existencia, dejarían de ser leídos y pronunciados. Si un nombre ha de iniciar esta lista, ese debe ser el de Antonio Acín (Toni), quien me brindó la invaluable oportunidad de aprender, bajo su tutela, en esa suerte de perfecta simbiosis que es el grupo de Teoría de la información cuántica que él dirige. A ese grupo de tantos nombres y apellidos, y de no menos nacionalidades, que logra poblar mi memoria desde un corredor de un tercer piso de un instituto (Institut de Ciències Fotòniques - ICFO) ahora tan lejano, mi más profundo y sincero agradecimiento. Los detalles, por ser muchos, ahora sobran, pero sin duda alguna permanecerán, ya por felices reencuentros o por simple y diáfana nostalgia. A Jordi y Remigiusz, compañeros no sólo de batallón sino hasta de trinchera en esta investigación, mi aprecio y gratitud.

Un poco más cerca, en los mismos pasillos de la Universidad que me ha visto crecer, y con una responsabilidad que se remonta a mis primeros pasos en ella, los nombres de Alejandra Melfo, Nelson Pantoja, Manuel Morocoima, Aureliano Skrzewski, entre tantos otros, resuenan en algo que tiene tanto de afecto como de reconocimiento y agradecimiento.

Mis amigos y familiares, tan próximos como se puede estar, merecen una mención especial, en particular Nancy, Wuilson, Jhon y Greta, mis padres y hermanos. Ustedes han forjado la parte de mí de la que puedo sentirme orgulloso. Que lo limitado de mis palabras no los engañe, todos ustedes están permanentemente en mi pensamiento y seguirán estándolo por el resto de los tiempos.

Capítulo 1

Introducción

Desde su formulación en la primera mitad del siglo XX, la mecánica cuántica ha brindado un sinnúmero de resultados exitosos en los esfuerzos por comprender fenómenos tan variados como las interacciones entre partículas elementales y la estabilidad de la materia y sus propiedades térmicas y mecánicas. Ya por la increíble precisión de sus predicciones en escenarios como los de la Electrodinámica cuántica o por la estructura conceptual con la que suele marcar el camino hacia una comprensión más o menos global de los sistemas físicos en cuestión, la mecánica cuántica goza de la más alta estima entre experimentalistas y teóricos por igual. No obstante, y pese al uso extendido de la teoría en casi cualquier modelo en el que su aplicación es necesaria, un consenso en cuanto a la interpretación de sus postulados y resultados fundamentales, tema de debate desde su nacimiento, se resiste. Este clima de desconcierto ha llevado, sin embargo, a la comprensión de nuevos aspectos de ésta y a la clarificación de su carácter no local, tema del presente trabajo y ejemplo de la disyunción fundamental entre la física clásica y la teoría de los cuantos.

Característico de la mecánica cuántica es el reconocimiento de una falla esencial en nuestras ideas clásicas al ser aplicadas al mundo de lo muy pequeño. En contraposición con lo que ocurre en cualquier teoría clásica, la mecánica cuántica no es determinista: hay un límite fundamental en la precisión con la que pares de variables complementarias pueden ser conocidas simultáneamente. Consternados por este hecho, Einstein, Podolski y Rosen propusieron en 1935 que este resultado contraintuitivo sería producto de la incompletitud de la mecánica cuántica [1]. Hay elementos de la realidad, dijeron, que no tienen contraparte, en términos de una cantidad física predecible con certitud, en la mecánica cuántica. Para ellos, una teoría completa sería posible bajo la adición de ciertas variables que harían de la

mecánica cuántica una teoría local y causal.

En el esquema de Einstein, Podolski y Rosen la correlación entre partículas entrelazadas distantes, por ejemplo, podría ser explicada en términos de variables ocultas que darían cuenta de los efectos que tienen las mediciones sobre una de las partículas en el estado de la otra. En otras palabras, sería posible encontrar un conjunto de variables λ tales que la probabilidad que caracteriza la correlación entre las partículas fuese factorizable. Sean a y b los conjuntos de posibles resultados de dos observadores, A y B , al medir las cantidades x y y , respectivamente. En general, se encuentra que $p(ab|xy) \neq p(a|x)p(b|y)$, indicando que las mediciones en las partes no son estadísticamente independientes. La hipótesis de localidad implica la existencia de una serie de factores que dan cuenta de correlaciones causales en la región común de sus conos de luz. En este contexto, una vez considerados *todos* los factores causales λ que relacionarían a y b , las probabilidades asociadas serían independientes; es decir,

$$p(ab|xy) = \int_{\Lambda} d\lambda q(\lambda) p(a|x, \lambda) p(b|y, \lambda) \quad (1.1)$$

Asumiendo la hipótesis de localidad en el escenario EPR, el físico John Bell llegó en 1964 a una desigualdad que, de cumplirse, probaría que las predicciones de la mecánica cuántica podrían en efecto ser descritas por una teoría local [2]. El hecho es, sin embargo, como ha sido comprobado desde entonces, que ninguna teoría física realista y local en el sentido de (1.1) puede contener todas las implicaciones estadísticas de la mecánica cuántica. Hay, pues, estados cuánticos que violan relaciones como las de Bell, las *desigualdades de Bell*, y esto abre nuevas posibilidades a las teorías futuras, que no tendrán que contener el principio de localidad como suposición *a priori* y que podrían, además, tener correlaciones no-locales más fuertes que las de la mecánica cuántica, que tiene límites en su no-localidad aún no entendidos por completo [3].

La incompatibilidad insuperable entre las correlaciones clásicas y cuánticas implicada por los resultados de Bell fue comprobada experimentalmente por primera vez en 1969 por Clauser, Horne, Shimony y Holt, quienes sugirieron el uso de fotones producidos en una cascada atómica [4]. Trabajos subsecuentes [5, 6, 7, 8] permitieron llegar a resultados mucho más convincentes que opacan las dudas respecto a la no-localidad de la naturaleza. Sin embargo, prácticamente todos los esfuerzos experimentales hechos hasta la fecha para detectar la no-localidad de ciertos sistemas presentan problemas fundamentales de carácter técnico. En efecto, los detectores usados en experimentos con fotones, por ejemplo, están

muy lejos de ser ideales, presentando eficacias de detección, η , bastante bajas (10 – 20 %) [9]. Al tomar en cuenta los eventos sin detección en las desigualdades de Bell es claro que, por debajo de una eficacia crítica η^* , los estados considerados ya no violan la desigualdad en cuestión, haciendo imposible la tarea de detectar no-localidad¹. Este problema es conocido como el loophole de detección, y una parte importante de este trabajo está consagrado a él.

El otro problema técnico que daría lugar a una explicación en términos de una teoría local es la dificultad para lograr arreglos experimentales en los que las partes están separadas en el sentido de la relatividad. Si esta condición no es satisfecha, un mecanismo local que involucre comunicación entre las partes y que explique las correlaciones halladas podría ser concebido [10]. A este problema se le conoce como el loophole de localidad. Entre los numerosos experimentos de Bell realizados hasta la fecha, hay los que logran resolver el problema de la detección antes mencionado pero que fallan en cerrar el loophole de localidad [11]. Un experimento libre de ambos loopholes sería determinante para constatar el fenómeno de la no-localidad [12].

En décadas recientes se ha hecho evidente que la no-localidad y el entrelazamiento tienen un interés que va más allá de su carácter fundacional. Desde el punto de vista del procesamiento de la información, por ejemplo, las ventajas de los recursos cuánticos sobre los recursos clásicos son considerables en ciertos escenarios. Almacenar y procesar la información en términos de sistemas cuánticos abre nuevas posibilidades que nutren el área de la teoría de la información cuántica. No sólo es posible concebir protocolos de criptografía mucho más seguros [13] sino que tareas como la factorización de un número grande puede hacerse en tiempo polinomial [14], algo imposible con recursos clásicos. Las consecuencias de la no-localidad en el contexto de juegos cooperativos con información incompleta también han sido investigadas [15]. La certificación de no-localidad es, pues, un problema central en la teoría de la información cuántica, haciendo de su factibilidad experimental un objetivo esencial.

La extensión natural de (1.1) al caso de más observadores permitiría definir la no-localidad de sistemas de muchas partes a partir de la imposibilidad de escribir una expresión equivalente para el sistema dado. Sin embargo, puede ocurrir que un conjunto de subsistemas esté correlacionado no localmente con otro conjunto dado mientras que no lo está para otro distinto. Este tipo de situaciones es consecuencia de la presencia de más de dos partes, que

¹Naturalmente, se podría pensar que la muestra de fotones detectados representa fielmente la totalidad de ellos. Bajo esta hipótesis, la detección de no-localidad en la data detectada sería extendida a toda la data. Es claro, empero, que lo más deseable es no depender de esta hipótesis. Procedimientos de criptografía dependientes de una hipótesis tan fácilmente revocable no serían seguros en lo absoluto.

hace surgir además una serie de aspectos nuevos no comprendidos por completo. Si bien la no-localidad en sistemas de muchos cuerpos está lejos de ser entendida cabalmente, es sabido que este es un escenario rico y complejo que podría, por un lado, significar nuevos recursos de procesamiento [16], y, por el otro, coadyuvar al entendimiento de sistemas de muchos cuerpos de interés físico [17]. La detección de no-localidad en este tipo de sistemas es, sin embargo, una tarea difícil desde el punto de vista experimental, en particular porque las desigualdades de Bell para sistemas de muchos constituyentes suelen involucrar correlaciones entre muchos de esos cuerpos a la vez.

La posibilidad de detectar no-localidad en ciertos escenarios mediante desigualdades de Bell que involucran correlaciones de a lo sumo dos cuerpos a la vez [18, 19] es un resultado alentador que podría marcar el camino para experimentos futuros. Numerosos estados de múltiples constituyentes son ya alcanzables experimentalmente [20, 21], haciendo de su implementación una meta factible. No obstante, como ya antes ha sido mencionado, sería necesario determinar si las eficacias de detección críticas en este caso son razonables. De no ser así, la ventaja que representa la presencia de correlaciones de orden bajo se vería contrarrestada por la necesidad de detectores no disponibles. Estudiar el efecto de la limitación de las eficacias de detección en experimentos reales en este tipo de escenarios es el objetivo principal de esta obra.

Las razones que llevan a preguntarse sobre la no-localidad en sistemas de muchos cuerpos son claras. La mayoría de los principios de información usados hasta la fecha para comprender las correlaciones cuánticas son principios bipartitos (involucran sistemas de dos cuerpos o partes). Una comprensión completa de las correlaciones cuánticas reclama, sin embargo, la introducción de principios intrínsecamente multipartitos, pues ningún principio bipartito puede determinar el conjunto de correlaciones cuánticas para un número arbitrario de partes [22]. Trabajos recientes [23] han introducido algunos principios de información multipartitos que promueven el estudio de sistemas de muchos cuerpos. Se ha observado, además, que la relación entre entrelazamiento y no-localidad es mucho menos estrecha en el caso de sistemas de múltiples partes. En algunas ocasiones, estados menos entrelazados pueden dar lugar a más no-localidad [9]. Entender por qué surge esta disyunción puede arrojar resultados importantes que ayuden a ampliar nuestro conocimiento fundamental sobre la naturaleza.

Un gran número de desigualdades de Bell ha sido encontrado para escenarios de múltiples partes. Sin embargo, estas suelen involucrar funciones de correlación entre muchos de estos cuerpos. Recientemente se ha demostrado que, en ciertos escenarios y bajo ciertas simetrías,

desigualdades de Bell que involucran funciones de correlación entre dos partes (TBCBI, en adelante)² pueden detectar no-localidad en sistemas de muchos cuerpos [18, 19]. La forma general de estas desigualdades, para observadores con dos posibles resultados (+, −) al medir cada una de dos cantidades posibles (0, 1), es

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \left(\alpha_i \langle \mathcal{M}_0^{(i)} \rangle + \beta_i \langle \mathcal{M}_1^{(i)} \rangle \right) + \sum_{i < j}^N \gamma_{ij} \langle \mathcal{M}_0^{(i)} \mathcal{M}_0^{(j)} \rangle + \\ & \sum_{i \neq j}^N \delta_{ij} \langle \mathcal{M}_0^{(i)} \mathcal{M}_1^{(j)} \rangle + \sum_{i < j}^N \varepsilon_{ij} \langle \mathcal{M}_1^{(i)} \mathcal{M}_1^{(j)} \rangle + \beta_C \geq 0, \end{aligned} \quad (1.2)$$

donde $\langle \mathcal{M}_k^{(i)} \rangle$ es el valor esperado de mediciones de la cantidad k por el observador i (la i -ésima parte) y β_C es un número real conocido como la cota clásica de la desigualdad. La violación de (1.2) por parte de conjunto de medidas y un estado es un indicador de no-localidad.

El que desigualdades como (1.2) puedan indicar no-localidad no es un resultado trivial pues son los correladores de más alto orden los que contienen la mayor información sobre el sistema. Cuánta información sobre un sistema arbitrario dado es necesaria para detectar no-localidad es una pregunta interesante cuya respuesta puede implicar un conocimiento más profundo del carácter no local de la naturaleza. Las TBCBI pueden representar un primer paso en esta dirección.

Requerir simetría permutacional en (1.2) es hacer que los valores esperados $\langle \mathcal{M}_k^{(i)} \rangle$ y $\langle \mathcal{M}_k^{(i)} \mathcal{M}_l^{(j)} \rangle$ aparezcan con el mismo peso; es decir, $\alpha_i = \alpha$, $\beta_i = \beta$, etc. Imponer esta simetría reduce considerablemente el número de desigualdades a tomar en cuenta. Se ha demostrado que algunas de estas desigualdades pueden ser usadas para detectar no-localidad, incluso para estados cuánticos importantes en sistemas de N espines interactuando a través del acoplamiento ferromagnético en un campo magnético con ciertas características [18]. Si la simetría se relaja al caso traslacional, es también posible hallar desigualdades violadas por estados cuánticos. Todo esto es evidencia del poder que tendrían las TBCBI más generales en la tarea de atestiguar no-localidad en sistemas relevantes.

Fuertes indicios del carácter no-local de la naturaleza han sido observados en numerosos experimentos en los últimos años. Sin embargo, como ya ha sido mencionado, el loophole de detección ha estado presente. Para determinar si un experimento de Bell concebido a partir

²Two-Body Correlators Bell Inequalities

de una de estas desigualdades puede cerrar el loophole, los eventos de no-detección deben ser considerados. Hay diversas maneras de tratar estos eventos pero todas ellas dan lugar a desigualdades modificadas que dependen de η , la eficacia de detección. El valor de la eficacia mínima que hace que la desigualdad sea aún violada depende generalmente del número de partes, las medidas y los posibles resultados involucrados en el test de Bell. De hecho, se ha demostrado que la consideración de escenarios con diversas medidas y una variedad de posibles resultados, y estados entrelazados de alta dimensionalidad, puede llevar a correlaciones más robustas no sólo a la eficacia de detección [24] sino también a otros parámetros como el ruido [25]. Además, como se verá más adelante, el valor de η^* puede depender también de la “estrategia” de modificación de la desigualdad de Bell según se consideren combinaciones específicas de eventos de detección y de no detección. Estudiar cómo esta eficacia crítica depende de estos parámetros en TBCBI daría vestigios de lo que ocurre en general en el caso de múltiples cuerpos.

Esta tesis sigue un orden lógico que le brinda una estructura visible. Los aspectos de la no-localidad en ella discutidos se han dividido en tres partes principales. La primera, condensada en los capítulos 1 y 2, está consagrada al establecimiento de las definiciones básicas y de los resultados más importantes en el tema de la no-localidad de Bell. Ejemplos de correlaciones no locales y de las herramientas necesarias para determinar esa no-localidad son dados en esta primera parte. Algunos resultados concernientes a la relación entre no-localidad y entrelazamiento son también presentados, además de un tratamiento formal de las desigualdades de Bell en el lenguaje de la geometría convexa. Cómo se extiende el concepto de no-localidad a escenarios con múltiples partes es el tema central de la sección final de esta parte, en donde se presentan las distintas definiciones de no-localidad que pueden hallarse en estos escenarios y las principales diferencias que surgen al considerar más de dos partes. Una breve comparación de no-localidad y entrelazamiento en sistemas de muchos cuerpos pone punto final a esta primera parte.

El tercer capítulo, que presenta un tratamiento general de desigualdades de Bell con funciones de correlación de dos cuerpos (TBCBI), contiene la segunda parte de esta monografía. Las consecuencias de las TBCBIs en la labor de detectar no-localidad son allí discutidas y se dan detalles de los escenarios con simetrías permutacional y traslacional. Ejemplos de algunas de estas desigualdades violadas explícitamente por estados cuánticos son plasmados con énfasis en los resultados más importantes descritos en [18, 19].

La tercera y última parte de este trabajo (capítulo 4) trata del problema general de

detectar no-localidad en sistemas de múltiples componentes. En una primera sección se presentan los aspectos experimentales más relevantes en la empresa de detectar no-localidad. Los experimentos típicos que involucran fotones y átomos en distinta combinación son discutidos. La sección siguiente está consagrada al loophole de detección. Una discusión general de los efectos de considerar eficacias no ideales es seguida de un estudio detallado de las TBCBI modificadas (dependientes de la eficacia) con las simetrías ya mencionadas. Por último, algunos resultados menores que surgieron producto de la investigación en la que se basa esta tesis son presentados, entendiéndose por éstos un conjunto de eficacias críticas halladas para algunas TBCBI enlistadas en [18, 19] y una aproximación al problema de hallar η^* desde el punto de vista de las “estrategias” de modificación de las desigualdades de Bell según criterios que en su momento serán explicados.

www.bdigital.ula.ve

Capítulo 2

Preliminares

Este capítulo contiene las definiciones básicas del tema de la no-localidad de Bell. En este sentido, si bien la mayoría de ellas serán usadas en capítulos posteriores, también hay las que no son primordiales al problema estudiado aquí pero que sirven de base para cualquier aproximación al tema. Esto no debe interpretarse, sin embargo, como la presentación de una revisión cabal. La mayoría de las definiciones se han plasmado con un espíritu más bien operacional y algunas de sus implicaciones, todas interesantes, han sido omitidas. Para una revisión general del tema el lector puede referirse a [9], trabajo sobre el que descansa si no la forma, por lo menos el fondo de este capítulo.

2.1. No-localidad de Bell

La idea subyacente a cualquier teoría local y causal es la de la independencia de sistemas separados en el sentido de la relatividad. En una teoría local, nada de lo que sucede en uno de estos sistemas puede afectar directamente al otro. Esta idea, presente *a priori* en cualquier modelo clásico, fue la que llevó a Einstein, Podolski y Rosen a su propuesta sobre la incompletitud de la mecánica cuántica [1]. Sin embargo, como se supo a partir de los trabajos de John Bell en la década de 1960 [2, 26], la mecánica cuántica es intrínsecamente incompatible con la idea subyacente a la localidad, un resultado conocido como *Teorema de Bell*¹. Para ilustrar esto, supóngase que dos partículas producidas por una fuente común se mueven en sentido opuesto hacia uno de dos observadores distantes, Alicia y Bob (véase figura 2.1). Sean a y b los resultados de mediciones de Alicia y Bob de las cantidades x y y ,

¹Hay maneras más formales de expresar este resultado. Véase, por ejemplo, [27].

respectivamente. Existe una probabilidad conjunta $p(ab|xy)$ que define las correlaciones del experimento y para la que se halla, en general, que

$$p(ab|xy) \neq p(a|x)p(b|y) \quad (2.1)$$

Nótese que x y y representan elecciones particulares del conjunto de cantidades susceptibles de medición. El experimento descrito es conocido como *experimento de Bell*, y una especificación del número de observadores, cantidades físicas y potenciales resultados de medición que toman parte en este experimento se traduce en una indicación del *escenario de Bell*². A pesar de que los observadores están espacialmente separados, la dependencia estadística implicada por (2.1) podría ser fácilmente explicable por las correlaciones a las que estuvieron sometidas las partículas en el pasado (en la fuente, por ejemplo). La dependencia entre los resultados de medir los momentos lineales de dos partículas clásicas que chocaron en el pasado es un ejemplo de esto. En principio, es posible construir una teoría que describa la probabilidad conjunta en términos de una serie de variables λ que caracterizan las interacciones pasadas para la que se cumpla

$$p(ab|xy, \lambda) = p(a|x, \lambda)p(b|y, \lambda), \quad (2.2)$$

En el ejemplo de las partículas que chocan, las variables λ darían cuenta de la ley de la conservación de momento lineal. Nótese que las variables λ podrían también ser *variables ocultas*, en el sentido de que no forman parte de la teoría en cuestión, que sería entonces una teoría incompleta. Para casos más generales en los que λ depende de la repetición dada del experimento³ la ecuación (2.2) se lee como (1.1), donde $q(\lambda)$ es una distribución de probabilidad sobre λ .

Suponer que las correlaciones estadísticas que surgen en la mecánica cuántica pueden factorizarse en el sentido de (1.1) lleva, como lo demostró Bell, a una contradicción insalvable. Ninguna teoría de variable ocultas que reproduzca los resultados de la mecánica cuántica es local⁴. Hay, pues, correlaciones no-locales en el corazón mismo de la mecánica cuántica.

²Si n es el número de partes involucradas, m el número de posibles medidas y Δ el número de posibles resultados de estas medidas, este escenario se especifica con la notación (n, m, Δ) .

³Puede depender de cantidades físicas no controlables.

⁴Hay otras características asociadas a teorías de variables ocultas que han sido estudiadas para el

2.2. Correlaciones

Los escenarios de Bell están caracterizados por una asignación del número de partes (n), del número de mediciones posibles (m) y del número de potenciales resultados de estas mediciones (Δ). Los experimentos que realiza cada observador en el sistema compartido⁵ pueden interpretarse como el proceso de recibir una *salida* por parte de una *caja negra* compartida cuando a ésta le es dada una *entrada*. Supongamos por simplicidad que $n = 2$. Las entradas y salidas de Alicia y Bob, los dos observadores, pueden etiquetarse como $x, y \in \{1, \dots, m\}$ y $a, b \in \{1, \dots, \Delta\}$, respectivamente. El escenario de Bell en cuestión está caracterizado por las $\Delta^2 m^2$ probabilidades conjuntas $p(ab|xy)$. Al conjunto de todas estas probabilidades, que son las *correlaciones* que caracterizan a la caja negra, se le conoce como *comportamiento* y se denota como $\mathbf{p} = \{p(ab|xy)\}$ [29]. Los comportamientos pueden verse como puntos en un espacio de probabilidades $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^{\Delta^2 m^2}$ sujeto a las condiciones $p(ab|xy) \geq 0$ (las probabilidades son definidas como positivas) y $\sum_{a,b=1}^{\Delta} p(ab|xy) = 1$ (normalización). Las correlaciones pueden estar sujetas a condiciones adicionales dependiendo del modelo físico subyacente. En estos términos, tres principales tipos de correlaciones pueden reconocerse.

2.2.1. Correlaciones no-señalizadoras

Las correlaciones que cumplen con la condición dada por

$$\begin{aligned} \sum_{b=1}^{\Delta} p(ab|xy) &= \sum_{b=1}^{\Delta} p(ab|xy') \quad \text{para todos } a, x, y, y' \\ \sum_{a=1}^{\Delta} p(ab|xy) &= \sum_{a=1}^{\Delta} p(ab|x'y) \quad \text{para todos } b, y, x, x' \end{aligned} \quad (2.3)$$

son conocidas como no-señalizadoras, pues implican que las probabilidades locales de Alicia $p(a|x) = p(a|xy) = \sum_{b=1}^{\Delta} p(ab|xy)$ son independientes de la elección de medidas y de Bob, y viceversa, lo que imposibilita el uso de la caja negra para señalización instantánea. Si las partes están lo suficientemente separadas, no es posible que Alice y Bob establezcan una vía de comunicación que les permita conocer la elección de *entrada* del otro previa ejecución de su propia medición, por lo que no se pueden originar correlaciones por un manejo particular

caso de la mecánica cuántica. Ver [28] para una discusión general sobre propiedades del tipo variable-oculta.

⁵Un par de partículas entrelazadas, por ejemplo.

de este conocimiento. Al conjunto de comportamientos que satisface las condiciones de no-señalización se le denota $\mathcal{NS}$.

2.2.2. Correlaciones clásicas

Otra condición que se puede imponer a las correlaciones además de las de positividad y normalización es la ya conocida condición de localidad, dada por (1.1). El conjunto de variables λ puede no sólo pensarse como el efecto de correlaciones originarias de interacciones previas sino también, en el esquema de la caja negra, como un parámetro dado por información compartida con antelación por Alice y Bob. Esta información suele denominarse *aleatoriedad compartida*, y puede interpretarse como una estrategia preestablecida entre las partes para decidir qué entradas dar a la caja dependiendo de las salidas que vayan recibiendo. Naturalmente, esta estrategia preestablecida da lugar a correlaciones entre las probabilidades de las partes, por lo que no son estadísticamente independientes. Nótese que este escenario no viola la condición de no-señalización porque, una vez iniciado el experimento, los observadores no conocen los resultados del otro a tiempo real.

Es posible probar que la condición de localidad (1.1) puede escribirse en términos de teoría de variables ocultas determinista y no-señalizadora, por lo que el término localidad se entiende aquí como una extensión que considera teorías deterministas por igual. Considérese una distribución de probabilidad, para cada una de las partes, que asigna una salida fija para una entrada dada (una estrategia determinista). Désígnese con $d(a|x) = p(a|x)$ dicha probabilidad. Si a_x es la salida fija de la entrada x , entonces $d(a|x) = \delta_{a,a_x}$. Si se consideran variables ocultas tales que $d(a|x) = d(a|x, \lambda)$, las salidas a están totalmente determinadas por la información contenida en λ y por la elección de x . Las correlaciones se pueden expresar entonces como una combinación de estrategias deterministas

$$p(ab|xy) = \sum_{\lambda} d(a|x, \lambda) d(b|y, \lambda), \quad (2.4)$$

Un comportamiento $\mathbf{p}$ es local si y sólo si puede ser escrito como una combinación convexa de $\mathbf{d}_{\lambda}(ab|xy) = \delta_{a_x, b_y}$, con $q_{\lambda} \geq 0$, $\sum_{\lambda} q_{\lambda} = 1$ [30].

Con $\mathcal{L}$ se denota al conjunto de comportamientos que satisface la condición de localidad. Si bien todos los comportamientos pertenecientes a $\mathcal{L}$ son no-señalizadores, existen comportamientos pertenecientes a $\mathcal{NS}$ que no son locales; es decir, $\mathcal{L} \subset \mathcal{NS}$ [9].

2.2.3. Correlaciones cuánticas

La condición de localidad impuesta sobre las cajas negras con las que cada observador realiza su experimento puede relajarse cuando se consideran cajas con propiedades cuánticas. En mecánica cuántica, el estado de un sistema está caracterizado por la matriz de densidad ρ , un conjunto de operadores definidos sobre el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. En términos de ρ , los valores esperados de los observables, operadores autoadjuntos en $\mathcal{H}$, se escriben como $\langle \mathcal{A} \rangle = \text{tr}(\mathcal{A}\rho)$. Asociado a cada posible resultado a de una medición x están los operadores M_a^x , llamados *medidas*. En particular, si los M_a^x son positivos y están normalizados ($\sum_a M_a^x = \mathbf{1}_{\mathcal{H}}$), se dice de ellos que son POVM⁶. En términos de estos POVM, la probabilidad de obtener a al medir x es

$$p(a|x) = \text{tr}(\rho M_a^x) \quad (2.5)$$

Las correlaciones cuánticas están pues caracterizadas por esta última expresión, conocida como regla de Born. Nótese que

$$\sum_b p(ab|xy) = \text{tr}(M_a^x \otimes \sum_b M_b^y \rho) = \text{tr}(M_a^x \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{H}_b} \rho), \quad (2.6)$$

lo que significa que el resultado es independiente de la elección de medida de Bob, indicando que *las correlaciones cuánticas cumplen con el principio de no-señalización*. Al conjunto de comportamientos caracterizados por (2.5) se le denota con el símbolo $\mathcal{Q}$.

2.2.4. No-localidad más allá de la Teoría Cuántica

Tratar los experimentos de Bell en términos de cajas negras es analizar las posibles correlaciones con independencia del modelo físico subyacente. Una generalización de este escenario lleva a declaraciones sobre la física que son independientes de los modelos, y permite por lo tanto comparar varias teorías posibles según las relaciones entre salidas y entradas; es decir, a partir de $p(\text{salidas}|\text{entradas})$. Las cajas negras pueden ser vistas como laboratorios automáticos que arrojan una salida dependiendo de la entrada dada. En el escenario de Bell con Alicia y Bob como partes, la física subyacente estaría condensada en $p(ab|xy)$.

En el lenguaje de la teoría de juegos, la no-localidad puede ser ilustrada de la siguiente

⁶Positive operator-valued measure.

manera⁷: Supóngase que a, b, x y y tienen sólo dos posibles valores, 0 y 1, y que Alicia y Bob quieren construir cajas cuyas salidas estén dadas por

$$a \oplus b = xy \quad (2.7)$$

donde $a \oplus b$ denota suma módulo 2. Supóngase además que si Alicia introduce $x = 0$ entonces $a = 0$. Para intentar *ganar* el juego, Alicia y Bob pueden establecer una estrategia previa: Si $x = 0$ y $y = 0$, es claro que la caja de Bob debe arrojar $b = 0$, lo mismo que si $x = 0$ y $y = 1$. Como $b = 0$ cuando $y = 0$, a debe ser cero cuando $x = 1$ para ganar cuando las entradas son $x = 1, y = 0$. Hasta ahora ya se ha fijado el valor de todas las salidas, y es claro que cuando $x = 1$ y $y = 1$, a y b son cero, lo que implica que (1.2) no se cumple para esta combinación. Si las entradas son aleatorias y equiprobables, la probabilidad de éxito de Alicia y Bob es de a lo sumo $3/4$. Este límite podría quebrarse si Alicia y Bob pudiesen comunicarse, pues Alicia podría decir a Bob su entrada y su salida y Bob podría actuar de acuerdo a esta información. Esto, por su puesto, no está permitido si los jugadores están espacialmente separados. La no-localidad de Bell implica que si las cajas tienen partículas preparadas en estados entrelazados, es posible tener una probabilidad mayor a $3/4$. Existe, sin embargo, un límite de $(2 + \sqrt{2})/4$ [32] para esta probabilidad, lo que significa que no es posible ganar siempre el juego con recursos cuánticos.

Por qué existe un límite en la probabilidad con la que la mecánica cuántica puede ganar el juego es una pregunta abierta. Ante esto, surge inmediatamente la cuestión de si hay algún principio fundamental no conocido que limita la no-localidad de la mecánica cuántica. Nótese que esta pregunta se hace considerando la causalidad relativista, y concierne a “cantidades de no-localidad” no-señalizadoras. El juego descrito puede ser ganado con probabilidad 1 por correlaciones supra-cuánticas pero no-señalizadoras. La pregunta es por qué la mecánica cuántica, que cumple con la no-señalización, no puede ser tan exitosa. Algunas propuestas recientes establecen algunos principios plausibles que parecen limitar las correlaciones no-señalizadoras supracuánticas [33, 34, 35]

⁷La no-localidad y la teoría de juegos guardan relaciones que van mucho más allá de este simple ejemplo [31].

2.3. Desigualdades de Bell

El juego descrito en la sección anterior, con el límite de $3/4$ impuesto por la condición de localidad, contiene en esencia una desigualdad conocida como desigualdad Clauser-Horne-Shimony-Holt (CHSH). Supóngase ahora que $x, y \in \{0, 1\}$ y $a, b \in \{-1, 1\}$. Considérese ahora la expresión $S = \langle a_0 b_0 \rangle + \langle a_0 b_1 \rangle + \langle a_1 b_0 \rangle - \langle a_1 b_1 \rangle$, donde $\langle a_x b_y \rangle = \sum_{a,b} ab p(ab|xy)$ es el valor esperado del producto ab para una elección de medidas dada. Si las probabilidades siguen la condición impuesta por (1.2), se cumple

$$S = \langle a_0 b_0 \rangle + \langle a_0 b_1 \rangle + \langle a_1 b_0 \rangle - \langle a_1 b_1 \rangle \leq 2 \quad (2.8)$$

que es la desigualdad CHSH [4]. Para ver esto puede usarse la definición (1.2) en $\langle a_x b_y \rangle$, lo que se traduce en un promedio $\langle a_x b_y \rangle = \int d\lambda q(\lambda) \langle a_x \rangle_\lambda \langle b_y \rangle_\lambda$ de valores esperados locales $\langle a_x \rangle_\lambda = \sum_a ap(a|x, \lambda)$ y $\langle b_y \rangle_\lambda = \sum_b bp(b|x, \lambda)$. La ecuación (2.8) puede escribirse ahora como $S = \int d\lambda q(\lambda) S_\lambda \leq 2$, con $S_\lambda = \langle a_0 \rangle_\lambda \langle b_0 \rangle_\lambda + \langle a_0 \rangle_\lambda \langle b_1 \rangle_\lambda + \langle a_1 \rangle_\lambda \langle b_0 \rangle_\lambda - \langle a_1 \rangle_\lambda \langle b_1 \rangle_\lambda = \langle a_0 \rangle_\lambda (\langle b_0 \rangle_\lambda + \langle b_1 \rangle_\lambda) + \langle a_1 \rangle_\lambda (\langle b_0 \rangle_\lambda - \langle b_1 \rangle_\lambda)$. Dado que $\langle a_0 \rangle_\lambda, \langle a_1 \rangle_\lambda \in [-1, 1]$, $A_\lambda \leq |\langle b_0 \rangle_\lambda| + |\langle b_1 \rangle_\lambda|$, de donde se deduce $S_\lambda \leq 2 \Rightarrow S \leq 2$.

La desigualdad CHSH es un ejemplo de una desigualdad de Bell, que puede definirse como una desigualdad lineal, cuya violación indica no-localidad, formulada en términos de valores esperados (correladores) de productos tensoriales de medidas realizadas por los observadores. Nótese que en ningún momento ha entrado en juego la mecánica cuántica en la descripción de la desigualdad CHSH ni en la definición de la desigualdad de Bell. Sin embargo, estas suelen formularse de manera tal que sean violadas por estados cuánticos. En el caso CHSH esto puede verse si se considera un experimento de Bell donde los sistemas medidos por Alicia y Bob son dos qubits⁸ en el estado singlete $|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$, donde $|0\rangle$ y $|1\rangle$ son los autoestados de σ_z para los autovalores $+1$ y -1 . Las posibles medidas x y y pueden asociarse a vectores $\vec{x}$ y $\vec{y}$ correspondiente a medidas de $\vec{x} \cdot \vec{\sigma}$, con $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. La mecánica cuántica establece que $\langle a_x b_y \rangle = \vec{x} \cdot \vec{y}$. Si $x \in 0, 1$ corresponde a mediciones en las direcciones $\hat{e}_1$ y $\hat{e}_2$ y $y \in 0, 1$ a mediciones en las direcciones $(\hat{e}_1 + \hat{e}_2)/\sqrt{2}$ y $(\hat{e}_1 - \hat{e}_2)/\sqrt{2}$ se tiene $\langle a_0 b_0 \rangle = \langle a_0 b_1 \rangle = \langle a_1 b_0 \rangle = 1/\sqrt{2}$ y $\langle a_1 b_1 \rangle = -1/\sqrt{2}$, de donde

$$S = 2\sqrt{2} > 2, \quad (2.9)$$

⁸Un qubit es un sistema cuántico con dos estados propios, generalmente denotados $|0\rangle$ y $|1\rangle$, que puede ser escrito como una superposición lineal de la forma $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$. El lector puede referirse a [36] para una exposición básica de algunos elementos de información y computación cuánticas.

que es una violación de (2.8). A pesar de que para llegar a (2.9) se usó un sistema cuántico particular, es sabido, gracias a la demostración dada por Tsirelson en 1980 [32], que $2\sqrt{2}$ es el máximo valor que puede dar *cualquier* sistema cuántico en el caso CHSH. Al valor máximo que puede arrojar la mecánica cuántica en una expresión de Bell se le conoce como el *cota cuántica* o *cota de Tsirelson*, y se suele denotar como β_Q . Al valor máximo que se puede obtener a partir de estrategias deterministas se le conoce como el *cota clásica*, β_C . Existe una tercera cota que corresponde al máximo valor que pueden obtener relaciones supracuánticas no-señalizadoras, y se denota β_{NS} . Determinar estos límites es claramente de vital importancia para atestiguar no-localidad. Sin embargo, esto no es una tarea trivial[35].

2.3.1. Desigualdades de Bell y Geometría Convexa

A la hora de determinar si un comportamiento pertenece al conjunto $\mathcal{L}$ podría disponerse de una desigualdad que, como la CHSH, implique no-localidad inmediatamente al ser violada. Existen, sin embargo, otras desigualdades que estipulan condiciones necesarias pero no suficientes para atestiguar la no-localidad. Encontrar un conjunto de desigualdades que permita determinar sin ambigüedades si un comportamiento es no-local es entonces deseable. Lo que se quiere es básicamente un conjunto de desigualdades que caractericen la frontera de $\mathcal{L}$. Para llegar a esta caracterización es útil estudiar las desigualdades de Bell y los conjuntos $\mathcal{L}$, $\mathcal{Q}$ y $\mathcal{NS}$ en el contexto de la Geometría convexa.

Denotemos con $\mathcal{K}$ a los conjuntos $\mathcal{L}$, $\mathcal{Q}$ y $\mathcal{NS}$. Si los comportamientos $\mathbf{p}_1$ y $\mathbf{p}_2$ pertenecen a $\mathcal{K}$, entonces $\mu\mathbf{p}_1 + (1 - \mu)\mathbf{p}_2$ con $0 \leq \mu \leq 1$ también pertenece a $\mathcal{K}$. Es decir, $\mathcal{L}$, $\mathcal{Q}$ y $\mathcal{NS}$ son cerrados, acotados y convexos. Por el teorema de separación hiperplanar [37], para cada comportamiento $\mathbf{p}'$ fuera de $\mathcal{K}$ existe un hiperplano que separa $\mathbf{p}'$ del conjunto correspondiente. Existe, pues, una desigualdad de la forma

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{p} = \sum_{abxy} s_{xy}^{ab} p(ab|xy) \leq \beta_{\mathcal{K}}, \quad (2.10)$$

donde s_{xy}^{ab} son los “coeficientes” que definen la expresión de Bell, tal que todo $\mathbf{p}'$ fuera de $\mathcal{K}$ la viola.

Los conjuntos $\mathcal{L}$ y $\mathcal{NS}$ son politopos; es decir, son conjuntos convexos con un número finito de vértices. En el caso de $\mathcal{NS}$ esto es claro debido a que las condiciones que lo definen son un número finito de restricciones lineales. El conjunto $\mathcal{L}$ es convexo y sus vértices son los puntos caracterizados por las estrategias deterministas [9].

El conjunto $\mathcal{Q}$ es convexo y es un subconjunto de $\mathcal{NS}$. Un ejemplo de correlaciones no-señalizadoras que no son correlaciones cuánticas son las asociadas a cajas Popescu-Rohrlich (PR)[38]. Las correlaciones de estas cajas están definidas como $PR(ab|xy) = \frac{1}{2}\delta_{a\oplus b=xy}$, donde la suma es tomada módulo 2. De la violación de las desigualdades de Bell se sabe además que hay correlaciones cuánticas que no son locales. Una diferencia importante entre $\mathcal{Q}$ y $\mathcal{L}$ y $\mathcal{NS}$ es que, si bien las fronteras que $\mathcal{Q}$ comparte con $\mathcal{L}$ y $\mathcal{NS}$ son planas, el primero no es un politopo la región de $\mathcal{Q}$ fuera de $\mathcal{L}$ no tiene vértices discretos⁹.

De la discusión anterior se sigue la cadena de inclusiones $\mathcal{L} \subset \mathcal{Q}$. Como $\mathcal{L}$ es un politopo, hay un número finito de desigualdades que caracterizan su frontera. La figura 2.1 ilustra cada uno de los conjuntos. Para encontrar el conjunto de desigualdades que caracterizan la frontera de $\mathcal{L}$ hay que analizar las *caras* de $\mathcal{L}$, que están definidas como $F = \{\mathbf{p} \in \mathcal{L} \mid \mathbf{s} \cdot \mathbf{p} = \beta_C\}$ ¹⁰. Las caras de dimensión $\dim F = \mathcal{L} - 1$ son llamadas *facetas* de $\mathcal{L}$, y las desigualdades asociadas “desigualdades de Bell herméticas”. Las desigualdades herméticas son importantes porque cualquier otra desigualdad de Bell puede escribirse como una combinación no negativa de estas [9].

2.3.2. Determinación de las cotas

En el ejemplo de la desigualdad CHSH se vio que el valor de la cota cuántica es mayor que el de la cota clásica de esa expresión de Bell. La existencia de las cotas β_C , β_Q y β_{NS} ya fue mencionada en la sección 2.3. Dado que el conjunto de correlaciones clásicas está contenido en el de correlaciones cuánticas, existe una serie de correlaciones cuánticas para las que $\beta_Q > \beta_C$. Hallar el valor de β_Q para una expresión de Bell $\mathbf{s}$ es encontrar

$$\beta_Q = \max_{\mathbf{p} \in \mathcal{Q}} \mathbf{s} \cdot \mathbf{p} = \max_{\mathcal{B}} \|\mathcal{B}\| \quad (2.11)$$

donde

$$\mathcal{B} = \sum_{abxy} s_{xy}^{ab} M_a^x M_b^y \quad (2.12)$$

es el *operador de Bell* asociado a $\mathbf{s}$, $\|\mathcal{B}\|$ al mayor autovalor de $\mathcal{B}$ (la norma espectral) y la optimización se realiza sobre todas las posibles medidas M_a^x y M_b^y . Para hacer esto puede

⁹La definición rigurosa de los puntos extremos de $\mathcal{Q}$ es un problema abierto. Para el caso específico $(n, 2, 2)$ Werner y Wolf [39] brindaron una descripción completa en el año 2001; sin embargo, se debe recurrir a procedimientos numéricos para casos más generales.

¹⁰Una cara de dimensión 0 es un vértice y una cara de dimensión 1 es una arista.

escogerse una familia de operadores de Bell en un espacio de Hilbert de dimensión fijada y maximizar $||\mathcal{B}||$ sobre todos los operadores de esta familia. Una manera alternativa consiste en calcular la cota cuántica para un estado particular $|\psi\rangle$ y maximizar $\langle\psi|\mathcal{B}|\psi\rangle$ sobre todos los operadores $\mathcal{B}$. A pesar de que es una tarea importante, no siempre es necesario conocer la cota cuántica de una desigualdad. En la mayoría de los casos, el interés mayor recae en saber si la desigualdad en cuestión es violada o no por la mecánica cuántica. Los dos principales métodos numéricos existentes para hallar la violación de una desigualdad de Bell son las estrategias MBS¹¹ [40] y SDP¹² [35].

2.4. Cuantificación de la no-localidad

Una pregunta natural que surge al evaluar la violación de las desigualdades de Bell por algún sistema cuántico es si existe una manera de decidir si un sistema es más no-local que otro. Una cuantificación de la no-localidad permitiría en general comparar sistemas no-locales que podrían ser usados como recursos en tareas que requieran un grado mínimo de no-localidad, por ejemplo. Una primera tentativa de cuantificación llevaría a considerar la magnitud de la violación de la desigualdad. Así, $\mathbf{q}$ sería más no-local que $\mathbf{p}$ si $\mathbf{s} \cdot \mathbf{q} > \mathbf{s} \cdot \mathbf{p}$ para una expresión de Bell $\mathbf{s}$. El problema con este método es que la comparación puede no cumplirse para otra expresión de Bell. Es más, en algunos casos puede escogerse una expresión de Bell escrita a partir de otra dada tal que la violación de aquella puede hacerse artificialmente grande a partir de la libre elección de un cierto parámetro¹³. La magnitud de violación tendría entonces que ser normalizada de alguna manera para evitar este tipo de situaciones. Otras tentativas de cuantificación pueden formularse en términos de tolerancias a ruidos introducidos en la desigualdad [41]. En particular, la tolerancia a ineficacias de detección puede ser usada para cuantificar la no-localidad [24], [42].

¹¹ *Multiport beam-splitter.*

¹² *Semi-definite programming.*

¹³ Sea por ejemplo $\mathbf{s}$ la expresión CHSH, para la que $\beta_C = 2$ y $\beta_Q = 2\sqrt{2}$. Considérese ahora la expresión $\mathbf{s}_\alpha = \alpha\mathbf{s} + (1 - \alpha)/2 \mathbf{1}$. Ahora, $\mathbf{s}_\alpha \cdot \mathbf{p} = \alpha\mathbf{s} \cdot \mathbf{p} - 2\alpha + 2$, lo que significa que β_C^α sigue siendo 2 pero $\beta_Q^\alpha = 2 + 2(\sqrt{2} - 1)\alpha$, por lo que puede ser hecha arbitrariamente grande de manera artificial.

2.5. Entrelazamiento cuántico

Una diferencia importante entre las teorías clásicas y la mecánica cuántica es la que concierne a la descripción de estados compuestos. En la mecánica cuántica el espacio de fases es reemplazado por el espacio de Hilbert, por lo que el estado total del sistema ya no es el producto cartesiano de los estados de cada subsistema sino el producto tensorial de los espacios asociados a cada uno de ellos $\mathcal{H} = \otimes_{l=1}^n \mathcal{H}_l$. Mientras que en la descripción clásica el estado del sistema es siempre el producto de los estados de los n subsistemas separados, en la descripción cuántica el estado total está dado por

$$|\psi\rangle = \sum_{\mathbf{i}_n} c_{\mathbf{i}_n} |\mathbf{i}_n\rangle \quad (2.13)$$

donde $\mathbf{i}_n = i_1, i_2, \dots, i_n$ y $|\mathbf{i}_n\rangle = |i_1\rangle \otimes |i_2\rangle \otimes \dots \otimes |i_n\rangle$, que en general no puede ser escrito como un producto de subestados separados; es decir, $|\psi\rangle \neq |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_n\rangle$. Esto último es el ingrediente esencial en la definición de entrelazamiento¹⁴ de estados puros. Cuando los subsistemas no son describibles en términos de vectores de estado, esto es, cuando los estados son mixtos¹⁵, se dice que estos están entrelazados si no pueden ser escritos como una combinación convexa de productos de estados [44]

$$\rho \neq \sum_i p_i \rho_1^i \otimes \dots \otimes \rho_n^i \quad (2.14)$$

Es fácil ver que para sistemas de dos partes, el espacio de Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, con $\dim \mathcal{H}_1 = \dim \mathcal{H}_2 = 2$, está expandido por los estados base entrelazados

$$|\psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle) \quad |\psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle), \quad (2.15)$$

denominados estados EPR. Nótese que al medir en solo uno de los sistemas, los estados $|0\rangle$ y $|1\rangle$ aparecen con igual probabilidad. Sin embargo, los resultados de medir en ambos sistemas están correlacionados. A pesar de que no se tiene certeza sobre los estados de los subsistemas, hay un conocimiento global del macro estado [45].

¹⁴Para una revisión detallada del tema de Entrelazamiento cuántico ver [43]

¹⁵Debido al fenómeno de decoherencia, en el laboratorio se suelen hallar estados mixtos en lugar de puros

2.5.1. Entrelazamiento y no-localidad

Para obtener correlaciones no-locales de mediciones de un estado cuántico, es necesario que éste sea un estado entrelazado. En efecto, si el estado pudiese escribirse como

$$\rho_{AB} = \sum_{\lambda} p_{\lambda} \rho_A^{\lambda} \otimes \rho_B^{\lambda}, \quad (2.16)$$

se obtendrían las correlaciones

$$\begin{aligned} p(ab|xy) &= \text{tr} \left[\sum_{\lambda} p_{\lambda} (\rho_A^{\lambda} \otimes \rho_B^{\lambda}) M_a^x \otimes M_b^y \right] \\ &= \sum_{\lambda} p_{\lambda} \text{tr}(\rho_A^{\lambda} M_a^x) \text{tr}(\rho_B^{\lambda} M_b^y) \\ &= \sum_{\lambda} p_{\lambda} p(a|x, \lambda) p(b|y, \lambda), \end{aligned} \quad (2.17)$$

lo que es de la forma local (1.2). Si bien todo sistema con correlaciones no-locales está entrelazado, la relación inversa es en general compleja. Se sabe que en el caso de estados puros es siempre posible encontrar medidas tales que las correlaciones obtenidas son no-locales. Sin embargo, hay clases de estados mixtos que admiten un modelo local para cualquier escogencia de medidas locales [44, 46], lo que significa que no violan ninguna desigualdad de Bell. Se ha propuesto que el problema en este caso es que realizar medidas en el estado mixto puede ser un proceso ineficaz para revelar no-localidad¹⁶. Otras alternativas para revelar la no-localidad de estados entrelazados consisten en la realización de medidas conjuntas en muchas copias del estado; es decir, considerando el estado $\rho = \rho \otimes \rho \otimes \cdots \otimes \rho$, o en el preprocesamiento de ρ antes de medir [47].

2.6. No-localidad en sistemas de muchos cuerpos

En la noción de no-localidad definida como la imposibilidad de escribir las correlaciones en la forma (1.1), dos observadores, Alicia y Bob, realizan las mediciones necesarias para establecer dichas correlaciones. Una extensión natural de este escenario al caso en que tres observadores toman parte llevaría a decir que las correlaciones conjuntas son locales si pueden ser escritas como

¹⁶Esto está relacionado a lo que se conoce en la literatura como *no-localidad oculta*.

$$p(abc|xyz) = \int d\lambda q(\lambda) p_\lambda(a|x) p_\lambda(b|y) p_\lambda(c|z), \quad (2.18)$$

donde $p(c|z)$ describe los resultados de la tercera parte (Carlos). Se dice entonces que el conjunto de correlaciones que puede ser escrita como (2.18) es el conjunto $\mathcal{L}$. El problema con esta extensión es que no considera algunos aspectos que surgen con la introducción de más observadores. Así, podrían tenerse distribuciones conjuntas en las que sólo dos de los observadores comparten correlaciones no-locales. Piénsese por ejemplo en una situación en la que $p(abc|xyz) = p(a|x)p(bc|yz)$, indicando que Alicia no está correlacionada con Bob-Carlos. Nótese que a pesar de que Alicia y Bob-Carlos no tienen correlaciones no-locales, (2.18) no se cumple si hay correlaciones no-locales entre Bob y Carlos. Cuando todas las partes están correlacionadas no-localmente se dice que hay *no-localidad genuina*.

2.6.1. No-localidad genuina en sistemas de muchos cuerpos

George Svetlichny sugirió en 1987 una extensión de la definición de no-localidad en el espíritu de las correlaciones bipartitas mencionadas arriba pero generalizadas a todas las posibles combinaciones de pares [48]. Aquí, si la probabilidad conjunta no puede ser escrita como¹⁷

$$\begin{aligned} p(abc|xyz) = & \int d\lambda q(\lambda) p_\lambda(ab|xy) p_\lambda(c|z) + \\ & + \int d\mu q(\mu) p_\mu(bc|yz) p_\mu(a|x) + \\ & + \int d\nu q(\nu) p_\nu(ac|xz) p_\nu(b|y) \end{aligned} \quad (2.19)$$

con $\int d\lambda q(\lambda) + \int d\mu q(\mu) + \int d\nu q(\nu) = 1$, se dice que las partes están correlacionadas no-localmente. Nuevamente, las correlaciones entre los pares involucrados son arbitrarias y pueden, en particular, ser no-locales. La combinación convexa dada en (2.19) puede interpretarse como que en cada “ronda” del experimento sólo dos de los observadores comparten recursos no locales. Evidentemente, otras características pueden ser agregadas a este modelo.

En el modelo de la ecuación (2.19) no hay ninguna restricción sobre las probabilidades conjuntas de los pares correlacionados. En particular, la condición de no-señalización, exigida en el caso de dos partes, no ha sido impuesta. En este caso, la extensión de (2.3) lleva a

¹⁷A pesar de que en esta discusión se usan explícitamente expresiones para sólo tres cuerpos, la generalización para n cuerpos es evidente.

$$\begin{aligned}
\sum_b p_\lambda(ab|xy) &= p_\lambda(a|xy) = p_\lambda(a|xy') \quad \forall a, x, y, y' \\
\sum_a p_\lambda(ab|xy) &= p_\lambda(b|xy) = p_\lambda(b|x'y) \quad \forall b, x, x', y
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Basta entonces imponer (2.20) a todas las correlaciones bipartitas de (2.19) para que no haya supraluminidad. Al conjunto de correlaciones que cumplen con (2.19) se le denota $S_{2|1}^{Svet}$ mientras que el conjunto que cumple con (2.19) y (2.20) es $S_{2|1}^{NS}$. Es evidente que $\mathcal{L} \subset S_{2|1}^{NS} \subset S_{2|1}^{Svet}$.

Se ha visto que es posible concebir una extensión del concepto de no-localidad al caso de muchas partes. Con esto en mano, es natural preguntarse si hay desigualdades que permitan poner en evidencia la no-localidad genuina de un sistema dado. La respuesta es afirmativa, como era de esperarse, y un ejemplo de esto lo constituye la desigualdad de Svetlichny [48]. Sean x_j y x'_j las dos posibles medidas que puede realizar el observador j , y sean $a_j = \pm 1$ y $a'_j = \pm 1$ los posibles resultados, respectivamente. Svetlichny demostró que para cualquier distribución que se puede escribir en la forma (2.19) se cumple

$$\begin{aligned}
S_3 &= a_1 a_2 a'_3 + a_1 a'_2 a_3 + a'_1 a_2 a_3 - a'_1 a'_2 a'_3 \\
&\quad a'_1 a'_2 a_3 + a'_1 a_2 a'_3 + a_1 a'_2 a'_3 - a_1 a_2 a_3 \leq 4
\end{aligned} \tag{2.21}$$

donde $a_1 a_2 a'_3$ debe leerse como el valor esperado del producto de los resultados cuando las medidas son x_1 , x_2 y x'_3 . Desde luego, la violación de (2.21) es un indicador de no-localidad. Como fue demostrado en 2002 por Collins y colaboradores [25], y Seevinck junto a Svetlichny [49], es posible generalizar la desigualdad de Svetlichny a un escenario con un número arbitrario de cuerpos, medidas y sistemas. Se tiene, por ejemplo,

$$S_n = S_{n-1} a'_n + S'_{n-1} a_n \leq 2^{n-1} \tag{2.22}$$

donde S'_{n-1} se obtiene a partir de S_{n-1} bajo el cambio $a_1 \rightarrow a'_1$, $a'_1 \rightarrow a_1$.

2.6.2. No-localidad y entrelazamiento en sistemas de muchos cuerpos

Ya se ha visto en la sección 2.5.1 que la no-localidad de un sistema de dos cuerpos implica su entrelazamiento. De forma similar, la presencia de no-localidad *genuina* de muchos cuerpos

evidencia el entrelazamiento *genuino* de muchos cuerpos [43]. En la dirección opuesta se ha visto que el entrelazamiento de estados puros implica no-localidad en un escenario de dos cuerpos. En el caso de más de dos cuerpos no es sabido si todos los estados puros genuinamente entrelazados son no-locales. Sin embargo, es sabido que, en términos de la definición de Svetlichny y agregando las condiciones de no-señalización, todos los estados tripartitos genuinamente entrelazados son no-locales [50].

www.bdigital.ula.ve

Capítulo 3

Desigualdades de Bell a partir de funciones de correlación de dos cuerpos

En este capítulo se presenta una discusión general de las desigualdades de Bell que pueden ser escritas en términos de funciones de correlación que involucran sólo dos cuerpos a la vez en escenarios $(N, 2, 2)$. Las familias de estas desigualdades que poseen simetrías permutacional o traslacional son también estudiadas siguiendo los resultados obtenidos en [18, 19], trabajos en los que se basa todo el contenido de este capítulo y que deben ser consultados si se desea una demostración de los numerosos resultados matemáticos aquí plasmados.

3.1. Correlaciones en escenarios con muchos cuerpos

La desigualdad CHSH fue usada en la introducción para presentar el concepto de desigualdad de Bell. Esta desigualdad, que involucra dos observadores (dos cuerpos), está escrita en términos de valores esperados del producto de las salidas (funciones de correlación) para una elección de medidas dada (véase ecuación (2.8)). Desigualdades de Bell para casos con más cuerpos involucran en general funciones de correlación entre múltiples cuerpos a la vez, lo que quiere decir que los resultados del experimento están descritos por una colección de

probabilidades conjuntas de la forma

$$\{p(a_1, \dots, a_N | x_1, \dots, x_N)\}_{a_1, \dots, a_N | x_1, \dots, x_N} \quad (3.1)$$

donde $p(a_1, \dots, a_N | x_1, \dots, x_N)$ denota la probabilidad de obtener los resultados $a_1, \dots, a_N$ al realizar las mediciones $\mathcal{M}_{x_1}^{(i_1)}, \dots, \mathcal{M}_{x_N}^{(i_N)}$. En el caso en que cada observador escoge entre dos posibles observables $\mathcal{M}_{x_i}^{(i)}$ ($x_i = 0, 1$) que tienen dos posibles resultados $a_i = \pm 1$, estas probabilidades conjuntas pueden traducirse en una colección de valores esperados de la forma

$$\left\{ \langle \mathcal{M}_{x_1}^{(i_1)} \dots \mathcal{M}_{x_k}^{(i_k)} \rangle \right\}_{i_1, \dots, i_k; x_1, \dots, x_k} \quad (3.2)$$

donde, por definición,

$$\langle \mathcal{M}_x^{(i)} \rangle = \sum_{a_i \in \{\pm 1\}} a_i p(a_i | x) \quad (3.3)$$

$$\langle \mathcal{M}_x^{(i)} \mathcal{M}_y^{(j)} \rangle = \sum_{a_i, a_j \in \{\pm 1\}} a_i a_j p(a_i a_j | xy)$$

Es claro que para modelos clásicos se cumple, en el espíritu de (1.1), $\langle \mathcal{M}_{x_1}^{(i_1)} \dots \mathcal{M}_{x_k}^{(i_k)} \rangle = \langle \mathcal{M}_{x_1}^{(i_1)} \rangle \dots \langle \mathcal{M}_{x_k}^{(i_k)} \rangle$, con $\langle \mathcal{M}_x^{(i)} \rangle = \pm 1$ [19]. Es decir, el conjunto de correlaciones clásicas está aquí caracterizado por la envolvente convexa de estos últimos correladores¹ deterministas. Estas correlaciones producidas usando estrategias locales deterministas caracterizan los vértices del conjunto $\mathcal{Q}$, que está contituido por aquellas correlaciones expresables como²

$$\langle \mathcal{M}_{x_1}^{(i_1)} \dots \mathcal{M}_{x_k}^{(i_k)} \rangle = \text{Tr} \left[\rho_{A_{i_1} \dots A_{i_k}} (\mathcal{M}_{x_1}^{(i_1)} \otimes \dots \otimes \mathcal{M}_{x_k}^{(i_k)}) \right] \quad (3.4)$$

donde $\rho_{A_{i_1} \dots A_{i_k}}$ es el subsistema de ρ que da cuenta del estado cuántico compartido por las partes $A_{i_1} \dots A_{i_k}$.

Las correlaciones clásicas pueden definirse a partir de los vértices antes mencionados como una combinación convexa de éstos. Sean $\mathbf{v}_\lambda$ los vértices y $\mathbf{c}$ las correlaciones clásicas, entonces

$$\mathbf{c} = \sum_{\lambda} p(\lambda) \mathbf{v}_\lambda \quad (3.5)$$

¹Como se habrá notado, los términos “función de correlación” y “correlador” son usados aquí intercambiamente.

²Ver sección 2.2.3.

donde λ denota la información clásica compartida entre las partes. Sea V_N el conjunto de vértices del politopo $\mathbb{P}_N$ de correlaciones clásicas, entonces $|V_N| = 2^{2N}$. Es posible demostrar que en la representación de los correladores cualquier distribución de probabilidad observada puede escribirse como

$$\sum_{a_i} p(a_1, \dots, a_i, \dots, a_N | x_1, \dots, x_i, \dots, x_N) = \frac{1}{2^N} \left(1 + \sum_{k=1}^N \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq N} a_{i_1}, \dots, a_{i_k} \langle \mathcal{M}_{x_1}^{(i_1)} \dots \mathcal{M}_{x_k}^{(i_k)} \rangle \right) \quad (3.6)$$

que cumplen, claramente, la condición de no-señalización

$$\sum_{a_i} p(a_1, \dots, a_i, \dots, a_N | x_1, \dots, x_i, \dots, x_N) = \sum_{a_i} p(a_1, \dots, a_i, \dots, a_N | x_1', \dots, x_i, \dots, x_N) \quad (3.7)$$

Cualquier conjunto de correlaciones será local si puede escribirse como (3.6) y si cumple con la condición $p(a_1, \dots, a_i, \dots, a_N | x_1, \dots, x_i, \dots, x_N) \geq 0$; es decir, si

$$1 + \sum_{k=1}^N \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq N} a_{i_1}, \dots, a_{i_k} \langle \mathcal{M}_{x_1}^{(i_1)} \dots \mathcal{M}_{x_k}^{(i_k)} \rangle \geq 0 \quad (3.8)$$

Como se vio en la sección 2.3.1, las desigualdades de Bell pueden expresarse en la forma $I := \mathbf{s} \cdot \mathbf{c}$, lo que se traduce aquí en expresiones de la forma

$$\sum_{k=1}^N \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq N} \sum_{j_1, \dots, j_k=0}^1 s_{j_1, \dots, j_k}^{i_1, \dots, i_k} \langle \mathcal{M}_{x_1}^{(i_1)} \dots \mathcal{M}_{x_k}^{(i_k)} \rangle \geq -\beta_C \quad (3.9)$$

donde la cota clásica está dada por $\beta_C = -\min_{\mathbf{c} \in \mathbb{P}_N} \mathbf{s} \cdot \mathbf{c}$.

Por qué aparecerían funciones de correlación que involucran varios cuerpos a la vez en los experimentos de Bell de múltiples partes es claro de la discusión anterior. Una pregunta interesante es, pues, si toda desigualdad útil para detectar no-localidad debe contener todas las funciones de correlación posibles. Un primer paso para la comprensión de este problema fue dado por Wiesniak et al [51], quienes demostraron que sería posible construir desigualdades de Bell a partir de correladores de $N - 1$ cuerpos a lo sumo. Como se verá a continuación, no sólo es posible ir más lejos sino que el caso extremo es válido; es decir, es posible construir desigualdades de Bell a partir de correladores de sólo dos cuerpos.

3.2. TBCBI

Los correladores de menor orden que pueden aparecer en una desigualdad de Bell de muchos cuerpos son

$$\langle \mathcal{M}_x^{(i)} \rangle, \quad \langle \mathcal{M}_x^i \mathcal{M}_y^j \rangle, \quad (3.10)$$

con $i < j = 1, \dots, N$. En el escenario de interés, $x, y = 0, 1$. El politopo $\mathbb{P}_N^2$ formado por el conjunto de estas correlaciones puede obtenerse tras eliminar todas las correlaciones de más alto orden en el politopo general $\mathbb{P}_N$. Sea $\mathbf{c}_2$ el vector de correlaciones clásicas que involucran correladores de dos cuerpos únicamente y sea P la proyección $P\mathbf{c} = \mathbf{c}_2$, entonces es claro que $\mathbb{P}_N^2 = \{P\mathbf{c} \mid \mathbf{c} \in \mathbb{P}_N\}$. Cuando el máximo orden de los correladores es de dos, la dimensión del politopo se reduce hasta llegar a $\dim \mathbb{P}_N^2 = 2N^2$. Esto no ocurre con los vértices, que son de hecho proyectados en una correspondencia uno a uno; es decir, $|V_N^2| = |V_N| = 2^{2N}$ [18]. Para terminar de caracterizar el politopo $\mathbb{P}_N^2$ hay que determinar sus facetas. Esto se hace hallando las desigualdades de Bell herméticas que involucran correladores entre dos cuerpos a lo sumo (TBCBI). La forma general de las TBCBI es

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \left(\alpha_i \langle \mathcal{M}_0^{(i)} \rangle + \beta_i \langle \mathcal{M}_1^{(i)} \rangle \right) + \sum_{i < j}^N \gamma_{ij} \langle \mathcal{M}_0^{(i)} \mathcal{M}_0^{(j)} \rangle + \\ & \sum_{i \neq j}^N \delta_{ij} \langle \mathcal{M}_0^{(i)} \mathcal{M}_1^{(j)} \rangle + \sum_{i < j}^N \varepsilon_{ij} \langle \mathcal{M}_1^{(i)} \mathcal{M}_1^{(j)} \rangle + \beta_C \geq 0, \end{aligned} \quad (3.11)$$

donde se pueden distinguir los coeficientes como la forma explícita de los introducidos en la ecuación (3.9). El hecho de que el número de vértices de las TBCBI no se reduzca en general hace que la tarea de hallar todos los vértices sea igual de difícil. Sin embargo, si se imponen ciertas simetrías en las TBCBI, el politopo puede en efecto simplificarse.

3.3. Imponiendo simetría bajo permutaciones

Imponer simetría permutacional en las TBCBI es requerir que los valores esperados $\langle \mathcal{M}_x^{(i)} \rangle$ y $\langle \mathcal{M}_x^{(i)} \mathcal{M}_y^{(j)} \rangle$ aparezcan en la ecuación (3.11) con el mismo peso, de manera que $\alpha_i = \alpha$, $\beta_i = \beta$, etc. En este caso la forma general de las TBCBI puede reescribirse como

$$I := \alpha \mathcal{S}_0 + \beta \mathcal{S}_1 + \frac{\gamma}{2} \mathcal{S}_{00} + \delta \mathcal{S}_{01} + \frac{\varepsilon}{2} \mathcal{S}_{11} \geq -\beta_C, \quad (3.12)$$

donde $\mathcal{S}_x$ y $\mathcal{S}_{xy}$ denotan los correladores simetrizados de uno y de dos cuerpos

$$\mathcal{S}_x = \sum_{i=1}^N \langle M_x^{(i)} \rangle, \quad \mathcal{S}_{xy} = \sum_{i \neq j=1}^N \langle \mathcal{M}_x^i \mathcal{M}_y^j \rangle \quad (3.13)$$

Bajo esta simetría el politopo $\mathbb{P}_2$ es proyectado a $\mathbb{P}_2^S$, que puede ser caracterizado por los vectores 5-dimensionales $(\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_{00}, \mathcal{S}_{01}, \mathcal{S}_{11})$. Los vértices de $\mathbb{P}_2^S$ pueden tratarse a través de una parametrización simple. Para cada elemento de V_N^S sean $x_i = \langle \mathcal{M}_0^{(i)} \rangle$ y $y_i = \langle \mathcal{M}_1^{(i)} \rangle$ el par de valores esperados deterministas para el observador i y sea $\{x_i, y_i\}$ la estrategia local correspondiente. Dada la simetría permutacional, es claro que los valores de $\mathcal{S}_0$ y $\mathcal{S}_1$ no dependen de la escogencia particular de las estrategias locales sino del número de partes que eligen una estrategia dada. Por ejemplo, sean a, b, c y d los números de partes que aplican las estrategias locales $\{1, 1\}$, $\{1, -1\}$, $\{-1, 1\}$ y $\{-1, -1\}$, respectivamente, entonces

$$\mathcal{S}_0 = a + b - c - d, \quad \mathcal{S}_1 = a - b + c - d, \quad a + b + c + d = N. \quad (3.14)$$

De la definición de $\mathcal{S}_{xy}$ es claro además que

$$\mathcal{S}_{xy} = \mathcal{S}_x \mathcal{S}_y - \sum_{i=1}^N \langle \mathcal{M}_x^{(i)} \rangle \langle \mathcal{M}_y^{(i)} \rangle \quad (x, y = 0, 1), \quad (3.15)$$

lo que significa que los valores esperados simetrizados de dos cuerpos pueden expresarse como

$$\mathcal{S}_{00} = \mathcal{S}_0^2 - N = (a + b - c - d)^2 - N \quad (3.16)$$

$$\mathcal{S}_{11} = \mathcal{S}_1^2 - N = (a - b + c - d)^2 - N \quad (3.17)$$

$$\mathcal{S}_{01} = \mathcal{S}_0 \mathcal{S}_1 - \sum_{i=1}^N \langle \mathcal{M}_0^{(i)} \rangle \langle \mathcal{M}_1^{(i)} \rangle = (a + b - c - d)(a - b + c - d) - (a - b - c + d) \quad (3.18)$$

Todos los vértices de $\mathbb{P}_2^S$ pueden por lo tanto ser parametrizados por la cuaterna $\{a, b, c, d\}$, que forma un tetraedro $\mathbb{T}_N = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{N}^4 | a + b + c + d = N\}$ isomorfo a $\mathbb{T}_N = \{(a, b, c) \in \mathbb{N}^3 | a + b + c \leq N\}$. Es posible demostrar [18] que todos los vértices de $\mathbb{P}_2^{S3}$

³Con la simetría en consideración, $|V_N^2| = 2(n^2 + 1)$ [19].

pueden ser representados por las cuaternas que pertenecen a la frontera $\partial\mathbb{T}_N$ de $\mathbb{T}_N$. Una consecuencia directa de esto se relaciona con la computación de la cota clásica β_C , que puede entonces calcularse minimizando I como función de a, b, c, d en la frontera de $\mathbb{T}_N$; es decir, $\beta_C = -\min_{\partial\mathbb{T}_N} I$.

3.3.1. Una familia simétrica particular de TBCBles

Siguiendo la parametrización usada en [18], se considerará la familia de desigualdades que surge al hacer

$$\begin{aligned}\gamma &= k^2 \\ \varepsilon &= l^2 \\ \delta &= \sigma kl\end{aligned}\tag{3.19}$$

$$\alpha_{\pm} = k[\sigma\mu \pm (k+l)],$$

donde k, l son números naturales positivos, y $\sigma = \pm 1$ da cuenta del signo de δ . Se supone además que $\mu = \beta/l$ es un entero de paridad opuesta a la de ε para n impar y de paridad opuesta a la de γ para n par.

En términos de la parametrización (3.14)-(3.18), la expresión I de (3.12) queda como

$$I = \alpha\mathcal{S}_0 + \beta\mathcal{S}_1 + \frac{\gamma}{2}(\mathcal{S}_0^2 - N) + \delta(\mathcal{S}_0\mathcal{S}_1 - m) + \frac{\varepsilon}{2}(\mathcal{S}_1^2 - N)\tag{3.20}$$

donde $m = a - b - c + d$. Y considerando (3.19) se tiene

$$\begin{aligned}I &= \frac{k^2}{2}\mathcal{S}_0^2 + \sigma kl\mathcal{S}_0\mathcal{S}_1 + \frac{l^2}{2}\mathcal{S}_1^2 - \frac{N}{2}(k+l) - \sigma klm \\ &\quad + k[\sigma\mu \pm (k+l)] + \beta\mathcal{S}_1\end{aligned}\tag{3.21}$$

Usando la parametrización de S_x en términos de a, b, c y d se encuentra que $\pm\mathcal{S}_l \mp \sigma\mathcal{S}_1 - \sigma m = 4r - n$, con

$$\begin{cases} b & \text{para} & \alpha_+, \sigma = 1 \\ a & \text{para} & \alpha_+, \sigma = -1 \\ c & \text{para} & \alpha_-, \sigma = 1 \\ d & \text{para} & \alpha_-, \sigma = -1 \end{cases},\tag{3.22}$$

de manera que

$$I = \frac{1}{2}(k\mathcal{S}_0 + \sigma l\mathcal{S}_1 + \sigma\mu \pm x)^2 + 4klr - \frac{1}{2}[(\sigma\mu \pm k)^2 + N(k+l)^2] \quad (3.23)$$

Como se ha demostrado en [18], la cota clásica de (3.23) es

$$\beta_C = \frac{1}{2}[N(k+l)^2 + (\sigma\mu \pm k)^2 - 1] \quad (3.24)$$

Con esta familia de desigualdades en mano, el próximo paso es determinar si alguna de ellas es violada por estados cuánticos. Para esto, considérense los valores particulares $k = l = -\sigma = 1$ y $\alpha_- = -2$. De (3.24), $\beta_C = 2N$ y se tiene entonces la desigualdad

$$-2\mathcal{S}_0 + \frac{1}{2}\mathcal{S}_{00} - \mathcal{S}_{01} + \frac{1}{2}\mathcal{S}_{11} + 2N \geq 0 \quad (3.25)$$

Para examinar la violación de (3.25) por estados cuánticos considérense los siguientes observables para todas las partes

$$\mathcal{M}_0^i = \mathcal{M}_0 = \sigma_z, \quad \mathcal{M}_1^i = \mathcal{M}_1 = \cos\theta\sigma_z + \sin\theta\sigma_x, \quad (3.26)$$

con $i = 1, \dots, N$ y donde $\theta \in [0, \pi]$ y σ_x, σ_z son las correspondientes matrices de Pauli.

Naturalmente, si el operador

$$\hat{B}_N(\theta) = -2\hat{\mathcal{S}}_0 + \frac{1}{2}\hat{\mathcal{S}}_{00} - \hat{\mathcal{S}}_{01} + \frac{1}{2}\hat{\mathcal{S}}_{11} + 2N\mathbf{1} \quad (3.27)$$

tiene autovalores negativos para algún ángulo θ , la desigualdad es violada. Nótese que $\hat{\mathcal{S}}_0$ y $\hat{\mathcal{S}}_{xy}$ denotan los operadores obtenidos al insertar los observables de (3.26) en los valores esperados $\mathcal{S}_0$ y $\mathcal{S}_{xy}$ y que $\mathbf{1}$ es la matriz identidad.

Lluis Masanes demostró [52] que en el escenario $(N, 2, 2)$ basta hallar, en la empresa de encontrar la cota cuántica, los estados que violan máximamente la desigualdad en cuestión al usar las observables $\mathcal{M}_j^{(i)} = \cos\phi_j^{(i)}\sigma_x + \sin\phi_j^{(i)}\sigma_z$. El autovalor del operador así construido asociado al autovector que viole máximamente la desigualdad será entonces la cota cuántica. Los resultados de Masanes implican que ninguna otra escogencia de observables dará lugar a una violación mayor. Si bien las observables de interés pueden ser otras, conocer la cota cuántica de una desigualdad tiene la ventaja de dar el límite de optimización posible sobre los estados y observables de interés. Si con los estados y observables de interés se ha llegado al valor óptimo obtenido con $\mathcal{M}_j^{(i)} = \cos\phi_j^{(i)}\sigma_x + \sin\phi_j^{(i)}\sigma_z$, entonces se puede parar la optimización pues se ha llegado al mejor valor posible. Puede ocurrir, como en el caso de la desigualdad que se viene estudiando, que los valores óptimos sean siempre obtenidos para

un ángulo específico en una de las “observables de Masanes”, por lo que es suficiente optimizar en los ángulos del resto de las observables. Es por esto que se usa aquí $\mathcal{M}_0 = \sigma_z$ en lugar de la más general $\mathcal{M}_0 = \cos \phi \sigma_z + \sin \phi \sigma_x$. Lo mismo ocurrirá en otras desigualdades presentadas más adelante. El razonamiento aquí planteado será igualmente válido en esas ocasiones.

Usando argumentos de simetría, el operador $\hat{B}_N(\theta)$ puede ser escrito en términos de los dos bloques $\hat{B}_N^S(\theta)$ y $\hat{B}_N^R(\theta)$ como $\hat{B}_N^S(\theta) \otimes \hat{B}_N^R(\theta)$, donde $\hat{B}_N^S$ se define en el subespacio simétrico de un espacio de Hilbert de N qubits y $\hat{B}_N^R$ en el subespacio suplementario. La forma analítica de $\hat{B}_S(\theta)$ es

$$(\hat{B}_N^S(\phi, \theta))_l^k = d_k \delta_{k,l} + u_k \delta_{k,l-1} + u_l \delta_{k-1,l} + v_k \delta_{k,l-2} + v_l \delta_{k-2,l}, \quad (3.28)$$

donde d_k ($0 \leq k \leq N$), u_k ($0 \leq k \leq N-1$) y v_k ($0 \leq k \leq N-2$) dan cuenta de los elementos de las diagonales centrales del operador y están dados por

$$d_k = \beta_C + (N-2k)A + (N(N-1)/2 - 2k(N-k))B + k(N-k)C \quad (3.29)$$

$$u_k = (A' + (N-1-2k)D)\sqrt{(N-k)(k+1)} \quad (3.30)$$

$$C\sqrt{(N-k)(N-k-1)(k+1)(k+2)}/2, \quad (3.31)$$

con

$$\begin{aligned} A &= \alpha \cos \phi + \beta \cos \theta, \\ A' &= \alpha \sin \phi + \beta \sin \theta, \\ B &= \gamma \cos^2 \phi + 2\delta \cos \phi \cos \theta + \varepsilon \cos^2 \theta, \\ C &= \gamma \sin^2 \phi + 2\delta \sin \phi \sin \theta + \varepsilon \sin^2 \theta, \\ D &= \gamma \cos \phi \sin \phi + \delta \cos \phi \sin \theta + \varepsilon \cos \theta \sin \theta \end{aligned} \quad (3.32)$$

Para determinar si la desigualdad es violada basta entonces buscar los autovalores negativos de $\hat{B}_N^S(\theta)$ variando θ . Los resultados de tal búsqueda arrojan, como se indica en [18], un comportamiento como el ilustrado en la Figura 3.1. Es claro, pues, que existen autovalores negativos del operador, lo que implica que hay violación, que es lo que se quería determinar. Nótese en la Figura mencionada que hay un valor asintótico para la violación efectiva de la desigualdad cuando $N \rightarrow \infty$. Esto implica que el entrelazamiento, que da lugar a la no-localidad, se estaría manifestando a nivel macroscópico. Cuando se usan algunos estados que surgen en escenarios importantes en materia condensada, por ejemplo, la violación decae cuando $N \rightarrow \infty$ [18]; es decir, los fenómenos cuánticos no se manifiestan a escala

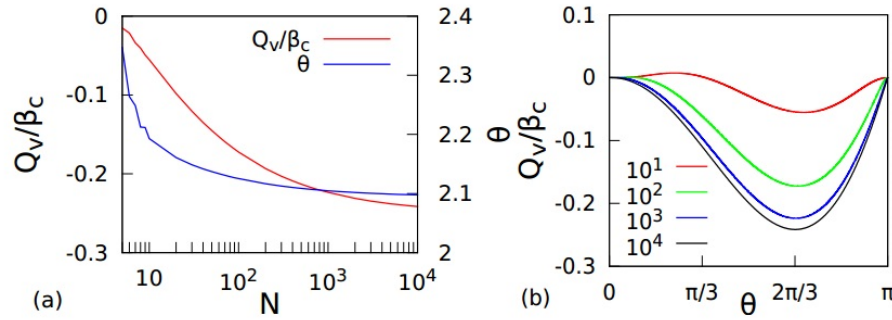


Figura 3.1: Violación de la desigualdad (3.25)

(a) Cociente de las cotas cuántica y clásica de (3.25) (en rojo) y ángulo θ correspondiente (en azul) como función de N . (b) Violación efectiva de (3.25) como función de θ para $N = 10, 10^2, 10^3, 10^4$.

Tomada de [18] con permiso de los autores.

macroscópica. El que se haya encontrado un valor asintótico usando las observables con espines demuestra que en principio sería posible lograr que se manifiesten los fenómenos cuánticos macroscópicamente. Si se puede encontrar un sistema físico de interés que logre llegar a este valor o no es un problema importante para investigaciones futuras.

3.4. Imponiendo simetría bajo traslaciones

Se estudiarán ahora las TBCBI que surgen al imponer la siguiente condición

$$\mathcal{M}_j^{(i)} \rightarrow \mathcal{M}_j^{i+1} \quad (j = 0, 1), \quad (3.33)$$

donde se asume la convención $\mathcal{M}_j^{(N+k)} = \mathcal{M}_j^{(k)}$ para cualquier $k = 1, \dots, N$ y $j = 0, 1$. Al aplicar esta condición en los términos de (3.11) se sigue [19]

$$\alpha_i = \alpha_{i+1}, \quad \beta_i = \beta_{(i+1)} \quad (i = 1, \dots, N-1) \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{1,1+k} &= \gamma_{2,2+k} = \dots = \gamma_{N-k,N} \\ &= \gamma_{1,N-k+1} = \gamma_{2,N-k+2} = \dots = \gamma_{k,N} \quad (k = 1, \dots, \lfloor N/2 \rfloor) \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1,1+k} &= \varepsilon_{2,2+k} = \dots = \varepsilon_{N-k,N} \\ &= \varepsilon_{1,N-k+1} = \varepsilon_{2,N-k+2} = \dots = \varepsilon_{k,N} \quad (k = 1, \dots, \lfloor N/2 \rfloor) \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} \delta_{1,1+k} &= \delta_{2,2+k} = \cdots = \delta_{N-k,N} \\ &= \delta_{1,N-k+1} = \delta_{2,N-k+2} = \cdots = \delta_{k,N} \quad (k = 1, \dots, N-1) \end{aligned} \quad (3.37)$$

Sean entonces $\alpha = \alpha_i$, $\beta = \beta_i$ ⁴, γ_k , ε_k y δ_k los coeficientes que cumplen con las igualdades cíclicas arriba escritas. Cualquier TBCBI con simetría traslacional puede entonces ser escrita como

$$\alpha \mathcal{S}_0 + \beta \mathcal{S}_1 + \sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} \left(\gamma_k \mathcal{T}_{00}^{(k)} + \varepsilon_k \mathcal{T}_{11}^{(k)} \right) + \sum_{k=1}^{N-1} \delta_k \mathcal{T}_{01}^{(k)} \geq -\beta_C \quad (3.38)$$

donde

$$\mathcal{S}_x = \sum_m^N \langle \mathcal{M}_x^{(m)} \rangle \quad (j = 0, 1) \quad (3.39)$$

y

$$\mathcal{T}_{xy}^{(k)} = \sum_{m=1}^N \langle \mathcal{M}_x^m \mathcal{M}_y^{(m+k)} \rangle \quad (x \leq y = 0, 1) \quad (3.40)$$

con $k = 1, \dots, \lfloor N/2 \rfloor$ para $x = y$ y $k = 1, \dots, N-1$ para $x < y$.

El politopo de las TBCBI con simetría traslacional puede caracterizarse de manera efectiva con las facetas del politopo local correspondiente. Sea P_T un mapeo que proyecta las correlaciones pertenecientes a $\mathbb{R}^{2N^2}$ a un vector de la forma

$$\left(\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1, \mathcal{T}_{00}^{(1)}, \dots, \mathcal{T}_{00}^{(\lfloor N/2 \rfloor)}, \mathcal{T}_{01}^{(1)}, \dots, \mathcal{T}_{01}^{(N-1)}, \mathcal{T}_{11}^{(1)}, \dots, \mathcal{T}_{11}^{(\lfloor N/2 \rfloor)} \right) \quad (3.41)$$

se sigue entonces que el politopo de todas las correlaciones locales con invariancia traslacional está dado por $\mathbb{P}_N^{2,T} = P_T \mathbb{P}_N^2$ [19]

Para saber si las desigualdades halladas son violadas por estados cuánticos puede usarse [52]

$$\mathcal{M}_j^{(i)} = \cos \phi_j^{(i)} \sigma_x + \sin \phi_j^{(i)} \sigma_z \quad (3.42)$$

con $\phi_j^{(i)} \in [0, \pi/2]$ para $i = 1, \dots, N$, $j = 0, 1$. Nuevamente, si el correspondiente operador de Bell tiene autovalores negativos, se dice que la desigualdad es violada. Para hallar la máxima

⁴Nótese que (3.33) implica que todos los α_i son iguales (α), lo mismo que todos los β_i (β).

violación cuántica basta entonces optimizar los mínimos autovalores sobre ϕ . Si se impone ahora la invariancia traslacional en la forma $\phi_j^{(i)} = \phi_j$ puede construirse un estado mixto de qubits que logra la máxima violación. De acuerdo con [19], este estado tiene la forma

$$\varrho = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} V_2^k |\psi\rangle \langle \psi| (V_2^\dagger)^k \quad (3.43)$$

donde $|\psi\rangle \in (\mathbb{C}^2)^{\otimes N}$ es un estado puro que viola una desigualdad dada con el *mismo* par de observables en el mismo sitio y V_d es un operador de corrimiento ⁵ que cumple con

$$V_d |\phi_1\rangle \cdots |\phi_N\rangle = |\phi_N\rangle |\phi_1\rangle \cdots |\phi_{N-1}\rangle \quad (3.44)$$

3.5. TBCBI con invariancia traslacional para el caso $N = 4$

Si $N = 4$ ⁶ es claro que la desigualdad (3.38) queda de la forma

$$\begin{aligned} \alpha \mathcal{S}_0 + \beta \mathcal{S}_1 + \gamma_1 \mathcal{T}_{00}^1 + \gamma_2 \mathcal{T}_{00}^{(2)} + \varepsilon_1 \mathcal{T}_{11}^{(1)} + \varepsilon_2 \mathcal{T}_{11}^{(2)} + \\ \delta_1 \mathcal{T}_{01}^{(1)} + \delta_2 \mathcal{T}_{01}^{(2)} + \delta_3 \mathcal{T}_{01}^{(3)} + \beta_C \geq 0 \end{aligned} \quad (3.45)$$

Un gran número de estas desigualdades han sido tabuladas en [19], donde se han plasmado explícitamente los valores de las cotas clásica y cuántica. En el cuadro 3.5 se muestran algunas de estas desigualdades a través de la especificación de los coeficientes correspondientes. Las primeras dos columnas muestran los valores de las cotas cuánticas y clásica. En todos los casos tabulados $\beta_Q + \beta_C < 0$, lo que significa que son violadas. Sin embargo, hay desigualdades en esta familia que no son violadas ($\beta_Q + \beta_C = 0$). Para $N > 5$ no se dispone aún de desigualdades útiles para detectar no-localidad, y una desigualdad escrita para N arbitrario está incluso más lejos en este caso. Las desigualdades que vayan siendo construidas serán útiles en la medida en que se puedan generar los sistemas cuánticos relevantes experimentalmente.

⁵Shift operator.

⁶A lo largo de esta monografía se usan n y N intercambiabilmente para designar el número de cuerpos u observadores en el sistema involucrado.

Cuadro 3.1: Algunas de las TBCBIs con invariancia traslacional para $N = 4$ presentadas en [19]. Los coeficientes son los correspondientes a los de la ecuación (3.45) y las cotas han sido calculadas siguiendo algoritmos bien conocidos [51]

β_Q	β_C	α	β	γ_1	δ_1	δ_3	ε_1	γ_2	δ_2	ε_2
-8,42	8	-2	-2	1	0	1	1	0	1	0
-9,27	8	0	0	-2	-1	-1	2	1	0	1
-11,31	8	0	0	0	0	0	0	-1	2	1
-12,26	12	0	2	-2	0	0	0	2	1	0
-12,97	12	0	2	-3	-1	-1	1	1	2	0
-13,60	12	0	0	-1	-1	-2	4	0	-1	2
-14,42	12	0	0	1	1	2	2	-1	3	1
-14,77	12	0	0	0	-1	-1	4	-1	-2	2
-16,60	16	-2	-2	1	2	2	-4	0	0	3
-16,72	16	-4	-4	1	2	2	0	0	2	1
-17,25	16	-1	-1	-5	2	2	1	3	-1	0
-17,50	16	1	3	1	2	2	3	-1	3	2
-18,02	16	0	0	-2	-3	-3	4	1	0	3
-18,37	16	-2	-2	2	2	2	2	-1	4	1
-20,36	20	-2	-4	0	2	2	4	1	4	0
-20,77	20	-2	-8	-1	2	2	4	0	0	2
-20,84	20	-2	-8	-1	1	1	4	0	2	2
-21,18	20	-2	4	0	-2	-2	4	-1	-4	2
-21,89	20	0	2	-6	2	2	2	3	-2	0
-21,93	20	0	2	-4	-2	-2	0	2	4	-1
-25,01	24	0	4	-2	2	4	0	-1	-4	3
-25,30	24	-2	-2	-6	4	4	2	5	0	1
-28,40	28	-2	-8	-4	0	0	4	1	4	2
-28,41	28	-6	8	1	-4	-4	4	0	-4	2
-28,48	28	-6	8	0	-4	-4	4	1	-4	2

Capítulo 4

Detección de no-localidad en sistemas de muchos cuerpos

En este capítulo se presentan algunos de los cambios que han de ser introducidos en las desigualdades de Bell al considerar experimentos reales, esto es, no ideales. En particular, el loophole de detección, que aparece por la potencial baja eficacia de los detectores presentes en la mayoría de los intentos por detectar no-localidad, es discutido. Finalmente, un análisis de cómo deben modificarse las TBCBIs para tomar en cuenta la ineficacia de detección permite conseguir las eficacias críticas que dan lugar a la violación de las TBCBIs modificadas con invariancias permutacional y traslacional por los estados cuánticos mencionados en el capítulo precedente.

4.1. Aspectos experimentales

A la hora de diseñar experimentos para detectar no-localidad, la producción de sistemas entrelazados es una condición fundamental. Las primeras propuestas experimentales para evaluar teorías de variables ocultas se remontan a las de John Clauser et al [4] y Alain Aspect et al [6] entre las décadas de 1960 y 1980. En todas estas propuestas se usan procesos de cascada atómica [53] para crear fotones entrelazados polarizados para luego medir la polarización de los fotones usando polarizadores y fotomultiplicadores. En propuestas más tardías se miden otras propiedades como el momentum de los fotones en lugar de la polarización [54]. Recientemente también han sido usados sistemas atómicos para evaluar la no-localidad [7, 55]. La labor de diseñar arreglos experimentales para analizar la localidad de

sistemas particulares es tanto o más relevante que las líneas de índole más teórica del área de la no-localidad de Bell. El lector es invitado a consultar los trabajos [56] y [57] para una revisión de los aspectos experimentales involucrados.

4.2. El loophole de detección

El uso de fotones tanto en experimentos de Bell como en implementaciones en criptografía y computación es prácticamente inevitable. Detectar fotones no es una tarea fácil, y la eficacia de los mejores detectores disponibles no supera, en el mejor de los casos, el 70 %. Esta eficacia se ve fuertemente disminuida por distintos ruidos presentes en los experimentos, pudiendo llegar a niveles tan bajos como 20 % [9]. Esta baja eficacia implica que los aparatos usados para detectar no-localidad no tienen siempre salidas concluyentes. Además de las salidas asociadas a la medición en cuestión, hay una salida extra asociada a la no detección, denominado evento de no-click. Así, por ejemplo, los escenarios con dos salidas, -1 y $+1$, digamos, tendrían una salida adicional, denotada por $\emptyset$. Es evidente que considerar los eventos de no-click modifica lo modelos en cuestión.

Los eventos de no-click podrían en principio descartarse bajo la suposición de que los eventos de detección constituyen una muestra que representa fielmente la totalidad de la data. Sin embargo, este no es necesariamente siempre el caso. Para tener una idea de cómo cambia el modelo al considerar los eventos de no-click, supóngase que se tienen dos observadores, Alicia y Bob, y que η es la eficacia de los detectores usados por ellos. La probabilidad de que cada uno de ellos tenga una salida válida es ahora $\eta p(a|x)$ para Alicia y $\eta p(b|y)$ para Bob. Naturalmente, existe la probabilidad complementaria $(1 - \eta)$ de que se tenga un no-click. La probabilidad conjunta depende ahora de las salidas obtenidas de la siguiente manera:

$$p(ab|xy) = \begin{cases} \eta^2 p(ab|xy) & \text{si } a \neq \emptyset, b \neq \emptyset \\ \eta(1 - \eta)p(a|x) & \text{si } (a, b) = (a, \emptyset) \text{ con } a \neq \emptyset \\ \eta(1 - \eta)p(b|y) & \text{si } (a, b) = (\emptyset, b) \text{ con } b \neq \emptyset \\ (1 - \eta)^2 & \text{si } (a, b) = (\emptyset, \emptyset) \end{cases} \quad (4.1)$$

Nótese que η no es necesariamente igual para ambos observadores. En un caso menos restringido, $\eta_A \neq \eta_B$. Esto ocurre, por ejemplo, en experimentos en los que se usan átomos y fotones en distinta combinación. En estos sistemas, llamados *mixtos*, existe una gran diferencia entre las eficacias, que son cercanas a 100 % cuando hay átomos involucrados y que son

bastante más bajas en el caso de los fotones. Para una discusión detallada del tratamiento teórico de estos experimentos, conocidos como *asimétricos*, el lector puede referirse a [58]. El caso más general involucra eficacias de detección que dependen no sólo del observador sino de la cantidad física que se está midiendo. Así, por ejemplo, en un escenario $(2, 2, 2)$ podrían tenerse, en principio, las eficacias η_{A_0} , η_{A_1} , η_{B_0} y η_{B_1} .

En la importante tarea de caracterizar las desigualdades de Bell modificadas (dependientes de η), diversas propiedades generales han sido derivadas. Se sabe, por ejemplo, que la eficacia crítica, η^* , está relacionada al número de posibles medidas de cada observador de manera que

$$\eta^* \geq \frac{m_A + m_B - 2}{m_A m_B - 1} \quad (4.2)$$

donde m_A y m_B son los números de medidas para Alicia y Bob, respectivamente [59]. Otro resultado importante lo constituye una conjetura debida a Serge Massar y Stefano Pironio [59], probada hasta ahora para $N \leq 500$ que establece que

$$\eta^* \geq \frac{N}{M(N-1)+1} \quad (4.3)$$

donde N es el número de partes y M el número de medidas en cada parte. Cuando $M = 2$, que es el caso de interés a lo largo de esta monografía, la relación anterior se reduce a

$$\eta^* \geq \frac{N}{2N-1} \quad (4.4)$$

Nótese que si $N = 2$ —esto es, si hay dos observadores en juego, $\eta^* = 2/3$.

Considerar los no-click como un evento extra significa pasar de un escenario con Δ salidas a uno con $\Delta + 1$. Esto significa que las desigualdades que hayan sido obtenidas para Δ salidas no podrán ser usadas al considerar los eventos no-click. Una manera de común de solventar esta situación consiste en usar una estrategia preestablecida de asignar los eventos de no-click a una de las otras salidas. Esto implica que la salida que ha sido escogida para etiquetar no sólo su resultado intrínseco sino también los eventos de no-click ya no es usada. Esto ocurre porque, después de hacer esta asignación, la desigualdad es reescrita de manera tal que las probabilidades que involucran la salida escogida no aparecen¹. Descartar la salida válida asociada al no-click tiene, por otra parte, la ventaja de implicar el desuso del detector

¹Más adelante este procedimiento se hará más claro cuando sea aplicado al caso de las TBCBIs con invariancias permutacional y traslacional.

correspondiente, por lo que se verán involucrados sólo $\Delta - 1$ detectores. Naturalmente, este procedimiento no es el más óptimo pues se está descartando parte de la información. Sin embargo, no está claro aún cuán lejano del procedimiento ideal (con $\Delta + 1$ salidas) se está al seguir esta estrategia. Baste por ahora decir que es la manera más práctica, si no la única, de seguir teniendo las Δ salidas de las desigualdades de las que hipotéticamente se dispondría.

Cuando se sigue el procedimiento de fundir los eventos no-click con alguna de las salidas concluyentes, el escenario de (4.1) se ve modificado. Si se fusiona el evento de no detección con la i -ésima salida, efectuando el mapeo $\emptyset \rightarrow i$ la distribución de probabilidad queda de la forma

$$p(ab|xy) = \left\{ \begin{array}{ll} \eta^2 p(ab|xy) & \text{si } a \neq i, b \neq i \\ \eta^2 p(ai|xy) + \eta(1-\eta)p(a|x) & \text{si } (a, b) = (a, i) \text{ con } a \neq i \\ \eta^2 p(ib|xy) + \eta(1-\eta)p(b|y) & \text{si } (a, b) = (i, b) \text{ con } b \neq i \\ \eta^2 p(ii|xy) + \eta(1-\eta)p(i|x) + \eta(1-\eta)p(i|y) + (1-\eta)^2 & \text{si } (a, b) = (i, i) \end{array} \right\} \quad (4.5)$$

Al hacer la fusión del evento de no detección, las desigualdades se reescriben, usando el hecho de que todas las probabilidades suman 1, de manera que no aparezcan las probabilidades asociadas a i . Al hacer esto sólo aparecerán las componentes $p(ab|xy)$ y $p(a|x)$, $p(b|y)$ con $a, b \neq i$. Es decir,

$$\begin{aligned} p(a|x) &\rightarrow \eta p(a|x) \\ p(b|y) &\rightarrow \eta p(b|y) \quad \text{con } a, b \neq i \\ p(ab|xy) &\rightarrow \eta^2 p(ab|xy) \end{aligned} \quad (4.6)$$

4.2.1. La desigualdad CHSH modificada

Para ilustrar lo dicho hasta ahora en esta sección se estudiarán las consecuencias de considerar un $\eta \neq 1$ en la desigualdad CHSH (ver sección 2.3). Recuérdese que el máximo valor de la expresión asociada a CHSH con estados cuánticos es $S = 2\sqrt{2}$. Supóngase ahora que Alicia y Bob tienen acceso a detectores imperfectos de eficacia η y que, al obtener un evento de no-click, lo asignan a la salida +1. De acuerdo con (4.6), existe una probabilidad η^2 de que ambos detectores tengan una salida concluyente. En este caso los observadores logran el máximo valor $S = 2\sqrt{2}$. Cuando sólo uno de los detectores hace click, las salidas no están correlacionadas, lo que da lugar a $S = 0$ [9]. Por último, si ninguno de los detectores hace

click, lo que, según (4.6), ocurre con probabilidad $(1 - \eta)^2$, Alicia y Bob asignan la salida $+1$ y se obtiene la cota local $S = 2$ (cuando no hay click, no hay ninguna propiedad cuántica en juego). Para que la desigualdad se siga violando, debe cumplirse

$$\eta^2 2\sqrt{2} + (1 - \eta)^2 2 > 2 \quad (4.7)$$

de donde es claro que la desigualdad se sigue violando únicamente si η es mayor que un valor crítico dado en este caso por

$$\eta^* = \frac{2}{1 + \sqrt{2}} \approx 82,8\% \quad (4.8)$$

Para valores de η por debajo de η^* puede suceder que estados no cuánticos violen la desigualdad. A esto se le conoce como una *violación falsa*, y demuestra lo relevante que es cerrar el loophole de detección a la hora de usar las desigualdades de Bell como una prueba para determinar si un sistema dado es cuántico y esta entrelazado.

En la discusión anterior se ha asumido el uso del estado cuántico de máxima violación (para el que $S = 2\sqrt{2}$), que corresponde el estado máximamente entrelazado, para hallar el valor de η^* . Sin embargo, puede usarse, en principio, cualquier estado cuántico. Un resultado asombroso, publicado en 1993 por Philippe Eberhard [60], demostró que el uso de estados parcialmente entrelazados (para los que $2 < S < 2\sqrt{2}$) puede dar lugar a valores menores de η^* , obteniendo un valor óptimo para el estado $|\psi_\theta\rangle = \cos\theta|00\rangle + \sin\theta|11\rangle$ en el límite para $\theta \rightarrow 0$ de $\eta^* = 2/3$, valor que coincide con el predicho por la conjetura (4.4). El hecho de que estados parcialmente entrelazados puedan ser más robustos a la ineficacia de los detectores pone en evidencia que la relación entre entrelazamiento y no-localidad no es trivial.

4.3. TBCBIes modificadas

En el capítulo anterior se hallaron desigualdades construidas a partir de funciones de correlación de orden menor o igual que dos que son violadas por algunos estados cuánticos. El bajo orden de las funciones de correlación simplifica los aspectos experimentales involucrados. No obstante, se ha visto ya que, por debajo de una eficacia crítica en los detectores, estas desigualdades son inútiles. En esta sección se analiza el efecto de considerar detectores ideales en experimentos de Bell diseñados a partir de las TBCBIes. Un aspecto importante a tener en cuenta es el del número de salidas involucradas en estas TBCBIes. Recuérdese que estas desigualdades fueron construidas para escenarios $(n, 2, 2)$, lo que implica que considerar los

eventos de no-click como una salida válida no es una opción si se desea utilizar dichas desigualdades. Siendo este el caso, el tratamiento dado por (4.4) es el adecuado.

Las correlaciones involucradas en las TBCBies vienen dadas a través de $\langle \mathcal{M}_x^{(i)} \rangle = \sum_{a_i \in \{\pm 1\}} a_i p(a_i|x)$ y $\langle \mathcal{M}_x^{(i)} \mathcal{M}_y^{(j)} \rangle = \sum_{a_i, a_j \in \{\pm 1\}} a_i a_j p(a_i a_j | xy)$ (ver ecuación (3.3)). En este caso se tienen dos salidas concluyentes, denotadas por $+$ y $-$. Al fusionar los eventos de no-click con alguna de estas salidas, se puede escoger cualquiera de las dos posibilidades: $\emptyset \rightarrow +$ o $\emptyset \rightarrow -$. En lo que sigue se denotará por *estrategia* a la elección de asignación del evento de no detección. Supóngase que se hace la asignación $\emptyset \rightarrow -$. Las correlaciones deben ahora reescribirse de manera tal que no aparezcan las probabilidades asociadas a $-$. Así

$$\langle \mathcal{M}_x^{(i)} \rangle = p(+|x) - p(-|x) = 2p(+|x) - 1 \quad (4.9)$$

donde se ha usado la normalización $p(+|x) + p(-|x) = 1$. Nótese que si se hace la asignación $\emptyset \rightarrow +$ se tendrá, en lugar de (4.9), la ecuación

$$\langle \mathcal{M}_x^{(i)} \rangle = p(+|x) - p(-|x) = 1 - 2p(-|x) \quad (4.10)$$

Sea $a_i = +, -$ la salida que aparece explícitamente en $\langle \mathcal{M}_x^{(i)} \rangle$ después de hacer la asignación de los eventos de no detección y reescribir la ecuación, es claro entonces que las dos ecuaciones anteriores pueden sintetizarse en la relación

$$\langle \mathcal{M}_x^{(i)} \rangle = a_i(2p(a_i|x) - 1) \quad (4.11)$$

que se reduce a (4.9) para $a_i = +$ y a (4.10) para $a_i = -$. Evidentemente, el subíndice i en a_i indica el i -ésimo observador. Las estrategias de etiquetación de los eventos de no detección involucran escenarios en los que los observadores pueden hacer asignaciones distintas. Encontrar la *estrategia* de asignación que lleva al valor mínimo de η^* es entonces el paso natural después de conseguir las desigualdades modificadas.

Los términos que involucran correlaciones entre dos cuerpos también pueden escribirse de manera que sólo una de las salidas aparezca. Supóngase que ambos observadores hacen la asignación $\emptyset \rightarrow +$. Se tiene

$$\langle \mathcal{M}_x^{(i)} \mathcal{M}_y^{(j)} \rangle = p_{ij}(++|xy) + p_{ij}(--|xy) - p_{ij}(+-|xy) - p_{ij}(-+|xy) \quad (4.12)$$

Como se desea reescribir todo de manera que no aparezcan las distribuciones que involucran la salida $+$, se usa la normalización a 1 para obtener

$$\begin{aligned}
& p_{ij}(++|xy) + p_{ij}(- -|xy) + p_{ij}(+ -|xy) + p_{ij}(- +|xy) = 1 \\
\Rightarrow & p_{ij}(++|xy) = 1 - p_{ij}(- -|xy) - p_{ij}(+ -|xy) - p_{ij}(- +|xy)
\end{aligned} \tag{4.13}$$

de donde

$$\langle \mathcal{M}_x^{(i)} \mathcal{M}_y^{(j)} \rangle = 1 - 2p_{ij}(+ -|xy) - 2p_{ij}(- +|xy) \tag{4.14}$$

Ahora, usando la condición de no-señalización (ver sección 2.2.1):

$$p_i(-|x) = p_{ij}(- +|xy) + p_{ij}(- -|xy) \Rightarrow p_{ij}(- +|xy) = p_i(-|x) - p_{ij}(- -|xy) \tag{4.15}$$

$$p_j(-|y) = p_{ij}(+ -|xy) + p_{ij}(- -|xy) \Rightarrow p_{ij}(+ -|xy) = p_j(-|y) - p_{ij}(- -|xy) \tag{4.16}$$

Al sustituir esto en la ecuación (4.14) se halla

$$\langle \mathcal{M}_x^{(i)} \mathcal{M}_y^{(j)} \rangle = 1 - 2p_i(-|x) - 2p_j(-|y) + 4p_{ij}(- -|xy), \tag{4.17}$$

lo que puede ser reescrito para obtener

$$\langle \mathcal{M}_x^{(i)} \mathcal{M}_y^{(j)} \rangle = (1 - 2p_i(-|x)) + (1 - 2p_j(-|y)) - 1 + 4p_{ij}(- -|xy) = \langle \mathcal{M}_x^{(i)} \rangle + \langle \mathcal{M}_y^{(j)} \rangle - 1 + 4p_{ij}(- -|xy) \tag{4.18}$$

Es fácil ver que si se sigue una estrategia tal que las salidas que aparecerán en las correlaciones son a_i y a_j para las partes i y j , respectivamente, las correlaciones de dos cuerpos están dados por

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{M}_x^{(i)} \mathcal{M}_y^{(j)} \rangle &= -a_i a_j [(2p_i(a_i|x) - 1) + (2p_j(a_j|y) - 1) + 1 - 4p_{ij}(a_i a_j|xy)] \\
&= -a_j \langle \mathcal{M}_x^{(i)} \rangle - a_i \langle \mathcal{M}_y^{(j)} \rangle - a_i a_j + a_i a_j 4p_{ij}(a_i a_j|xy)
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Al tomar en cuenta la transformación (4.6), las correlaciones quedan de la forma

$$\begin{aligned}
& \langle \mathcal{M}_x^{(i)} \rangle(\eta) = a_i(2\eta p(a_i|x) - 1) \\
\Rightarrow & \frac{\langle \mathcal{M}_x^{(i)} \rangle(\eta)}{\eta^2} = \langle \mathcal{M}_x^{(i)} \rangle + (1/\eta - 1)\langle \mathcal{M}_x^{(i)} \rangle - \frac{1}{\eta} a_i (1/\eta - 1)
\end{aligned} \tag{4.20}$$

$$\begin{aligned} \frac{\langle \mathcal{M}_x^{(i)} \mathcal{M}_y^{(j)} \rangle(\eta)}{\eta^2} &= \langle \mathcal{M}_x^{(i)} \mathcal{M}_y^{(j)} \rangle - a_j(1/\eta - 1)\langle \mathcal{M}_x^{(i)} \rangle - a_i(1/\eta - 1)\langle \mathcal{M}_y^{(j)} \rangle + \\ &\quad + \frac{2a_i a_j}{\eta}(1/\eta - 1) - a_i a_j(1/\eta^2 - 1) \end{aligned} \quad (4.21)$$

Nótese que $\langle \mathcal{M}_x^{(i)} \rangle(\eta)$ y $\langle \mathcal{M}_x^{(i)} \mathcal{M}_y^{(j)} \rangle$ se han escrito de manera tal que aparezcan sus expresiones no dependientes de η . Esto se ha hecho para reescribir la desigualdad modificada en términos de la original más otros términos que son función, entre otras cosas, de η , y que son los responsables, para valores más bajos a los de un η^* , de que la desigualdad modificada no sea violada en casos en los que la desigualdad original sí lo era. La ventaja de escribir la desigualdad modificada en términos de la original es que, para el caso de las TBCBIES con invariancia permutacional o traslacional, ya se conocen las cotas correspondientes y los estados cuánticos que violan algunas de ellas [18, 19]. El factor η^2 que aparece en el denominador de los miembros izquierdos de (4.20) y (4.21) se escribe para simplificar el η^2 que aparece como factor multiplicativo en los términos con $p(a_i a_j | x_i x_j)$ de las correlaciones modificadas (recuérdese que según (4.6) $p(ab|xy) \rightarrow \eta^2 p(ab|xy)$). Dividir por η^2 ambos miembros de la ecuación, operación que no cambia los resultados en lo absoluto, permite que aparezca la desigualdad original. Todo lo dicho hasta ahora significa que, al considerar η , las desigualdades escalan de la forma

$$\frac{I(\eta)}{\eta^2} = I + f(\eta, \eta^2, a_i, a_j, \langle \mathcal{M}_x^{(i)} \rangle, \langle \mathcal{M}_x^{(i)} \mathcal{M}_y^{(j)} \rangle) \quad (4.22)$$

donde f es una función de las variables que aparecen en su argumento. En f están condensados todos los términos dependientes de η que surgen al hacer las transformaciones (4.20) y (4.21) en las correlaciones de la desigualdad.

Sea β_C la cota clásica de la desigualdad original, de manera que la violación de la desigualdad

$$I + \beta_C \geq 0 \quad (4.23)$$

indique no-localidad. Sea ahora β_Q la cota cuántica de la desigualdad original de manera que para los estados cuánticos que optimizan I se tenga $I = \beta_Q$. Si estos estados violan la desigualdad, entonces β_Q es tal que

$$\beta_Q + \beta_C < 0 \quad (4.24)$$

Supóngase que en efecto los estados cuánticos que optimizan la expresión violan la desigualdad; es decir, supóngase que $\beta_Q < -\beta_C$. La pregunta fundamental es si la desigualdad modificada es también violada por estos estados. Más estrictamente, se desea conocer para qué valores de η esta desigualdad modificada es violada por estos estados. La desigualdad modificada es simplemente

$$\begin{aligned} I(\eta) + \beta_C &\geq 0 \\ \Rightarrow \frac{I(\eta)}{\eta^2} + \frac{\beta_C}{\eta^2} &\geq 0 \end{aligned} \quad (4.25)$$

Sustituyendo (4.22) en esta última expresión se tiene

$$I + f(\eta, \eta^2, a_i, a_j, \langle \mathcal{M}_x^{(i)} \rangle, \langle \mathcal{M}_x^{(i)} \mathcal{M}_y^{(j)} \rangle) + \frac{\beta_C}{\eta^2} \geq 0 \quad (4.26)$$

Se desea saber para cuáles valores de η los estados que hacen que I tome el valor β_Q violan la desigualdad anterior. Es decir, se desea saber cuáles valores de η hacen que

$$\beta_Q + f(\eta, \eta^2, a_i, a_j, \langle \mathcal{M}_x^{(i)} \rangle, \langle \mathcal{M}_x^{(i)} \mathcal{M}_y^{(j)} \rangle) + \frac{\beta_C}{\eta^2} < 0 \quad (4.27)$$

El valor crítico η^* se obtiene al resolver

$$\beta_Q + f(\eta^*, \eta^{*2}, a_i, a_j, \langle \mathcal{M}_x^{(i)} \rangle, \langle \mathcal{M}_x^{(i)} \mathcal{M}_y^{(j)} \rangle) + \frac{\beta_C}{\eta^{*2}} = 0 \quad (4.28)$$

Nótese que las variables $a_i, a_j, \langle \mathcal{M}_x^{(i)} \rangle$ y $\langle \mathcal{M}_x^{(i)} \mathcal{M}_y^{(j)} \rangle$ en el argumento de f pueden ser determinadas. En efecto, a_i, a_j da cuenta de la estrategia de asignación de los eventos de no-click que haya sido escogida. Al escoger una estrategia, cada valor de a_i, a_j , que puede ser $+$ o $-$, queda determinado. Por otra parte, dado que, por suposición, se conoce el estado que hace que I tome el valor β_Q , basta sustituir este estado en los correspondientes $\langle \mathcal{M}_x^{(i)} \rangle$ y $\langle \mathcal{M}_x^{(i)} \mathcal{M}_y^{(j)} \rangle$ que aparezcan en f para obtener su valor numérico. Recuérdese que se supone aquí que se miden las observables $\mathcal{M}_0^{(i)} = \sigma_z$ y $\mathcal{M}_1^{(i)} = \cos \theta \sigma_z + \sin \theta \sigma_x$, y que la cota cuántica ha sido obtenida optimizando sobre estas observables.

4.3.1. El caso de invariancia permutacional

Si se aplican las transformaciones (4.20) y (4.21) en (3.12) se obtienen las TBCBIEs con invariancia permutacional modificadas.

$$\begin{aligned}
\frac{I(\eta)}{\eta^2} = & I + \alpha \left[(1/\eta - 1) \sum_{i=1}^N \langle \mathcal{M}_0^{(i)} \rangle - 1/\eta (1/\eta - 1) \sum_{i=1}^N a_i \right] + \\
& + \beta \left[(1/\eta - 1) \sum_{i=1}^N \langle \mathcal{M}_1^{(i)} \rangle - 1/\eta (1/\eta - 1) \sum_{i=1}^N a_i \right] + \\
& + \frac{\gamma}{2} \left[-2(1/\eta - 1) \sum_{j \neq i}^N a_j \sum_{i=1}^N \langle \mathcal{M}_0^{(i)} \rangle + (1/\eta - 1)^2 \sum_{i=1}^N \sum_{i \neq j}^N a_i a_j \right] + \\
& + \delta \left[-(1/\eta - 1) \sum_{j \neq i}^N a_j \sum_{i=1}^N \langle \mathcal{M}_0^{(i)} \rangle - (1/\eta - 1) \sum_{i \neq j}^N a_i \sum_{j=1}^N \langle \mathcal{M}_1^{(j)} \rangle + (1/\eta - 1)^2 \sum_{i=1}^N \sum_{i \neq j}^N a_i a_j \right] + \\
& + \frac{\varepsilon}{2} \left[[-2(1/\eta - 1) \sum_{j \neq i}^N a_j \sum_{i=1}^N \langle \mathcal{M}_1^{(i)} \rangle + (1/\eta - 1)^2 \sum_{i=1}^N \sum_{i \neq j}^N a_i a_j] \right]
\end{aligned} \tag{4.29}$$

lo que, reordenando ciertos términos, puede reescribirse como

$$\begin{aligned}
\frac{I(\eta)}{\eta^2} = & I + (1/\eta - 1) \left[\alpha - (\gamma + \delta) \left(\sum_{j \neq i}^N a_j \right) \right] \sum_{i=1}^N \langle \mathcal{M}_0^{(i)} \rangle + \\
& + (1/\eta - 1) \left[\beta - (\delta + \epsilon) \left(\sum_{j \neq i}^N a_j \right) \right] \sum_{i=1}^N \langle \mathcal{M}_1^{(i)} \rangle - \\
& - 1/\eta (1/\eta - 1) (\alpha + \beta) \sum_{i=1}^N a_i + (1/\eta - 1)^2 (\gamma/2 + \delta + \varepsilon/2) \sum_{i=1}^N \sum_{i \neq j}^N a_i a_j
\end{aligned} \tag{4.30}$$

En la sección 3.2.1 se vio que la desigualdad

$$-2\mathcal{S}_0 + \frac{1}{2}\mathcal{S}_{00} - \mathcal{S}_{01} + \frac{1}{2}\mathcal{S}_{11} + 2N \geq 0 \tag{4.31}$$

es violada por estados cuánticos. En esta desigualdad los coeficientes que aparecen en (4.30) son $\alpha = -2, \beta = 0, \gamma = 1, \delta = -1, \varepsilon = 1$ (ver ecuación (3.12)). Sustituyendo esto en (4.30), se obtiene la expresión

$$\frac{I(\eta)}{\eta^2} = I - 2(1/\eta - 1) \sum_{i=1}^N \langle \mathcal{M}_0^{(i)} \rangle + 2/\eta (1/\eta - 1) \sum_{i=1}^N a_i \tag{4.32}$$

Se sabe que la cota cuántica de la expresión I es tal que $\beta_Q/\beta_C + 1 = -1/4$ (ver Fig. 3.1), con $\beta_C = 2N$ para $N \rightarrow \infty$. Esto significa que

$$\begin{aligned}
\frac{\beta_Q(N \rightarrow \infty)}{\beta_C} + \frac{\beta_C}{\beta_C} &= -\frac{1}{4} \\
\Rightarrow \frac{\beta_Q(N \rightarrow \infty)}{2N} + 1 &= -\frac{1}{4} \\
\Rightarrow \beta_Q(N \rightarrow \infty) &= -\frac{5}{4} 2N
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Al sustituir esto en (4.32) se consigue

$$\frac{I(\eta)}{\eta^2} = -\frac{5}{4} 2N - 2(1/\eta - 1)\mathcal{S}_0 + 2/\eta(1/\eta - 1) \sum_{i=1}^N a_i \tag{4.34}$$

donde se ha sustituido $\sum_{i=1}^N \langle \mathcal{M}_0^{(i)} \rangle = \mathcal{S}_0$. El valor de $\mathcal{S}_0$ es el resultado de calcular la suma de los valores esperados $\mathcal{M}_0^{(i)}$ que se obtienen para el estado que dio lugar a $I = -\frac{5}{4} 2N$. Haciendo esto se consigue $\mathcal{S}_0 = N/2$. Nótese que la dependencia en la estrategia de asignación de los eventos de no detección está explícita en el término $\sum_{i=1}^N a_i$. Sean N^+ y N^- los números de observadores que siguen una estrategia de asignación tal que su correspondiente a_i sea + o -, respectivamente, entonces $\sum_{i=1}^N a_i = N^+ - N^- = 2N^+ - N$, donde $N = N^+ + N^-$ es el número total de observadores. Al tomar todo esto en cuenta, la expresión de arriba queda como

$$\frac{I(\eta)}{\eta^2} = -\frac{5}{4} 2N - 2(1/\eta - 1)N/2 + 2/\eta(1/\eta - 1)(2N^+ - N) \tag{4.35}$$

Sustituyendo esto en (4.25),

$$-\frac{5}{4} 2N - 2(1/\eta - 1)N/2 + 2/\eta(1/\eta - 1)(2N^+ - N) + \frac{2N}{\eta^2} \geq 0 \tag{4.36}$$

Para que la desigualdad se viole,

$$-\frac{5}{4} 2N - 2(1/\eta - 1)N/2 + 2/\eta(1/\eta - 1)(2N^+ - N) + \frac{2N}{\eta^2} < 0 \tag{4.37}$$

Nótese que los dos primeros términos del miembro izquierdo son negativos y el último término es positivo. La expresión del miembro izquierdo será más negativa cuando el tercer término tenga su mínimo valor, esto es, cuando $N^+ = 0$. Este es un ejemplo de cómo estrategias de asignación particulares pueden llevar a distintas magnitudes de violación. Para determinar el valor de eficacia crítico η^* se estudia la igualdad

$$-\frac{5}{4} 2N - 2(1/\eta^* - 1)N/2 + 2/\eta^*(1/\eta^* - 1)(2N^+ - N) + \frac{2N}{\eta^{*2}} = 0 \tag{4.38}$$

Si $N^+ = 0$, que es el caso óptimo,

$$\begin{aligned}
 -\frac{5}{4} 2N - 2(1/\eta^* - 1)N/2 + 2/\eta^*(1/\eta^* - 1)(-N) + \frac{2N}{\eta^{*2}} &= 0 \\
 \Rightarrow -\frac{5}{4} - (1/\eta^* - 1)1/2 - 1/\eta^*(1/\eta^* - 1) + \frac{1}{\eta^{*2}} &= 0 \\
 \Rightarrow -\frac{5}{4} - \frac{1}{2}\frac{1}{\eta} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\eta} &= 0
 \end{aligned} \tag{4.39}$$

de donde se obtiene fácilmente

$$\eta^* = 2/3 \tag{4.40}$$

Una implementación experimental de la desigualdad que se ha venido estudiando será válida sólo si la eficacia de los detectores es mayor a $2/3$. Esta desigualdad constituye un ejemplo de la utilidad de la transformación (4.30) para las TBCBIEs con invariancia permutacional. El papel de las estrategias de asignación de los eventos de no-click queda también claro. Hallar la estrategia óptima de asignación es el paso previo a la determinación de la eficacia crítica.

4.3.2. El caso de invariancia traslacional

Si se aplican las transformaciones (4.20) y (4.21) en (3.38) se halla, tras agrupar algunos términos, la siguiente forma modificada de las TBCBIEs con invariancia traslacional

$$\begin{aligned}
 \frac{I(\eta)}{\eta^2} &= I + \alpha \left[(1/\eta - 1)\mathcal{S}_0 - 1/\eta(1/\eta - 1) \sum_{i=1}^N a_i \right] + \\
 &\quad + \beta \left[(1/\eta - 1)\mathcal{S}_1 - 1/\eta(1/\eta - 1) \sum_{i=1}^N a_i \right] - \\
 &\quad - (1/\eta - 1) \left[\sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} \gamma_k \sum_{m=1}^N a_{m+k} \langle \mathcal{M}_0^{(m)} \rangle + \sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} \gamma_k \sum_{m=1}^N a_m \langle \mathcal{M}_0^{(m+k)} \rangle + \sum_{k=1}^{N-1} \delta_k \sum_{m=1}^N a_{m+k} \langle \mathcal{M}_0^{(m)} \rangle \right] - \\
 &\quad - (1/\eta - 1) \left[\sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} \varepsilon_k \sum_{m=1}^N a_{m+k} \langle \mathcal{M}_1^{(m)} \rangle + \sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} \varepsilon_k \sum_{m=1}^N a_m \langle \mathcal{M}_1^{(m+k)} \rangle + \sum_{k=1}^{N-1} \delta_k \sum_{m=1}^N a_m \langle \mathcal{M}_1^{(m+k)} \rangle \right] + \\
 &\quad + (1/\eta - 1)^2 \left[\sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} \gamma_k \sum_{m=1}^N a_m a_{(m+k)} + \sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} \varepsilon_k \sum_{m=1}^N a_m a_{m+k} + \delta_k \sum_{m=1}^N a_m a_{m+k} \right]
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

Siguiendo un procedimiento equivalente al presentado en la sección anterior para la desigualdad (4.31), se estudió el escenario $N = 4$ (ver sección 3.4) y se hallaron las eficacias críticas de detección de toda esta familia de desigualdades, algunas de las cuales han sido tabuladas en el cuadro 3.5, para las estrategias de asignación $+, +, +, +$ y $-, -, -, -$. En el cuadro 4.3.2 se ha tabulado una muestra de las eficacias críticas para las dos estrategias en consideración. Esta muestra es la correspondiente a las 3 primeras desigualdades del cuadro 3.5. Las últimas tres columnas del cuadro 4.3.2 contienen las eficacias críticas mencionadas. Nótese que las desigualdades son más robustas a ineficacia de detección cuando la diferencia entre β_C y β_Q es mayor, esto es, cuando la violación es mayor. Esto significa que la robustez a ineficacia de detección podría ser usada para cuantificar cuán no-local es un sistema dado. Cabe destacar que de todas las desigualdades con simetría traslacional a las que se halló la eficacia crítica, ninguna representó un escenario suficientemente bueno como para dar lugar a implementaciones experimentales. La eficacia crítica más baja de todas las calculadas en este caso no bajó de 85 %, valor ya lejano de los asequibles en el laboratorio.

Cuadro 4.1: El valor de η^* para tres TBCBies con invariancia traslacional usando dos estrategias de asignación distintas. Nótese que la eficacia crítica es inversamente proporcional a la diferencia entre β_Q y β_C , lo que significa que estados de mayor no-localidad son más robustos a ineficacias de detección.

β_Q	β_C	α	β	γ_1	δ_1	δ_3	ε_1	γ_2	δ_2	ε_2	η_{++++}^*	η_{----}^*
-8,42	8	-2	-2	1	0	1	1	0	1	0	0,97	0,94
-9,27	8	0	0	-2	-1	-1	2	1	0	1	0,93	0,93
-11,31	8	0	0	0	0	0	0	-1	2	1	0,85	0,85

Capítulo 5

Observaciones finales

Al caracterizar las correlaciones que surgen de una teoría dada es de gran relevancia poder determinar si tales correlaciones son locales o no locales. Evidenciar la no-localidad de un sistema no es siempre una tarea fácil. Una serie de desigualdades, conocidas como desigualdades de Bell, que contienen información acerca de las correlaciones que surgen de la teoría subyacente son usadas en esta importante empresa. La violación de una desigualdad de Bell es un indicador de no-localidad que, además, pone en evidencia características cuánticas necesarias para que se dé esa violación. Teorema de Bell es el nombre que recibe el importante hecho que está detrás de todo esto: ninguna teoría local puede reproducir las correlaciones estadísticas de la mecánica cuántica, que es intrínsecamente no local.

Son contados los escenarios para los que se tiene una desigualdad de Bell cuya comprobación experimental sea factible en el estado actual de las cosas, y si el sistema en cuestión es un sistema de muchos cuerpos, las complicaciones son mayores. Cuánta información de un sistema es necesaria para determinar su no-localidad es un problema interesante cuya respuesta simplificaría la tarea de detectar no-localidad: ¿Será que, en un sistema de muchos cuerpos, es suficiente considerar las correlaciones entre sólo dos de esos cuerpos a la vez para ser capaz de determinar si el sistema es no-local? Esta pregunta, tratada con detalle en [18] y [19], definió el hilo conductor del tercer capítulo de esta tesis, donde se mostraron familias simples de desigualdades que son construidas a partir de funciones de correlación de dos cuerpos (TBCBIs) y que, como fue demostrado en los trabajos referidos, son violadas por estados cuánticos.

Que la respuesta a la pregunta recién formulada sea afirmativa es un hecho esperanzador

que vuelca los esfuerzos hacia la extensión del uso de esas familias para la detección de no-localidad. Sin embargo, hay un factor que debe considerarse antes de todo juicio de valor, y ese es el de si estas desigualdades siguen siendo válidas si los instrumentos de medición no son ideales. Es sabido, por ejemplo, que si en los experimentos para examinar la no-localidad los detectores de las partículas entrelazadas (una propiedad cuántica necesaria para que haya no-localidad) no son lo suficientemente eficaces, puede concluirse que un sistema es local cuando en realidad es no local, y viceversa. Con el nombre de “loophole de detección” se denota a este importante problema que es la causa primordial de la desconfianza depositada en algunos experimentos establecidos a lo largo de la últimas cuatro décadas.

La modificación de las familias de desigualdades estudiadas en el capítulo 3 de manera que el modelo subyacente no asumiera detectores ideales fue el tema del cuarto capítulo de esta tesis, en donde se introdujo una convención de asignación de los eventos de no detección¹ que permite modificar las desigualdades sin necesidad de añadir un evento válido más (el de no detección), lo que alteraría el escenario de manera que las desigualdades ya no fuesen aplicables. Con el apoyo de las desigualdades modificadas, se buscaron los valores críticos de la eficacia de detección para los que un sistema no-local seguiría visto como no-local en el experimento. Por debajo de esta eficacia crítica, los resultados del experimento no son concluyentes. En ningún caso se halló una eficacia crítica dentro del rango disponible en los laboratorios del mundo actual. El mejor valor conseguido fue de 66 %, y eso para sistemas con un gran número de cuerpos ($> 10^3$).

El trabajo en esta tesis no representa de ninguna manera el tratamiento más general del problema del loophole de detección en sistemas de muchos cuerpos, pero es tal vez una muestra de lo fundamental que es cerrar este loophole en algunos de estos escenarios. Cabe destacar que las estrategias de asignación de los eventos de no detección pueden generalizarse un poco más si se hace que estas dependan de las entradas de cada observador. Este paso natural, junto al estudio de la modificación de desigualdades que surgen en cadenas de espines interactuantes, define la dirección de esta investigación en el futuro inmediato.

¹Si los detectores no son ideales, hay ocasiones en las que no detectan partículas que efectivamente “pasaron” por el instrumento.

Bibliografía

- [1] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen. Can Quantum-Mechanical description of Reality be Considered Complete? *Physical Review*, 47:777–780, 1935.
- [2] J.S. Bell. On the Einstein-Podolski-Rosen Paradox. *Physics*, 1:195–200, 1964.
- [3] S. Popescu. Nonlocality beyond quantum mechanics. *Nature Physics*, 10:264–270, 2014.
- [4] J.F. Clauser, Horne M. A., A. Shimony, and R. A. Holt. Proposed experiment to test local hidden-variable theories. *Phys. Rev. Lett.*, 23:880, 1969.
- [5] Stuart J. Freedman and John F. Clauser. Experimental Test of Local Hidden-Variable Theories. *Phys. Rev. Lett.*, 28:938–941, 1972.
- [6] Alain Aspect, Jean Dalibard, and Gérard Roger. Experimental Test of Bell’s Inequalities Using Time-Varying Analyzers. *Phys. Rev. Lett.*, 49:1804–1807, 1982.
- [7] M. A. Rowe, D. Kielpinski, V. Meyer, C. A. Sackett, W. M. Itano, C. Monroe, and D. J. Wineland. Experimental violation of a Bell’s inequality with efficient detection. *Nature*, 409:791–794, 2001.
- [8] B. G. Christensen, K. T. McCusker, J. B. Altepeter, B. Calkins, T. Gerrits, A. E. Lita, A. Miller, L. K. Shalm, Y. Zhang, S. W. Nam, N. Brunner, C. C. W. Lim, N. Gisin, and P. G. Kwiat. Detection-Loophole-Free Test of Quantum Nonlocality, and Applications. *Phys. Rev. Lett.*, 111:130406, 2013.
- [9] Nicolas Brunner, Daniel Cavalcanti, Stefano Pironio, Valerio Scarani, and Stephanie Wehner. Bell nonlocality. *Rev. Mod. Phys.*, 86:419–478, 2014.
- [10] A. Aspect. Proposed experiment to test separable hidden-variable theories. *Physics Letters A*, 54(2):117 – 118, 1975.

- [11] Ramelow S. Wittmann B. Kofler J. Beyer J. Lita A. Calkins B. Gerrits T. Nam S. W. Ursin R. Zeilinger A. Giustina M., Mech A. Bell violation using entangled photons without the fair-sampling assumption. *Nature*, 497(7448):227–230, 2013.
- [12] Giustina M. Kofler J. Wittmann B. Ursin R. Ramelow S. Larsson, J-A. Bell violation with entangled photons, free of the coincidence-time loophole. *arXiv:1309.0712*, 2013.
- [13] Artur K. Ekert. Quantum cryptography based on Bell’s theorem. *Phys. Rev. Lett.*, 67:661–663, 1991.
- [14] Peter Shor. Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring. *Proceedings of the 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 124–134, 1994.
- [15] R. Cleve, P. Hoyer, B. Toner, and J. Watrous. Consequences and limits of nonlocal strategies. In *Computational Complexity, 2004. Proceedings. 19th IEEE Annual Conference on*, pages 236–249, 2004.
- [16] Y-C Liang. y N. Gisin F. Curchod. Multipartite nonlocality as a resource and quantum correlations having indefinite causal order. *arXiv:1310.7598v1*, 2013.
- [17] R. Augusiak, F. M. Cucchietti, and M. Lewenstein. Many-body physics from a quantum information perspective. In Daniel C. Cabra, Andreas Honecker, and Pierre Pujol, editors, *Modern Theories of Many-Particle Systems in Condensed Matter Physics*, volume 843 of *Lecture Notes in Physics*, pages 245–294. Springer Berlin Heidelberg, 2012.
- [18] A. B. Sainz T. Vértesi M. Lewenstein y A. Acín J. Tura, R. Augusiak. Detecting non-locality in multipartite quantum sytems with two-body correlation functions. 2013.
- [19] J. Tura, A. Sainz, T. Vertesi, A. Acín, M. Lewenstein, and R. Augusiak. Translational invariant Bell inequality with two-body correlators. *arXiv:1312.0265*, 2013.
- [20] M. Bourennane E. Amselem. Experimental four-qubit bound entanglement. *Nat. Phys.*, 5:748–752, 2009.
- [21] N. Kiesel, C. Schmid, G. Tóth, E. Solano, and H. Weinfurter. Experimental observation of four-photon entangled dicke state with high fidelity. *Phys. Rev. Lett.*, 98:063604, 2007.

- [22] R. Gallego, L. Wurfli, A. Acín, and M. Navascués. Quantum correlations require multipartite information principles. *arXiv:1107.3738*, 2012.
- [23] Sainz A.B. Augusiak R. Brask J. Chaves R. Leverrier A. Acin A. Fritz, T. Local orthogonality as a multipartite principle for quantum correlations. *Nat Commun*, 4, 2013.
- [24] Serge Massar, Stefano Pironio, Jérémie Roland, and Bernard Gisin. Bell inequalities resistant to detector inefficiency. *Phys. Rev. A*, 66:052112, 2002.
- [25] Daniel Collins, Nicolas Gisin, Noah Linden, Serge Massar, and Sandu Popescu. Bell inequalities for arbitrarily high-dimensional systems. *Phys. Rev. Lett.*, 88:040404, 2002.
- [26] J. Bell. On the Problem of Hidden Variables in Quantum Mechanics. *Rev. Mod. Phys.*, 38:447–452, 1966.
- [27] T. Fritz. Beyond Bell’s theorem: correlation scenarios. *New Journal of Physics*, 14(103001), 2012.
- [28] Yanofsky N. Brandenburger, A. A classification of hidden-variable properties. *New Journal of Physics*, 41(425302), 2008.
- [29] B.F. Tsirelson. Some results and problems on quantum Bell-type inequalities. *Hadronic Journal Supplement*, 8:329–345, 1993.
- [30] Arthur Fine. Hidden variables, joint probability, and the Bell inequalities. *Phys. Rev. Lett.*, 48:291–295, 1982.
- [31] N. Brunner, N. y Linden. Bell nonlocality and Bayesian game theory. *arXiv:1210.1173*, 2012.
- [32] B.S. Tsirelson. Quantum generalizations of Bell’s inequality. *Letters in Mathematical Physics*, 4(2):93–100, 1980.
- [33] Wim van Dam. Implausible consequences of superstrong nonlocality. *Natural Computing*, 12(1):9–12, 2013.
- [34] Barrett J. Lisa O.C. Leifer M. Spekkens R. Stepanik N. Wilce A. Wilke R. Barnum, H. Entropy and information causality in general probabilistic theories. *New Journal of Physics*, 12(033024), 2010.

- [35] Miguel Navascués, Stefano Pironio, and Antonio Acín. Bounding the set of quantum correlations. *Phys. Rev. Lett.*, 98:010401, 2007.
- [36] M. Nielsen and I. Chuang. *Quantum computation and quantum information*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [37] B. Grunbaum. Convex polytopes. volume 221 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 2012.
- [38] Sandu Popescu and Daniel Rohrlich. Quantum nonlocality as an axiom. *Foundations of Physics*, 24(3):379–385, 1994.
- [39] R. F. Werner and M. M. Wolf. All-multipartite Bell-correlation inequalities for two dichotomic observables per site. *Phys. Rev. A*, 64:032112, 2001.
- [40] Dagomir Kaszlikowski, Piotr Gnaciński, Marek Żukowski, Wiesław Miklaszewski, and Anton Zeilinger. Violations of local realism by two entangled n -dimensional systems are stronger than for two qubits. *Phys. Rev. Lett.*, 85:4418–4421, 2000.
- [41] Antonio Acín, Serge Massar, and Stefano Pironio. Randomness versus nonlocality and entanglement. *Phys. Rev. Lett.*, 108:100402, 2012.
- [42] Serge Massar, Stefano Pironio, Jérémie Roland, and Bernard Gisin. Bell inequalities resistant to detector inefficiency. *Phys. Rev. A*, 66:052112, 2002.
- [43] Ryszard Horodecki, Paweł Horodecki, Michał Horodecki, and Karol Horodecki. Quantum entanglement. *Rev. Mod. Phys.*, 81:865–942, 2009.
- [44] Reinhard F. Werner. Quantum states with Einstein-Podolsky-Rosen correlations admitting a hidden-variable model. *Phys. Rev. A*, 40:4277–4281, 1989.
- [45] E. Schrödinger. Probability relations between separated systems. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 32:446–452, 1936.
- [46] Jonathan Barrett. Nonsequential positive-operator-valued measurements on entangled mixed states do not always violate a Bell inequality. *Phys. Rev. A*, 65:042302, 2002.
- [47] Sandu Popescu. Bell’s inequalities and density matrices: Revealing “hidden” nonlocality. *Phys. Rev. Lett.*, 74:2619–2622, 1995.

- [48] George Svetlichny. Distinguishing three-body from two-body nonseparability by a Bell-type inequality. *Phys. Rev. D*, 35:3066–3069, 1987.
- [49] Michael Seevinck and George Svetlichny. Bell-type inequalities for partial separability in n-particle systems and quantum mechanical violations. *Phys. Rev. Lett.*, 89:060401, 2002.
- [50] C.H. Oh Sixia Yu. Tripartite entangled pure states are tripartite nonlocal. *arXiv:1306.5330*, 2013.
- [51] Mohamed Nawareg Marcin Wiesniak and Marek Zukowski. N-particle nonclassicality without N-particle correlations. *arXiv:1112.0951v3*, 2013.
- [52] L. Masanes. Extremal quantum correlations for n parties with two dichotomic observables per site. *arXiv:quant-ph/0512100*, 2005.
- [53] R. L. Fork, L. E. Hargrove, and M. A. Pollack. Induced atomic cascade processes. *Phys. Rev. Lett.*, 12:705–707, 1964.
- [54] J. G. Rarity and P. R. Tapster. Experimental violation of Bell’s inequality based on phase and momentum. *Phys. Rev. Lett.*, 64:2495–2498, 1990.
- [55] D. N. Matsukevich, P. Maunz, D. L. Moehring, S. Olmschenk, and C. Monroe. Bell inequality violation with two remote atomic qubits. *Phys. Rev. Lett.*, 100:150404, 2008.
- [56] Jian-Wei Pan, Zeng-Bing Chen, Chao-Yang Lu, Harald Weinfurter, Anton Zeilinger, and Marek Żukowski. Multiphoton entanglement and interferometry. *Rev. Mod. Phys.*, 84:777–838, 2012.
- [57] Marco Genovese. Research on hidden variable theories: A review of recent progresses. *Physics Reports*, 413(6):319 – 396, 2005.
- [58] Nicolas Brunner, Nicolas Gisin, Valerio Scarani, and Christoph Simon. Detection loophole in asymmetric Bell experiments. *Phys. Rev. Lett.*, 98:220403, 2007.
- [59] Serge Massar and Stefano Pironio. Violation of local realism versus detection efficiency. *Phys. Rev. A*, 68:062109, 2003.
- [60] Philippe H. Eberhard. Background level and counter efficiencies required for a loophole-free Einstein-Podolsky-Rosen experiment. *Phys. Rev. A*, 47:R747–R750, 1993.