



UNIVERSIDAD
DE LOS ANDES

TRABAJO DE GRADO

ESCENARIOS DE HIDRODINÁMICA Y RADIACIÓN EN
COLAPSO CUASI-ESTÁTICO EN RELATIVIDAD GENERAL

Por

Br. Victor Francisco Guada Escalona

Tutor: Dr. Luis Alberto Núñez de Villavicencio Martínez

mayo 2015

©2015 Universidad de Los Andes Mérida, Venezuela

Reconocimiento-No comercial-Compartir igual

Escenarios de Hidrodinámica y Radiación en Colapso Cuasi-Estático en Relatividad General

Resumen: El presente trabajo modela el acoplamiento entre la radiación y la materia ultradensa de un fluido esféricamente simétrico, radiante y anisótropo que permanece en el régimen de evolución cuasi-estático, introduciendo el factor variable de Eddington, el factor de flujo y una relación de cierre que las vincula. Se presenta seis de las relaciones de cierre que se encuentran con mayor frecuencia en la literatura; donde cada una considera diferentes enfoques físicos. Así como también un nuevo perfil de la velocidad del fluido bajo dos configuraciones distintas: Florides-Gokhroo-Mehra y Buchdahl. Se encontraron condiciones de contorno en las variables de hidrodinámica y radiación para cada relación de cierre, independientemente de las configuraciones propuestas; las cuales cumplen con todas las condiciones de aceptabilidad física de nuestro escenario a excepción de una. También se observó que se puede modelar tanto expansión como colapso con el nuevo perfil de velocidad. Por último, se presentó la descripción y conductividad térmica del sistema donde se aprecia que la temperatura decrece con la distancia y la conductividad mejora a medida que se acerca a la superficie; en coherencia con lo obtenido en los escenarios de hidrodinámica y radiación.

Palabras clave: Relatividad General, simetría esférica, evolución cuasi-estática, hidrodinámica y radiación, relaciones de cierre, factor variable de Eddington.

Índice

Índice de Tablas	vi
Índice de Figuras	viii
Agradecimientos	xi
Introducción	xii
0.1 Objetivos Generales	xiv
0.1.1 Objetivos Específicos	xiv
1 Ecuaciones de Campo y Condiciones de Acoplamiento	1
1.1 Ecuaciones de Campo	1
1.1.1 Configuración Interior	2
1.1.2 Configuración Exterior	5
1.2 Condiciones de acoplamiento	6
1.3 Aproximación cuasi-estática	7
2 Descripción Térmica	11
2.1 Evolución térmica: Ecuación de Cattaneo relativista	11
2.2 Conductividad y Condición inicial Térmica	13
3 Hidrodinámica y Radiación y Relaciones de Cierre	15
3.1 Ecuaciones de Hidrodinámica y Radiación	15
3.2 Factor Variable de Eddington y Límites del Flujo de Radiación	17
3.3 Relaciones de Cierre	19

3.3.1	Lorentz-Eddington	20
3.3.2	Bowers-Wilson	21
3.3.3	Janka (Monte Carlo)	21
3.3.4	Relaciones de máxima entropía	22
3.3.5	Levermore-Pomraning	23
3.4	Los límites para el factor de flujo y condiciones de contorno	23
4	Modelando Configuraciones	26
4.1	Perfil de la Velocidad del Fluido	26
4.2	Perfiles de Florides-Gokhroo-Mehra (FGM)	28
4.3	Perfiles de Buchdahl	29
4.4	Perfil de Luminosidad	30
4.5	Metodología	31
5	Resultados y Análisis	33
5.1	Condiciones Iniciales y Parámetros Físicos	33
5.2	Modelando	36
6	Conclusiones	42
	Bibliografía	44
A	Configuraciones de FGM y Buchdahl	50
A.1	Configuración de Florides-Gokhroo-Mehra	50
A.1.1	Funciones de Acoplamiento	51
A.2	Configuración de Buchdahl	52
A.2.1	Funciones de Acoplamiento	53
A.3	Evolución de la Superficie: Configuraciones de FGM y Buchdahl	54
B	Escenarios en evolución cuasi-estática	61
C	Condiciones de Contorno en Hidrodinámica y Radiación	63

www.bdigital.ula.ve

Índice de Tablas

3.1	Relaciones de cierre y sus derivadas evaluadas tanto en el centro de la distribución como en el contorno. Proporcionan una relación adicional entre las variables radiación del sistema, donde el factor de flujo f y el factor variable de Eddington χ vienen dados por las ecuaciones (3.12).	19
3.2	Límites del factor de flujo y el factor variable de Eddington para las diferentes relaciones de cierre en el contorno, junto con su correspondiente valor mínimo del factor de flujo, f_{min}	25
4.1	Esquema para obtener las variables totales y ecuaciones del sistema. La evolución temporal vendrá dada por el comportamiento de las variables físicas M , P y ω en el contorno, y así obtener las funciones del tiempo $K(t)$, $g(t)$ y $R(t)$ correspondientes; mientras que la descripción espacial se obtiene mediante los perfiles de densidad, presión y velocidad del fluido propuestos.	32
4.2	Las relaciones de cierre, los factores f y χ , junto con las ecuaciones de hidrodinámica y radiación (HyR), proporcionan toda la información necesaria para obtener todas las variables de HyR; donde las variables totales (P , P_{\perp} y ρ) se obtienen de manera independiente, como lo muestra la tabla 4.1.	32
5.1	Condición de contorno en las variables de hidrodinámica y radiación para cada relación de cierre.	34
5.2	Condición de contorno en las variables de hidrodinámica y radiación para cada relación de cierre.	34

5.3	Límites de las variables de hidrodinámica y radiación en el contorno para todos los posibles valores de las presiones tangenciales del sistema P_{\perp} . Donde α es un número positivo acotado por los valores obtenidos en la tabla 5.1; y $f_{R_{min}}$ y $\chi_{R_{min}}$ vienen dados por la tabla 3.2 representando los valores mínimos que obtienen en el contorno.	35
5.4	Esta tabla presenta un conjunto de parámetros físicos propuestos para modelar la hidrodinámica y radiación de nuestro fluido en dos configuración diferente: Buchdahl y Florides-Gokhroo-Mehra. Se ha denotado a ρ_c como la densidad central; M_{\odot} la masa solar; t el intervalo de tiempo; M_0 , R_0 y $T_R(0)$ la masa, el radio y la temperatura de superficie inicial del sistema respectivamente.	37
C.1	Densidad ρ_R y Presión P_R de radiación para cada una de las relaciones de cierre en términos de las variables físicas totales: Presión P , Flujo de Calor q y presiones tangenciales P_{\perp} . Nótese que las demás variables de hidrodinámica y radiación se pueden obtener si mayor dificultad a partir de nuestro sistema (3.5-3.7).	64
C.2	Densidad $[\rho_R]_{\sigma} = [\rho_R]_{\Sigma} / [P]_{\Sigma}$ y Presión $[P_R]_{\Sigma} = [P_R]_{\Sigma} / [P]_{\Sigma}$ de radiación adimensional en términos de $\sigma = [P_{\perp}]_{\Sigma} / [P]_{\Sigma}$ para las relaciones de cierre que se resuelven de manera analítica. Se obtienen a partir de la tabla C.1 y la condición de contorno (1.37). Las demás variables de hidrodinámica y radiación se pueden obtener si mayor dificultad a partir de nuestro sistema (3.5-3.7).	64
C.3	Condición de contorno en las variables de hidrodinámica y radiación para cada relación de cierre.	65
C.4	Ajuste de la curva $\varsigma = [\rho_m]_{\Sigma} / [P]_{\Sigma}$ vs $\sigma = [P_{\perp}]_{\Sigma} / [P]_{\Sigma}$ que separa la región que cumple con $0 \leq [\rho_R]_{\sigma}$, mostrado en la gráficas C.1.	66
C.5	Condición de contorno en las variables de hidrodinámica y radiación para cada relación de cierre.	66

Índice de Figuras

3.1	Relación funcional entre el factor de flujo f y el factor variable de Eddington χ para diferentes relaciones de cierre, junto con su respectiva razón de cambio $d\chi/df$	20
3.2	Relación funcional de $\left(1 - \frac{\chi}{f}\right)$ vs f para las diferentes relaciones de cierre de la tabla 3.1, donde se presenta la condición (3.23) y se muestran los valores de contorno permitidos para cada una de las relaciones de cierre, ya que sólo se admitirán los valores positivos, es decir: $0 \leq [P_m]_{\Sigma}$	24
4.1	Perfil de Luminosidad en forma de pulso y dependencia funcional de la función masa en el tiempo.	31
5.1	Magnitud de las presiones tangenciales en el contorno para ambas configuraciones y ciertas condiciones iniciales. Donde las líneas superiores marcan las magnitudes máximas que pueden obtener las presiones tangenciales en el contorno para las diferentes relaciones de cierre.	36
5.2	VARIABLES DE HIDRODINÁMICA Y RADIACIÓN EN LA CONFIGURACIÓN DE FLORIDES-GOKHROO-MEHRA PARA DIFERENTES RELACIONES DE CIERRE (TABLA 3.1), DONDE SE MODELA UNA SITUACIÓN DE ESCAPE LIBRE EN EL CONTORNO EN $t = 0$. LA RELACIÓN DE JANKA (MC) ES LA ÚNICA QUE BAJO CUALQUIER PARÁMETRO FÍSICO NO CUMPLE CON LAS CONDICIONES DE ACEPTABILIDAD FÍSICA DE NUESTRO ESCENARIO.	39

5.3	Variables de hidrodinámica y radiación en la configuración de Buchdahl para diferentes relaciones de cierre (tabla 3.1), donde se modela una situación de escape libre en el contorno en $t = 0$. La relación de <i>Janka (MC)</i> es la única que bajo cualquier parámetro físico no cumple con las condiciones de aceptabilidad física de nuestro escenario.	40
5.4	Descripción Térmica del fluido evolucionando en el tiempo para ambas configuraciones. En ambas se observa que la temperatura disminuye a medida que el sistema evoluciona en el tiempo.	41
5.5	Conductividad Térmica del fluido evolucionando en el tiempo para ambas configuraciones. La conductividad aumenta con el tiempo y crece a medida que se aleja del centro de la distribución.	41
A.1	Perfil de densidad en función de la distancia para diferentes valores iniciales de K_0	52
A.2	Relación \dot{R} vs $2M_0/R_0$ para las configuraciones de FGM y Buchdahl, obtenida a partir de la ecuación (A.19). Donde los valores positivo indican que el fluido se expande, mientras que los negativos indican colapso. Se emplearán los valores iniciales $K_0 = 0.3$ y $K_0 = 0.8$ en las configuraciones de FGM y Buchdahl respectivamente.	55
A.3	Relación $1/\dot{R}$ vs $2M_0/R_0$ para las configuraciones de FGM y Buchdahl. Los valores positivo indican que el fluido se expande, mientras que los negativos representan colapso. En la gráficas se emplearán los valores iniciales $K_0 = 0.3$ y $K_0 = 0.8$ en las configuraciones de FGM y Buchdahl respectivamente. Se observa que las singularidades de \dot{R} (figura A.2) se tratan de mejor manera al considerar su inversa $1/\dot{R}$	56
A.4	Gráfica implícita de la ecuación (A.21) para ambas configuraciones frente a las condiciones iniciales del sistema de K_0 y $(2M_0/R_0)$	57
A.5	Evolución de la Superficie	57
A.6	Densidad Total	58
A.7	Función Masa	58
A.8	Presión Total	59
A.9	Densidad del Flujo de Radiación	59

A.10 Velocidad del Fluido	60
A.11 Anisotropía del Fluido.	60
B.1 La variables Físicas del sistema para ambas configuraciones, Buchdahl y Floride-Gokhroo-Mehra (FGM). Donde se emplearon las mismas condiciones iniciales de la tabla 5.4	62
C.1 Grafica de $\varsigma = [\rho_m]_\Sigma / [P]_\Sigma$ vs $\sigma = [P_\perp]_\Sigma / [P]_\Sigma$ para todos los valores que cumplen con la condición $0 \leq [\rho_R]_\sigma$. Donde, de lo obtenido en la tabla C.3, se hizo: $0 \leq \sigma_{MC} \leq 0,77257$ y $0 \leq \sigma_{Mi} \leq 0,7440$	65
C.2 Gráficas de las variables de hidrodinámica y radiación en el contorno para cada relación de cierre en función de $\sigma = [P_\perp]_\Sigma / [P]_\Sigma$, que cumplen con las condiciones de aceptabilidad física C.1. Donde las cantidades adimensionales vienen dadas por: $[P_m]_\sigma = [P_m]_\Sigma / [P]_\Sigma$, $[P_R]_\sigma = [P_R]_\Sigma / [P]_\Sigma$ y $[\rho_R]_\sigma = [\rho_R]_\Sigma / [P]_\Sigma$; y χ_{min} representa el valor mínimo mostrado en 3.15.	67

www.bdigital.ula.ve

Agradecimientos

A mis padres...

www.bdigital.ula.ve

Introducción

Los objetos compactos son uno de los cuerpos más fascinantes conocidos en nuestro universo; presentan propiedades extremas y algo únicas, desde sus interacciones gravitacionales y electromagnéticas hasta sus interacciones nucleares débiles y fuertes [1]. Los objetos extremadamente densos, enanas blancas, estrellas de neutrones, estrellas de quarks, estrellas híbridas y magnetars representan las etapas finales, generalmente estables, de la evolución estelar. Estas entidades tan fascinantes se enfrían a través de complejos mecanismos que combinan tanto el transporte de neutrinos en su interior como la emisión de fotones en su superficie. Los neutrinos dominan las pérdidas de energía durante los primeros $\sim 10^5$ años, mientras que los fotones son continuamente emitidos, responsables de la emisión térmica observada.

Los objetos compactos se crean a raíz del colapso gravitacional del núcleo de una estrella masiva ($M_* \sim 8 - 20 M_\odot$) al final de su vida, cuando su masa nuclear llega al límite de Chandrashekar ($M_{nucleo} \sim 1.4 M_\odot$); lo que desencadena una explosión de supernova de Tipo II. El nuevo objeto ultradenso es rico en leptones, principalmente e^- y ν_e . Uno de los aspectos más destacables es que los neutrinos quedan temporalmente atrapados dentro de la estrella durante el colapso. El estudio de estrellas relativistas usualmente yace en la suposición de isotropía local. Sin embargo, las fuertes evidencias teóricas sugieren que para ciertos rangos de densidad, una variada gama de fenómenos físicos dan lugar a una anisotropía local [2, 3, 4]. Así, en elevados índices de viscosidad, la anisotropía local puede producirse por la opacidad de la materia en los neutrinos para densidades del orden de $\approx 10^{12} g.cm^{-3}$ [5]. Por lo tanto, al modelar cómo la radiación interactúa fuertemente con la materia durante el colapso gravitacional, es adecuado introducir un escenario con anisotropía local.

Debido al formidable campo gravitacional que surge de estos procesos estelares, se

requiere la descripción de la teoría de la Relatividad General. Desafortunadamente, a pesar del gran esfuerzo que se ha llevado a cabo por un grupo significativo de personas e instituciones, actualmente no se tiene ningún modelo auto-consistente, ya sea analítica o numérica, que proporcione toda la descripción física del sistema.

Con el objetivo de describir la hidrodinámica y radiación de nuestro escenario, se considera una distribución de materia esféricamente simétrica y anisótropa en Relatividad General que permanece en el régimen de evolución cuasi-estática; donde se asume que los cambios o la evolución temporal sean pequeños comparados con el tiempo típico en el cual el sistema reacciona a una perturbación. Es decir, se considera un sistema que evoluciona tan lento que siempre permanece en equilibrio hidrostático. [2, cap. 9] Esta suposición no es tan restrictiva como parece, ya que la escala de tiempo hidrodinámico es muy pequeño para casi cualquier fase de la evolución estelar. Así, del orden de 27 minutos para el sol, 4,5 segundos para una enana blanca y 10^{-4} segundos para una estrella de neutrones de una masa solar y 10 Km de radio [6, 7].

El estudio de la hidrodinámica y radiación ha demostrado ser de gran interés en Astrofísica, Cosmología y la Física del plasma [8]. Consciente de la dificultades que abarca los procesos de transporte en la emisión de fotones y/o neutrinos y de las incertidumbres entre el acoplamiento de la radiación y la materia ultradensa, se introducen el factor de flujo $f = \mathcal{F}/\rho_R$ y los factores variables de Eddington $\chi = P_R/\rho_R$; que relacionan la densidad del flujo de energía \mathcal{F} y presión de radiación P_R con densidad de radiación ρ_R respectivamente. En la literatura varias relaciones de cierre, que vinculan ambos factores, han sido introducidas (véase [9, 10, 11, 12, 13]).

Este trabajo se estructura de la siguiente manera: el capítulo 1 contiene una idea general del escenario, que comprende las ecuaciones de campo del escenario, sin extenderse en entender la “microfísica” del campo de radiación que comprende las interacciones entre la materia y la radiación, que se desarrollará en los capítulos posteriores. En el capítulo 2, se encuentran las nociones generales de la descripción térmica que se considerarán en nuestro sistema; esta descripción física es crucial cuando se estudian aspectos tales como: transporte de energía, enfriamiento, emisión de neutrinos, entre otros. El capítulo 3 está dedicado a la parte de hidrodinámica y radiación del sistema, donde se describen los factores de Eddington junto con las

relaciones de cierre y sus relaciones de contorno. El esquema propuesto y los parámetros físicos restringidos en nuestro modelos por la condiciones de contorno están contenido en el capítulo 4. Nuestro modelos de los escenarios de hidrodinámica y radiación con los parámetros escogidos en el capítulo 5. Por último, algunos comentarios y conclusiones están incluidas en 6.

0.1 Objetivos Generales

Modelar la propagación de la radiación a través de la materia ultradensa de un fluido esféricamente simétrico y que colapsa en el régimen de evolución cuasi-estática. Además, obtener una descripción térmica del sistema, que tiene un interés significativo en cuanto a la estructura, evolución y composición del objeto compacto.

0.1.1 Objetivos Específicos

- Modelar con diferentes ecuaciones de cierre, que describan diferentes enfoques físicos y discernir que relaciones se ajustan a nuestro escenario.
- Emplear diferentes configuraciones entre las variables físicas, como la densidad y presión radial, que dependan tanto de la distancia como del tiempo.
- Proponer un perfil de la velocidad del fluido que relacione las variables físicas del sistema y de esta manera, obtener un sistema completo de las ecuaciones.
- Vincular la descripción térmica del fluido con la hidrodinámica y radiación de nuestro escenario.
- Obtener los límites y condiciones de contorno presentes en la descripción de hidrodinámica y radiación del sistema.
- Encontrar los parámetros físicos que se acoplan en nuestro escenario de hidrodinámica y radiación.

Capítulo 1

Ecuaciones de Campo y Condiciones de Acoplamiento

Las ecuaciones de Einstein gobiernan la geometría del espacio-tiempo curvo, siendo la base de la Relatividad General [14]. Estas ecuaciones se introducen para modelar la estructura y evolución temporal de una estrella relativista.

1.1 Ecuaciones de Campo

Para una descripción relativista de gravitación, se plantearán las ecuaciones de Einstein dadas por:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (1.1)$$

Donde se expresa un conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales de manera compacta. Como es usual, $R_{\mu\nu}$, R y $T_{\mu\nu}$ denotan el tensor de Ricci, el escalar de curvatura y el tensor de energía impulso, respectivamente. Las ecuaciones de campo de Einstein (1.1) relacionan las propiedades geométricas del espacio y tiempo con la presencia de materia, dado por el tensor de energía momentum. [15]

1.1.1 Configuración Interior

Para el estudio de un fluido con simetría esférica, la geometría del objeto compacto es, por lo tanto, descrita por las coordenadas tipo Schwarzschild (t, r, θ, ϕ) , dadas por:

$$ds^2 = e^{2\nu(r,t)} dt^2 - e^{2\lambda(r,t)} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (1.2)$$

para algunas funciones métricas $\nu(r, t)$ y $\lambda(r, t)$ que evolucionan tanto en el espacio como en el tiempo. Entonces, nuestras ecuaciones de campo vienen dadas por:

$$-8\pi T_0^0 = -\frac{1}{r^2} + e^{2\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2\lambda'}{r} \right) \quad (1.3)$$

$$-8\pi T_1^1 = -\frac{1}{r^2} + e^{2\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2\nu'}{r} \right) \quad (1.4)$$

$$-8\pi T_{01} = -\frac{2\lambda'}{r} \quad (1.5)$$

$$-8\pi T_2^2 = e^{-2\lambda} \left(2\frac{\lambda' - \nu'}{r} + \nu'\lambda' - 2\nu'' - (\nu')^2 \right) - e^{-2\nu} \left(2\ddot{\lambda} + \dot{\lambda}(\lambda - \dot{\nu}) \right) \quad (1.6)$$

$$T_3^3 = T_2^2 \quad (1.7)$$

donde los puntos y las primas denotan derivadas con respecto a t y a r , respectivamente.

Para que las variables de nuestro tensor energía-impulso T_μ^ν tengan significado físico, primero se considera un espacio localmente Minkowskiano, como el principio de equivalencia nos permite, por lo que se introducen las siguientes coordenadas (τ, x, y, z) en cada punto del espacio-tiempo.

$$ds^2 = d\tau^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (1.8)$$

Al comparar la métricas (1.8) y (1.2) se verifican directamente las siguientes relaciones de transformación, donde ν y λ sólo tienen valor local:

$$d\tau = e^\nu dt \quad dx = e^\lambda dr \quad dy = r d\theta \quad dz = r \sin\theta d\phi \quad (1.9)$$

Se propone ahora que para un observador comóvil con la materia, el contenido físico

de la fuente consiste en un fluido anisótropo con densidad de energía ρ , presión radial P y presiones tangenciales P_{\perp} , que disipa energía a través de un flujo radial de calor q . Para este observador local, las componentes covariantes del tensor de energía-impulso \hat{T}_{ab} vienen dadas por:

$$\hat{T}_{ab} = \begin{pmatrix} \rho & -q & 0 & 0 \\ -q & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_{\perp} \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

Es claro que, en nuestro espacio localmente plano se puede aplicar un Boost de Lorentz, y así obtener un sistema de referencia no comóvil con el fluido y escrito en términos de variables locales:

$$\tilde{T}_{\gamma\lambda} = \mathbf{L}_{\gamma}^a \mathbf{L}_{\lambda}^b \hat{T}_{ab} \quad (1.11)$$

Donde se considera una velocidad del fluido sólo en la dirección radial. Es decir, nuestro escenario, manteniendo la simetría esférica, no rota y sólo puede contraerse o expandirse. Nuestras matrices de Lorentz $\mathbf{L}_{\gamma}^{\alpha} \mathbf{L}_{\lambda}^{\beta}$ vienen dadas por:

$$\mathbf{L}_b^a = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\omega & 0 & 0 \\ -\gamma\omega & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

Siendo γ el factor de Lorentz de la teoría de la relatividad especial dado por:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \omega^2}} \quad (1.13)$$

Por otro lado, para obtener un tensor de energía impulso de nuevo con las coordenadas tipo Schwarzschild, actuamos sobre él una transformación de coordenadas $J_{\beta}^{\alpha} = \frac{\partial \hat{x}^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}$. Entonces, las componentes del tensor energía-impulso buscado se expresan como:

$$T_{\alpha\beta} = J_{\alpha}^{\gamma} J_{\beta}^{\lambda} \tilde{T}_{\gamma\lambda} \quad (1.14)$$

De aquí se verifican las siguientes relaciones:

$$\tilde{T}_0^0 = T_0^0 \quad \tilde{T}_1^1 = T_1^1 \quad \tilde{T}_2^2 = T_2^2 \quad \tilde{T}_3^3 = T_3^3 \quad (1.15)$$

Sin embargo, en los términos cruzados tenemos:

$$\tilde{T}_{01} = e^{-(\nu+\lambda)} T_{01} \quad (1.16)$$

Empleando primero (1.11) con (1.12) y luego (1.14) obtenemos:

$$T_0^0 = \frac{\rho + P\omega^2}{1 - \omega^2} + \frac{2q\omega}{1 - \omega^2} \quad (1.17)$$

$$T_1^1 = -\frac{P + \rho\omega^2}{1 - \omega^2} - \frac{2q\omega}{1 - \omega^2} \quad (1.18)$$

$$T_2^2 = T_3^3 = -P_{\perp} \quad (1.19)$$

$$T_{01} = -\frac{e^{(\nu+\lambda)}}{1 - \omega^2} [(\rho + P)\omega + q(1 + \omega^2)] \quad (1.20)$$

La ecuación (1.19) que corresponde con la presiones tangenciales es independiente de la velocidad del fluido dado que nuestro fluido sólo puede expandirse o contraerse.

La velocidad radial de un elemento de fluido cualquiera, dada en coordenadas (t, r, θ, ϕ) , está relacionada con ω por la expresión:

$$\omega = \frac{dr}{dt} e^{\lambda-\nu} \quad (1.21)$$

Finalmente, de las Ecuaciones de Einstein, dada la métrica interior (1.2) y el tensor energía momentum (1.14), podemos ahora escribir las siguientes variables físicas que

representarán nuestro escenario hidrodinámico, dadas por:

$$\rho = \frac{e^{-2\lambda} [2r\lambda' - 1] + 1}{8\pi r^2 (1 - \omega^2)} + \frac{\dot{\lambda} e^{-\nu - \lambda}}{2\pi r (1 - \omega^2)} \omega + \frac{e^{-2\lambda} (2r\nu' + 1) - 1}{8\pi r^2 (1 - \omega^2)} \omega^2, \quad (1.22)$$

$$P = \frac{e^{-2\lambda} [2r\nu' + 1] - 1}{8\pi r^2 (1 - \omega^2)} + \frac{\dot{\lambda} e^{-\lambda - \nu}}{2\pi r (1 - \omega^2)} \omega + \frac{e^{-2\lambda} (2r\lambda' - 1) + 1}{8\pi r^2 (1 - \omega^2)} \omega^2 \quad (1.23)$$

$$P_{\perp} = \frac{e^{-2\lambda}}{8\pi} \left(2\nu'' + \nu'^2 - \nu'\lambda' + 2\frac{\nu' - \lambda'}{r} \right) - \frac{e^{-2\nu}}{8\pi} \left[\left(2\ddot{\lambda} + \dot{\lambda} (\dot{\lambda} - \dot{\nu}) \right) \right] \quad (1.24)$$

$$q = -\frac{e^{-\lambda}}{4\pi r (1 - \omega^2)} \left[\dot{\lambda} e^{-\nu} (1 + \omega^2) + e^{-\lambda} (\lambda + \nu)' \omega \right] \quad (1.25)$$

Note que si las variables métricas ν y λ son totalmente especificadas, entonces el sistema (1.22-1.25) se convertiría en un sistema de ecuaciones algebraicas para las variables físicas ρ , P , P_{\perp} , ω y q .

1.1.2 Configuración Exterior

En el exterior de objeto compacto radiante y esféricamente simétrico, la geometría es descrita por la métrica de Vaidya:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M(u)}{\mathcal{R}} \right) du^2 + 2d\mathcal{R}du - \mathcal{R}^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (1.26)$$

donde la coordenada u es de tipo tiempo tal que las superficies $u = \text{constante}$ son, asintóticamente, conos de luz abierto al futuro y \mathcal{R} , una coordenada nula, es decir $g_{RR} = 0$. Constituye una generalización del caso no estático y radiante de la métrica de Schwarzschild que escribe a una estrella esféricamente simétrica que está emitiendo o absorbiendo radiación.

En la métrica de Vaidya (1.26), el escalar de Ricci es nulo. En consecuencia, de las ecuaciones de campo de Einstein (1.1) se tiene que

$$R_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta} \quad (1.27)$$

Además, el tensor de Ricci en coordenadas nulas es

$$R_{\alpha\beta} = -\frac{2}{\mathcal{R}^2} \frac{dM}{du} \delta_{\alpha}^0 \delta_{\beta}^0 \quad (1.28)$$

Entonces, reemplazando (1.28) en (1.27), se obtiene el tensor-energía impulso correspondiente a la métrica de Vaidya:

$$T_{\alpha\beta} = -\frac{1}{4\pi\mathcal{R}^2} \frac{dM}{du} \delta_{\alpha}^0 \delta_{\beta}^0 \quad (1.29)$$

1.2 Condiciones de acoplamiento

La región interior, cuyo espacio-tiempo está descrito por el elemento de línea (1.2), y la región exterior, descrita por la métrica de Vaidya (1.26), están separadas por la superficie $r = r_{\Sigma}(t)$. Ambas geometrías del espacio (t, r, θ, ϕ) y $(u, \mathcal{R}, \theta, \phi)$ se encuentran relacionadas por las transformaciones:

$$u = t - r - 2M \ln\left(\frac{r}{2M} - 1\right) \quad (1.30)$$

$$\mathcal{R} = r \quad (1.31)$$

Ahora, con el propósito de evitar comportamientos singulares de las variables físicas sobre la hipersuperficie, se deben satisfacer ciertas condiciones de acoplamiento [16, 17, 18]. Siguiendo a [2, cap. 9], se acopla la métrica interior tipo Schwarzschild (1.2) con la métrica exterior radiante de Vaidya (1.26) en $r_{\Sigma}(t) = \mathcal{R}_{\Sigma} = R$, obteniendo que:

$$e^{2\nu_{\Sigma}} = 1 - \frac{2M}{R} \quad (1.32)$$

$$e^{-2\lambda_{\Sigma}} = 1 - \frac{2M}{R} \quad (1.33)$$

Donde

$$M = m(R, t) \quad (1.34)$$

Por otro lado, ahora exigiendo la continuidad de las componentes independientes

del tensor de energía impulso, tenemos

$$(T_{\mu\nu}n^\mu n^\nu)_\Sigma^{(+)} = (T_{\mu\nu}n^\mu n^\nu)_\Sigma^{(-)} \quad (1.35)$$

$$(T_{\mu\nu}n^\mu v^\nu)_\Sigma^{(+)} = (T_{\mu\nu}n^\mu v^\nu)_\Sigma^{(-)} \quad (1.36)$$

que garantiza, de igual manera, la ausencia de comportamientos singulares en la variables físicas sobre la superficie Σ . Por lo tanto, de ambas ecuaciones se obtiene que la densidad del flujo de energía emergente a través de la hipersuperficie, compensa la presión total, tanto hidrodinámica como de radiación, dentro de la configuración. Es decir:

$$[q]_\Sigma = [P]_\Sigma \quad (1.37)$$

Donde el índice Σ denota que las variables están evaluadas en la superficie de la distribución.

1.3 Aproximación cuasi-estática

En el caso de evolución lenta, nuestra configuración de materia cambia muy poco en comparación con el tiempo típico en el cual el sistema reacciona a una perturbación del equilibrio. Es decir, nuestro sistema evoluciona tan lentamente que el sistema siempre permanecerá en equilibrio hidrostático, como fotos instantáneas tomadas a nuestro escenario. Esto implica que en el régimen de evolución lenta la velocidad radial, medida por el observador Minkowskiano, es siempre mucho menor que la velocidad de la luz $\omega \ll 1$. [2, cap. 11]

En la teoría de la Relatividad General, a diferencia del electromagnetismo, las ecuaciones de movimiento no son independientes de las ecuaciones de campo, sino una consecuencia de éstas, dadas por:

$$T_{\nu;\mu}^\mu = 0 \quad (1.38)$$

En muchos casos, la forma explícita de las ecuaciones de movimiento (1.38) es más útil al dar una interpretación física a una determinada situación [2, cap. 9]. Por lo tanto,

expresando de forma explícita la componente r de (1.38):

$$T_{r;\mu}^{\mu} = 0 \quad (1.39)$$

obtenemos:

$$\left(2\ddot{\lambda} + \dot{\lambda}^2 - \dot{\lambda}\dot{\nu}\right) = 8\pi r e^{\nu} \left[P' + \nu'(\rho + P) - \frac{2(P_{\perp} - P)}{r} \right] \quad (1.40)$$

donde, para el caso estático:

$$\left. \begin{array}{l} T_0^0 = \rho \quad T_1^1 = -P \quad T_2^2 = -P_{\perp} \\ \ddot{\lambda} = \dot{\nu} = \dot{\lambda} = \omega = q = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Caso Estático}, \quad (1.41)$$

el lado derecho de la relación (1.40) no es más que la ecuación de equilibrio hidrostático:

$$P' = -\nu'(\rho + P) + \frac{2(P_{\perp} - P)}{r}. \quad (1.42)$$

Sin embargo, para el caso cuasi-estático se exige que los cambios en el tiempo sean tan pequeños como para que el sistema no se aleje de la condición de equilibrio, entonces se tiene que:

$$\ddot{\lambda} \approx \dot{\lambda}^2 \approx \dot{\nu}\dot{\lambda} \approx 0. \quad (1.43)$$

Es decir, si se deja que el sistema tengan cambios en el tiempo muy grandes, no despreciables, el sistema no podrá volver al estado de equilibrio antes que vuelva a hacer perturbado. De igual forma, esto implica que las derivadas temporales de cualquier orden del lado izquierdo de la ecuación de equilibrio hidrodinámico deben ser cero. Lo que sugiere también que:

$$\ddot{\nu} \approx \omega^2 \approx q^2 \approx q\omega \approx 0. \quad (1.44)$$

En resumen, evolución cuasi-estática implica:

$$\left. \begin{aligned} T_0^0 = \rho \quad T_1^1 = -P \quad T_2^2 = -P_{\perp} \quad T_{01} = e^{(\nu+\lambda)} [(\rho + P)\omega + q] \\ \ddot{\lambda} \approx \dot{\lambda}^2 \approx \dot{\nu}\dot{\lambda} \approx 0 \\ \ddot{\nu} \approx \omega^2 \approx q^2 \approx q\omega \approx 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Caso Cuasi - Estático.} \quad (1.45)$$

Por otro lado, como una consecuencia de las condiciones de acoplamiento (1.33), al parámetro $M(t)$ se puede interpretar como la energía total del sistema dentro de la superficie Σ . Esto sugiere que la masa interior de una esfera de radio r y superficie Σ pueda definirse como [19, 20]:

$$m(r, t) = \frac{1}{2} r R_{232}^3 = \frac{1}{2} r (1 - e^{-2\lambda}) \quad (1.46)$$

La ecuación anterior (1.46) se conoce como la masa de Misner o como la función masa, que se empleará de ahora en adelante. Esta cantidad ha sido usada de manera recurrente en la mayoría de los cálculos numéricos de colapso gravitacional relativista [21, 22]. Escrito de otra manera la ecuación anterior (1.46), aún más práctica e ilustrativa, ya que se compara mejor con la ecuación de acoplamiento (1.33), se obtiene:

$$e^{-2\lambda} = 1 - \frac{2m(r, t)}{r} \quad (1.47)$$

Donde los cambios en el tiempo de la función métrica λ se escriben como:

$$\dot{\lambda} = \frac{\dot{m}}{r} \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1} \quad (1.48)$$

Entonces, considerando escenarios hidrodinámico cuasi-estáticos, las variaciones en el tiempo son consideradas pequeñas, y a partir de las Ecs. (1.22-1.25) y la función masa (1.46), se obtienen las ecuaciones de campo cuasi-estática para una configuración de materia esférica y anisótropa que radía, dadas por:

$$\rho = \frac{m'}{4\pi r^2}, \quad (1.49)$$

$$P = -\frac{m}{4\pi r^3} + \frac{\nu'}{4\pi r} \left(1 - \frac{2m}{r}\right), \quad (1.50)$$

$$P_{\perp} = \frac{1}{8\pi} \left[\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \left(\nu'' + (\nu')^2 + \frac{\nu'}{r}\right) + \left(\frac{m}{r^2} - \frac{m'}{r}\right) \left(\nu' + \frac{1}{r}\right) \right], \quad (1.51)$$

$$q = -\frac{\dot{m}e^{-\nu}}{4\pi r^2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} - \left[\frac{m'}{r} + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)\nu' - \frac{m}{r^2}\right] \frac{\omega}{4\pi r}. \quad (1.52)$$

Resulta, que es útil expresar la densidad del flujo de energía, en términos de la presión y la densidad como:

$$q = -\frac{\dot{m}e^{-\nu}}{4\pi r^2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} - (\rho + P)\omega. \quad (1.53)$$

Es claro que, el sistema (1.49-1.52) representa un sistema de cuatro ecuaciones con siete incógnitas (ρ , P , P_{\perp} , q , ω , ν y m). Como se verá más adelante, en conjunto con las ecuaciones de acoplamiento, este problema se podrá resolver proponiendo ecuaciones de estado. Por un lado, se darán perfiles tanto de densidad como de presión, inspirados en soluciones estáticas de las ecuaciones de Einstein; resultando conveniente expresar la función métrica ν en términos de la presión (1.50) como:

$$\nu = \int_0^r d\tilde{r} \left(4\pi\tilde{r}P + \frac{m}{\tilde{r}^2}\right) \left(1 - \frac{2m}{\tilde{r}}\right)^{-1}. \quad (1.54)$$

Por otro lado, la última ecuación restante que cierra el sistema de ecuaciones, vendrá dada al proponer un perfil de la velocidad del fluido.

Capítulo 2

Descripción Térmica

Se enfoca la atención en el estudio de las propiedades termodinámicas del sistema, relacionado con teorías fuera del equilibrio termodinámico. La descripción térmica permite confirmar o destacar algunos de los muchos escenarios posibles, y probar indirectamente el estado de la materia dentro de la estrella. En la temperatura se estudian aspectos tales como: transporte de energía, enfriamiento, emisión de neutrinos, entre otros. Sin embargo, en un objeto compacto las incertidumbres tanto en la temperatura como en la edad estimada han impedido corroborar ecuaciones de estado (EoS) que describen la estructura interna de esas estrellas. En otras palabras, los aspectos globales como la temperatura, el radio y la masa de la estrella tienen un interés significativo en cuanto a la estructura, composición y evolución interna de un objeto compacto [1].

2.1 Evolución térmica: Ecuación de Cattaneo relativista

En la teoría de los núcleos estelares es usual suponer que el flujo de radiación es proporcional al gradiente de temperatura. Sin embargo, es bien conocido que la Ley de Maxwell-Fourier conduce a una ecuación parabólica para la temperatura, que predice la propagación de perturbaciones con velocidad infinita. Para superar estas dificultades, diferentes teorías, que incluyen los tiempos de relajación, han sido propuestas [24, 25].

Entre ellas se encuentra la ecuación de Cattaneo relativista, dada por [26]:

$$\tau \frac{dq^\alpha}{ds} + q^\alpha = \kappa P^{\alpha\beta} (T_{,\beta} - T a_\beta) - \tau u^\alpha q_\beta a^\beta \quad (2.1)$$

Esta relación (2.1) ha sido utilizada en el estudio del colapso gravitacional [4, 27], siendo:

- q^α es un cuadri-vector que representa al flujo de energía
- u^β es la cuadri-velocidad
- $P^{\alpha\beta}$ es un proyector de tres espacio ortogonal a u^β
- a^β es la cuadri-aceleración
- $T(r, t)$ la distribución de temperatura
- k denota la conductividad térmica
- τ describe el tiempo de relajación

Donde, para la componente radial, $\alpha = 1$ se tiene que:

$$\begin{aligned} & \tau e^{\lambda-\nu} \left(\dot{q} + q\lambda + q\omega^2 \dot{\lambda} \right) + \tau\omega (q' + q\lambda' + q\nu') + qe^\lambda (1 - \omega^2)^{1/2} \\ &= -\frac{\kappa\omega \dot{T} e^{-\nu}}{(1 - \omega^2)^{1/2}} - \frac{\kappa T' e^{-\lambda}}{(1 - \omega^2)^{1/2}} + \left(\tau q\omega e^{\lambda-\nu} - \frac{\kappa T e^{-\nu}}{(1 - \omega^2)^{1/2}} \right) \left(\omega \dot{\lambda} + \frac{\dot{\omega}}{1 - \omega^2} \right) \\ & \quad + \left(\tau q\omega - \frac{\kappa T e^{-\lambda}}{(1 - \omega^2)^2} \right) \left(\nu' + \frac{\omega\omega'}{1 - \omega^2} \right) \quad (2.2) \end{aligned}$$

Sin embargo, en la aproximación de evolución cuasi-estática de la ecuación de transporte (2.1), se tiene que el flujo radial de calor q se relaciona con la temperatura a través de la ecuación ([2, cap. 13]):

$$q = -\kappa (T' + T\nu') e^{-2\lambda} \quad (2.3)$$

Esta relación es independiente de los tiempos de relajación y conduce a una ecuación de difusión. Esto es de esperarse, ya que el régimen de aproximación cuasi-estática

implica, de manera implícita, tiempos de relajación nulos, puesto que concibe la evolución como una secuencia continua de sistemas en equilibrio hidroestático, despreciando así los tiempos requeridos para establecer dicho equilibrio.

Despreciar el tiempo de relajación es, en muchos casos, una buena aproximación, ya que para la mayoría de los materiales en condiciones usuales, dichos tiempos de relajación son muy pequeños ($\approx 10^{-11}s$ para interacciones fonón-electrón y $\approx 10^{-13}s$ para interacciones fonón-fonón a temperatura ambiente [28]).

2.2 Conductividad y Condición inicial Térmica

Los procesos térmicos de neutrinos son importantes en la evolución de estrellas masivas [29]. Estos ayudan a transportar la energía térmica desde el núcleo hasta las capas más externas. Por lo tanto, se asume que los neutrinos son principalmente generados térmicamente con energías cercana a $\mathbf{k}_B T$.

Para resolver la evolución térmica (2.3), por un lado, es necesario adoptar una expresión para el coeficiente de transporte κ , dada por [30]:

$$\kappa = \frac{4}{3} b T^3 \hat{\tau}_\nu. \quad (2.4)$$

Donde $\hat{\tau}_\nu$ denota el tiempo libre medio entre cada colisión (de los neutrinos, nuestro caso) medido por un observador comóvil y b una constante, que para el caso de los neutrinos, puede ser escrita como $b = \frac{7}{8} \mathbf{s}$, con \mathbf{s} la constante de Stefan-Boltzmann.

En las densidades típicas de una estrella de neutrones, la materia puede capturar neutrinos [4]. El tiempo libre medio para los neutrinos puede ser escrito como:

$$\hat{\tau}_\nu = \frac{\mathcal{A} M_0}{[\rho] \sqrt{\mathcal{Y}_e T^3}}. \quad (2.5)$$

Con $\mathcal{A} \approx 10^9 K^{3/2} m^{-1}$, M_0 la masa inicial, \mathcal{Y}_e es la fracción de electrones y $[\rho]$ la densidad de energía adimensional. Por lo tanto, el tiempo medio entre cada colisión

para un observador con velocidad ω , viene dado por:

$$\tau_\nu = \sqrt{1 - \omega^2} \hat{\tau}_\nu = \sqrt{1 - \omega^2} \frac{\mathcal{A}M_0}{[\rho] \sqrt{\mathcal{Y}_e T^3}} \quad (2.6)$$

Entonces, se podría asumir un comportamiento de la conductividad térmica como:

$$\kappa \approx 2,98 \cdot 10^{-38} \frac{\sqrt{1 - \omega^2}}{[\rho]} T^{-3/2} \quad (2.7)$$

Por otro lado, la evolución térmica, dada por 2.3, también requiere una condición inicial espacial; donde la energía emitida medida desde el infinito se relaciona con la luminosidad L como:

$$E = L (1 - z_0)^2 = L \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{-1} \quad (2.8)$$

siendo z_0 el corrimiento al rojo gravitacional. Pero la luminosidad obtenida por un observador en reposo, situado en el infinito, viene dada por:

$$L = 4\pi R^2 \left(1 - \frac{2M}{R}\right) [q]_\Sigma \quad (2.9)$$

Al recordar la ley de Stephan-Boltzmann, se obtiene que la energía emitida es:

$$E = 4\pi R^2 \mathbf{s} [T]_\Sigma^4, \quad (2.10)$$

y de las ecuaciones (2.8 - 2.10) se obtiene que la temperatura en el borde de la distribución de la materia es:

$$[T]_\Sigma = \sqrt[4]{\frac{q(R, t)}{\mathbf{s}}} \quad (2.11)$$

siendo $[T]_\Sigma$ la condición inicial de la ecuación diferencial (2.3).

Capítulo 3

Hidrodinámica y Radiación y Relaciones de Cierre

El estudio de la hidrodinámica y radiación ha probado ser de gran interés en Astrofísica, Cosmología y en la Física de plasma [31]. La transferencia de radiación es usualmente el mecanismo más efectivo en el intercambio de energía dentro del fluido. En los capítulos anteriores se trató un fluido que transportaba energía sin desarrollar una compresión de la hidrodinámica y la radiación. Sin embargo, ahora nos extendemos a modelar escenarios que comprenden tanto la materia como la radiación por separado. Para describir los comportamientos de tales escenarios, se necesitan de leyes de conservación que consideren con precisión ambas contribuciones de la materia y la radiación [32, cap. 6].

3.1 Ecuaciones de Hidrodinámica y Radiación

La interacción es descrita por la ecuación de transferencia de radiación utilizando términos de absorción y emisión, describiendo la razón del cual la materia absorbe y emite fotones [10]. La ecuación de transferencia de radiación para una intensidad de radiación específica $I(x, t; \mathbf{n}, \nu)$, una función de la posición r y tiempo t , viajando con cierta dirección \mathbf{n} y distribución de frecuencia ν , es en muchas situaciones práctica. Sin embargo, usualmente las ecuaciones para los momentos de $I(x, t; \mathbf{n}, \nu)$ hasta orden m

no forman un sistema cerrado. De hecho, la dependencia del momento $(m + 1)$ en la ecuación de momento m , hace necesario introducir una relación de cierre [33]. Como en la teoría clásica de transferencia de radiación, es conveniente presentar los momentos de la intensidad, dados por [34]:

$$\rho_R = \frac{1}{2} \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^1 d\mu I(r, t; \mathbf{n}, \nu) \quad (3.1)$$

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^1 d\mu \mu I(r, t; \mathbf{n}, \nu) \quad (3.2)$$

$$P_R = \frac{1}{2} \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^1 d\mu \mu^2 I(r, t; \mathbf{n}, \nu) \quad (3.3)$$

Ya que I representa la intensidad [35], se tiene que ρ_R es la densidad de energía de la radiación, siendo \mathcal{F} el promedio del flujo radial, P_R la presión de radiación en la dirección radial.

Esta misma interpretación también viene dada directamente por el tensor de energía momentum. De lo anterior, se puede escribir como $\hat{T}_{\mu\nu} = \hat{T}_{\mu\nu}^M + \hat{T}_{\mu\nu}^R$, donde la parte de materia es $\hat{T}_{\mu\nu}^M$ y el término correspondiente al campo de radiación, dado por $\hat{T}_{\mu\nu}^R$. Considerando un escenario de hidrodinámica y radiación que sea isótropo en la parte de la materia ($\hat{T}_{\mu\nu}^M = \text{diag}(\rho_m, P_m, P_m, P_m)$) mas no en la radiación, se propone el siguiente tensor energía momentum para sistema Minkowskiano y comóvil con el fluido [32]:

$$\hat{T}_{ab} = \begin{pmatrix} \rho_m + \rho_R & -\mathcal{F} & 0 & 0 \\ -\mathcal{F} & P_m + P_R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_m + \frac{1}{2}(\rho_R - P_R) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_m + \frac{1}{2}(\rho_R - P_R) \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Esta es la forma estándar de expresar la contribución de los distintos momentos del campo de radiación. Por lo tanto, el sistema de ecuaciones que relacionan las presiones y densidades totales (obtenidas en el capítulo 1) con sus partes de materia y radiación es:

$$P = P_m + P_R \quad (3.5)$$

$$\rho = \rho_m + \rho_R \quad (3.6)$$

$$P_{\perp} = P_m + \frac{1}{2}(\rho_R - P_R) \quad (3.7)$$

$$q = \mathcal{F} \quad (3.8)$$

Donde las variables P_m , P_R , ρ_m y ρ_R representan las únicas cuatro incógnitas del sistema. Sin embargo, al introducir estas cantidades de hidrodinámica y radiación se debe proporcionar más información y de esta manera, completar el sistema de ecuaciones algebraico (3.5-3.8).

3.2 Factor Variable de Eddington y Límites del Flujo de Radiación

La ecuación de transporte de Boltzmann relativista es la ecuación base para estudiar las interrelaciones entre la materia y la radiación de un fluido [13, 35]. Omitiendo efectos de polarización, dispersión y coherencia, una expresión covariante y relativista de la ecuación de transporte se escribe como [36, 37]:

$$(u^{\mu} + l^{\mu}) \left\{ \nabla_{\mu} I + 4I l^{\sigma} \nabla_{\mu} u_{\sigma} + (l^{\rho} l^{\sigma} + u^{\rho} l^{\sigma}) \frac{\partial I}{\partial l^{\rho}} \nabla_{\mu} u_{\sigma} - \frac{\partial I}{\partial l^{\rho}} \nabla_{\mu} u^{\rho} \right\} = \rho (\epsilon_0 - \kappa I) \quad (3.9)$$

Donde u^{β} es la cuadri-velocidad con $l_{\mu} l^{\mu} = 1$ y $l_{\mu} u^{\mu} = 0$, ρ es la densidad propia del medio y las cantidades ϵ_0 y κ representan los coeficientes de emisión y absorción respectivamente. La ecuación de transporte presenta varias dificultades importantes. Entre las más destacadas tenemos: la falta de información entre el acoplamiento de la radiación y la materia ultradensa, y sus complejidades matemáticas, aunque recientemente se ha obtenido cierta comprensión [38].

En la práctica, comúnmente se evita esta ecuación fundamental recurriendo a algún procedimiento de simplificación que se aproxima al problema de transporte. Una de las posibles estrategias para abordar este problema, es considerando uno de los dos

límites del campo de radiación, los cuales describen un número importante de escenarios Astrofísicos [32]. Entre ellos se encuentra el régimen de escape libre y el régimen de difusión.

El régimen de escape libre asume que el camino libre medio en la radiación (neutrinos y fotones) es del orden de las dimensiones del fluido. Como consecuencia se tiene que:

$$\rho_R = \mathcal{F} = P_R \quad (3.10)$$

El otro límite del campo de radiación, el régimen de difusión, considera que el camino libre medio del flujo de radiación es mucho menor que la longitud característica del sistema. Dentro de este límite, la radiación es localmente isótropa [34], se expresa como:

$$\rho_R = 3P_R \quad (3.11)$$

Estos regímenes de radiación detallan un transporte de radiación determinado, donde estas descripciones se pueden relacionar mediante el factor de flujo f y el factor variable de Eddington χ que, en una dimensión, se definen respectivamente como:

$$f = \frac{\mathcal{F}}{\rho_R} \quad y \quad \chi = \frac{P_R}{\rho_R} \quad (3.12)$$

Usualmente se presenta al factor variable de Eddington como una función explícita del factor de flujo: $\chi(f)$. Por tanto, es fácil comprender que ciertas condiciones generales entre f y χ existen. Es decir, conforme los límites del campo de radiación se obtienen las siguientes relaciones:

$$P_R = \frac{1}{3}\rho_R \quad \Rightarrow \quad \chi(0) = \frac{1}{3} \quad (3.13)$$

$$\mathcal{F} = P_R = \rho_R \quad \Rightarrow \quad \chi(1) = 1 \quad (3.14)$$

Por lo tanto, esto implica que:

$$0 \leq f \leq 1 \quad y \quad \frac{1}{3} \leq \chi(f) \leq 1 \quad (3.15)$$

Además, de requerimientos de casualidad, dado que el flujo puede ser mayor que la

densidad de energía [12], implica las siguientes condiciones [13, 34]:

$$\|f\| < 1, \quad f^2 \leq \chi \leq 1 \quad y \quad -\frac{1-\chi}{1+f} \leq \frac{d\chi}{df} \leq \frac{1-\chi}{1-f} \quad (3.16)$$

3.3 Relaciones de Cierre

Como en nuestro sistema de hidrodinámica y radiación hay más variables físicas que ecuaciones, se debe suministrar una relación adicional entre las variables de radiación que cierre el sistema. Hay una gran cantidad de diferentes relaciones de cierre en la literatura, las cuales siguen diferentes enfoques físicos [9]. Seis de las relaciones de cierre que se encuentran con mayor frecuencia, se indican en la siguiente tabla 3.1.

Relaciones de Cierre	$\chi(f)$	$\frac{d\chi}{df} \Big _{f=1}$	$\frac{d\chi}{df} \Big _{f=0}$
<i>Lorentz-Eddington</i> (LE)	$\frac{5}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{4-3f^2}$	2	0
<i>Bowers-Wilson</i> (BW)	$\frac{1}{3}(1-f+3f^2)$	$\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{3}$
<i>Janka (Monte Carlo)</i> (MC)	$\frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2}f^{1.31} + \frac{3}{2}f^{4.13}\right)$	2.28	0
<i>Maximum Packing</i> (MP)	$\frac{1}{3}(1-2f+4f^2)$	2	$-\frac{2}{3}$
<i>Minerbo</i> (Mi)	$\chi(f) = 1 - 2\frac{f}{\lambda} \cap f = \coth(\lambda) - \frac{1}{\lambda}$	2	0
<i>Levermore-Pomraning</i> (LP)	$\chi(f) = f \coth(\beta) \cap f = \coth(\beta) - \frac{1}{\beta}$	1	0

Tabla 3.1: Relaciones de cierre y sus derivadas evaluadas tanto en el centro de la distribución como en el contorno. Proporcionan una relación adicional entre las variables radiación del sistema, donde el factor de flujo f y el factor variable de Eddington χ vienen dados por las ecuaciones (3.12).

Es evidente que no existe una relación de cierre “correcta”. A lo sumo, se puede encontrar una relación que es capaz de describir al campo de radiación “lo mejor posible”, en un problema de transporte determinado. Algunos, son simplemente relaciones para un propósito específico (*ad hoc*) que interpolan suavemente los límites del campo de radiación, entre los régimen de difusión y escape libre [12]. Otros, se pueden derivar del principio de máxima entropía, desde un punto de vista tanto microscópico [33, 39] como macroscópico [40, 41, 42], o asumiendo una tendencia angular en la función de distribución. Alternativamente, en algunos casos

la dependencia funcional obtenida del cálculo de directo puede servir como modelo de cierre, como es el caso de la relación de *Monte Carlo* (*MC*).

En la figura 3.1a se compara el factor de Eddington de cada relación de cierre de la tabla 3.1. Donde se observa que el caso de *Levermore-Pomraning* (*LP*), crece con

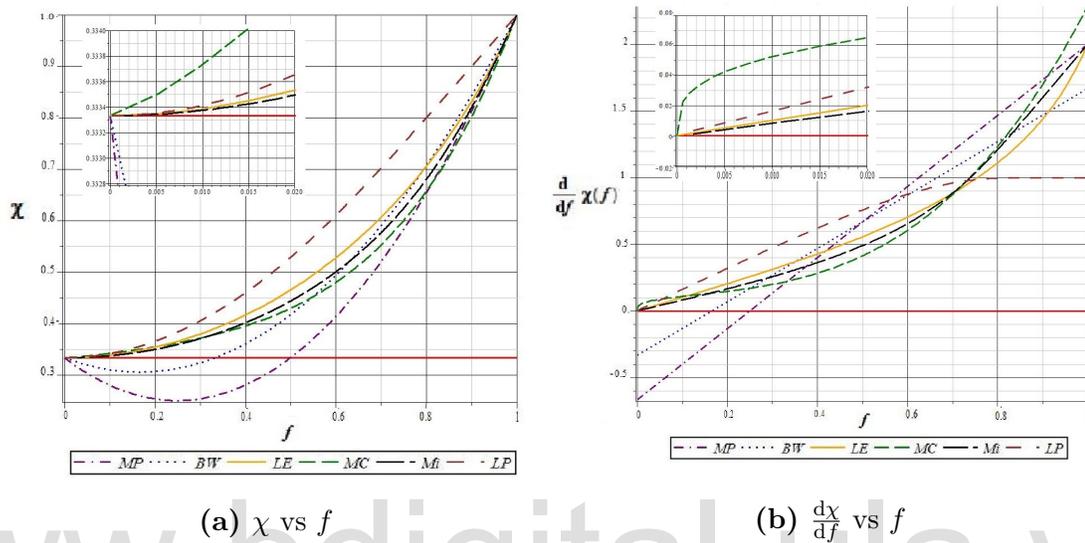


Figura 3.1: Relación funcional entre el factor de flujo f y el factor variable de Eddington χ para diferentes relaciones de cierre, junto con su respectiva razón de cambio $d\chi/df$.

el flujo de energía mucho más rápido, después de *Lorentz-Eddington* (*LE*) y *Bowers-Wilson* (*BW*).

La gráfica 3.1b muestra la razón de cambio de las diferentes relaciones de cierre con respecto al factor de flujo. Se observa que las relaciones tanto de *Bowers-Wilson* (*BW*) como la de *Maximum Packing* (*MP*) tienen un crecimiento lineal, mientras que en χ_{LP} la relación de *Levermore-Pomraning* (*LP*) cerca del régimen de escape libre ($0.8 < f \leq 1$) presenta una tendencia lineal.

A continuación se describen todas las relaciones de cierre mencionadas en la tabla 3.1; cada una ellas comprende diferentes escenarios físicos.

3.3.1 Lorentz-Eddington

Entre los diferentes enfoques físicos para obtener una relación de cierre, la relación de Lorentz-Eddington se puede obtener empleando un principio de máxima entropía. A

partir de una distribución estadística de fotones y ciertas restricciones en el flujo de partículas, se obtiene, como una consecuencia, esta relación de cierre [10].

Por otro lado, en [40], el mismo resultado fue obtenido desde el punto de vista de la teoría de la información, con una energía de flujo determinada. Sin embargo, como lo señalan [9, 43], esta relación asume que la densidad es isótropa en algún marco de referencia inercial. Es decir, en este caso la anisotropía es consecuencia del observador que está situado en un sistema de referencia móvil, mediante una transformación de Lorentz. Usando la contravarianza del tensor de energía impulso se encuentra que:

$$\chi = (1 + 3\beta^2) / (3 + \beta^2), \quad (3.17)$$

$$f = 4\beta / (3 + \beta^2), \quad (3.18)$$

siendo βc la velocidad de un marco de referencia de Lorentz en el cual la densidad es isótropa. En este sistema simple se puede eliminar a β y así obtener la relación de cierre deseada $\chi_{LE}(f)$.

3.3.2 Bowers-Wilson

Fue presentado por primera vez en 1975 por Wilson [44] para el límite del campo de difusión en la emisión de neutrinos, siendo aún extensamente utilizado en simulaciones numéricas de colapso gravitacional [44, 45, 46]. Físicamente, es una relación específica (*ad hoc*) que en promedio interpola entre el régimen de difusión y el régimen de escape libre. Esto garantiza los límites correctos tanto de difusión como de libre escape, sin embargo el comportamiento entre ellas es impreciso.

3.3.3 Janka (Monte Carlo)

Janka en 1992 [47], empleó el método de Monte Carlo en la ecuación de transporte de neutrinos en escenarios típicos de estrellas de neutrones calientes. Este método es un extenso cálculo computacional que consiste en una simulación numérica, donde generalmente se corre muchas veces con el fin de obtener la distribución probabilística. A partir este resultado, él construyó varias relaciones analíticas acorde a los datos del

transporte promedio de energía [11]. La relación fue parametrizada como:

$$\chi(f) = \frac{1}{3} [1 + af^m + (2 - a) f^n] \quad (3.19)$$

para diferentes conjuntos de parámetros (a, m, n) propuestos. Si requerimos el régimen de escape libre en el contorno, los parámetros adecuados deben estar relacionados por:

$$am + (2 - a)n = 6 \quad (3.20)$$

Sin embargo, esta restricción no se ajusta a los parámetros establecido por Janka, del cual muestra una desviación de hasta un 20 %. La relación correspondiente al conjunto $(a = 0.5, m = 1.3064, n = 4.1342)$ pertenece al transporte de neutrinos tipo electrón.

3.3.4 Relaciones de máxima entropía

El primer uso del principio de máxima entropía para encontrar una relación de cierre hace referencia al trabajo de Gerald Minerbo [42], quién aplicó este procedimiento al transporte de fotones. Cernohorsky [48] por primera vez aplicó el principio de máxima entropía a la radiación de fermiones (*fermionic radiation*). Donde se parte de la función de distribución de Fermi-Dirac para la radiación con dependencia del tipo angular.

1. Maximum-Packing

Esta relación se puede obtener al asumir un caso límite de máxima entropía, en la dependencia angular, de la función de distribución de Fermi-Dirac, como se muestra en [13]; de hecho, Fu en [41] lo llama una degeneración angular.

Esta relación de cierre delimita el borde de relaciones de cierre de máxima entropía en el espacio $(\chi(f), f)$; en la gráfica 3.1a representa el límite inferior.

2. Minerbo

Obtenida por Minerbo en [42]. Representa el otro límite de máxima entropía y pertenece al límite de densidad baja o al límite de Maxwell-Boltzmann [10]. Esta relación se muestra en la gráfica 3.1a como el límite superior de máxima entropía. Ambos, con la relación de cierre de Maximum packing delimitan el dominio en el espacio $(\chi(f), f)$.

3.3.5 Levermore-Pomraning

Otra ecuación de cierre que ha sido extensamente empleada en el transporte de radiación mediada tanto por neutrinos como por fotones. Esta relación corresponde a una distribución angular aproximada, donde se asume que el régimen de transporte intermedio (entre los límites del campo de radiación) varía lentamente en el espacio y tiempo [49].

La relación de cierre LP mostró ser consistente con las consideraciones de máxima entropía. Sin embargo, esta relación destaca como anómala en la figura 3.1a, donde se observa que permanece fuera del dominio de máxima entropía (fermiónico). Esta relación es inconsistente con la naturaleza fermiónica de la radiación.

Además, en Janka [47] y Körner & Janka [50] mencionan que esta relación de cierre aproxima a $f \rightarrow 1$ muy rápido en regiones donde la opacidad decae a valores bajos. Esto está relacionado con el hecho de que χ_{LP} no contiene un punto crítico. Este comportamiento puede ser cuantificado al observar el régimen de escape libre. Ya que para LP se encuentra que

$$\left(\frac{\partial \chi_{LP}}{\partial f}\right)_{f=1} = 1 \quad (3.21)$$

del cual es un valor por debajo de las demás relaciones de cierre.

3.4 Los límites para el factor de flujo y condiciones de contorno

Como una continuación de la ecuación de contorno (1.37), para el caso hidrodinámico y radiación, con (3.5) y (3.8), se tiene:

$$[\mathcal{F}]_{\Sigma} = [P_m]_{\Sigma} + [P_R]_{\Sigma} \quad (3.22)$$

Esta relación resulta también interesante si se escribe en términos de los factores de Eddington y de flujo, de la forma:

$$[P_m]_{\Sigma} = [\mathcal{F}]_{\Sigma} \left(1 - \frac{[\chi]_{\Sigma}}{[f]_{\Sigma}}\right) \quad (3.23)$$

Si se asume que las presiones hidrodinámica y el flujo de energía en la superficie tiene que ser positivos, entonces se tiene que $(1 - ([\chi]_{\Sigma}/[f]_{\Sigma})) \geq 0$. En la figura 3.2 se muestran este factor para las diferentes relaciones de cierre dada en la tabla 3.1.

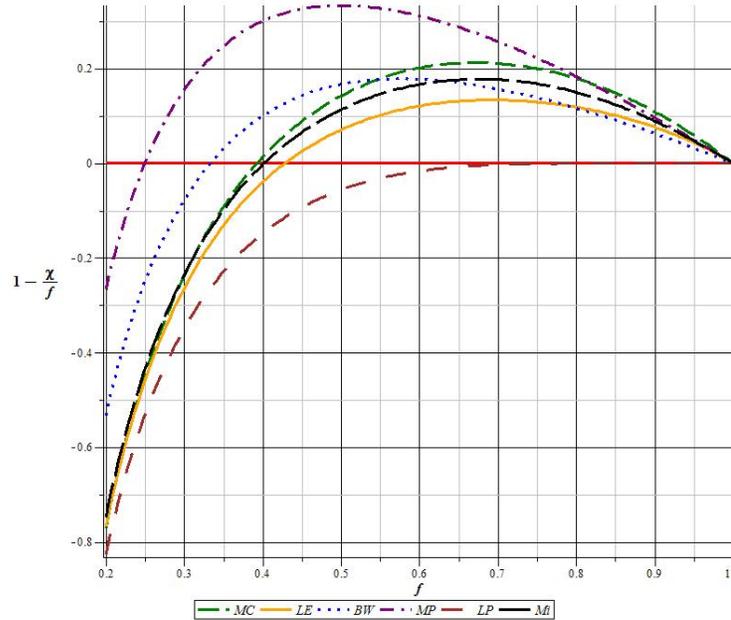


Figura 3.2: Relación funcional de $(1 - \frac{\chi}{f})$ vs f para las diferentes relaciones de cierre de la tabla 3.1, donde se presenta la condición (3.23) y se muestran los valores de contorno permitidos para cada una de las relaciones de cierre, ya que sólo se admitirán los valores positivos, es decir: $0 \leq [P_m]_{\Sigma}$.

Donde es claro que, de esta condición de contorno, se restringe la posibilidad de obtener el régimen de difusión en la superficie de la configuración. Las raíces de cada curva definen el límite del intervalo de aceptabilidad para los valores del factor de flujo f . Los valores de f_{min} se puede obtener de la gráfica 3.1a, ya que los valores posibles de f para cada relación de cierre son todos aquellos que se intercepten con la función $\chi = 1/3$ (línea roja) y dado que se deben respetar las condiciones (3.15), la relaciones de *Bowers-Wilson* y *Maximum Packing* no describen el régimen de difusión, es decir ($f_{min} > 0$). Estos intervalos son mostrados en la tabla 3.2. También se puede apreciar en la figura 3.2 que la relación de *Levermore-Pomraning* sólo acepta el régimen de escape libre en el contorno. Por el otro lado, la relación de *Bowers-Wilson* podría admitir un mecanismo de transporte más cercano al régimen de difusión en la superficie.

Relaciones de Cierre	f_{min}	$f_{r=R}$	$\chi_{r=R}$
<i>Lorentz-Eddington</i> (LE)	0	$\frac{3}{7} \leq f_{r=R} \leq 1$	$\frac{3}{7} \leq \chi_{r=R} \leq 1$
<i>Bowers-Wilson</i> (BW)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} \leq f_{r=R} \leq 1$	$\frac{1}{3} \leq \chi_{r=R} \leq 1$
<i>Janka (Monte Carlo)</i> (MC)	0	$0.39 \leq f_{r=R} \leq 1$	$0.39 \leq \chi_{r=R} \leq 1$
<i>Maximum Packing</i> (MP)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \leq f_{r=R} \leq 1$	$\frac{1}{3} \leq \chi_{r=R} \leq 1$
<i>Minerbo</i> (Mi)	0	$0.40 \leq f_{r=R} \leq 1$	$0.40 \leq \chi_{r=R} \leq 1$
<i>Levermore-Pomraning</i> (LP)	0	$f_{r=R} = 1$	$\chi_{r=R} = 1$

Tabla 3.2: Límites del factor de flujo y el factor variable de Eddington para las diferentes relaciones de cierre en el contorno, junto con su correspondiente valor mínimo del factor de flujo, f_{min} .

www.bdigital.ula.ve

Capítulo 4

Modelando Configuraciones

Resolviendo las ecuaciones de campo cuasi-estáticas (1.49-1.52) se puede observar que: al obtener $\nu(r, t)$ y $m(r, t)$, el sistema pasará a ser un sistema de ecuaciones algebraicas en las variables físicas totales ρ , P , P_{\perp} , ω y q . Sin embargo, en este escenario sólo cuatro de las siete variables físicas (incluyendo las funciones métricas) pueden ser obtenidas. Por lo tanto, se debe aportar más información y así poder obtener las variables físicas relevantes del sistema.

El presente capítulo presenta los perfiles de presión, densidad y velocidad del fluido totales del sistema. Así como también el perfil de la luminosidad que termina de cerrar el sistema de ecuaciones cuasi-estáticas (1.49-1.52).

Por último, se estudiará el intervalo de parámetros físicos que se ajusten a las condiciones de acoplamiento en nuestro escenario de hidrodinámica y radiación. Es decir, obtener el intervalo de parámetros que permitan a nuestras variables de hidrodinámica y radiación (P_R , P_m , ρ_R , ρ_m , f y χ) cumplir con las condiciones de aceptabilidad física.

4.1 Perfil de la Velocidad del Fluido

La velocidad del fluido ω , se considera que tiene sólo una componente en la parte radial, manteniendo la simetría esférica del sistema. De esta manera es claro que, valores positivos indican expansión y negativos indican contracción.

La idea, propuesta por el Dr. J. Ospino (comunicación personal, 4 de abril, 2014), consiste en exigir que la definición de la velocidad del fluido (1.21) sea una ecuación diferencial exacta; proporcionando una nueva relación entre la velocidad del fluido y los coeficientes métricos. Arreglando la ecuación (1.21) tenemos que:

$$\omega e^{\nu} dt - e^{\lambda} dr = 0 \quad (4.1)$$

donde una ecuación diferencial exacta ordinaria de primer orden presenta la forma [51]:

$$\mathcal{M}(t, r) dt + \mathcal{N}(t, r) dr = 0 \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial r} = \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial t} \quad (4.3)$$

Lo cual es equivalente a decir que existe una función $\Phi(r, t)$ tal que:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(r, t) dt + \frac{\partial}{\partial r} \Phi(r, t) dr = \mathcal{M}(t, r) dt + \mathcal{N}(t, r) dr, \quad (4.4)$$

en consecuencia:

$$\frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial t} \Phi = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial r} \Phi \quad (4.5)$$

Al comparar (4.1) y sustituir el valor de Φ se obtiene el perfil de la velocidad del fluido:

$$\omega t + \omega \nu' = -\dot{\lambda} e^{\lambda - \nu} \quad (4.6)$$

Esta relación es una ecuación diferencial ordinaria en ω , que depende sólo de las funciones métricas $\nu(r, t)$ y $\lambda(r, t)$ y sus derivadas. Esto permite que la ecuación (4.6) se pueda considerar parte de nuestro sistema de ecuaciones, junto con las ecuaciones de campo (1.49-1.52).

Junto con esta ecuación, también se consideran ciertas condiciones tanto espaciales como temporales. Para que nuestro escenario sea físicamente válido, se debe imponer que para todo tiempo t , la velocidad del fluido en el centro de la distribución sea cero. Es decir:

$$\omega(0, t) = 0 \quad \forall t \quad (4.7)$$

Con esta condición inicial (4.7), se puede obtener la solución formal de la ecuación diferencial parcial de primer orden en ω (4.6), dada en términos de la masa y la presión como:

$$\omega = - \left(\int_0^r d\tilde{r} \frac{\dot{m}}{\tilde{r}} \left(1 - \frac{2m}{\tilde{r}} \right)^{-\frac{3}{2}} \right) e^{-\int_0^r d\tilde{r} (4\pi\tilde{r}P + \frac{m}{\tilde{r}^2})} \left(1 - \frac{2m}{\tilde{r}} \right)^{-1} \quad (4.8)$$

La velocidad del fluido debe ser consistente con las condiciones de acoplamiento en las funciones métricas dadas por las ecuaciones (1.32) y (1.33). Por lo tanto, partiendo de su definición (1.21), obtenemos la siguiente condición de contorno:

$$[\omega]_{\Sigma} = \dot{R} \left(1 - \frac{2M}{R} \right)^{-1} \quad (4.9)$$

Vemos por un lado, que la relación (4.7) condiciona la parte espacial de la velocidad del fluido, mientras que la condición de contorno (4.9) acota la parte temporal de $\omega(r, t)$, delimitando, de esta manera, la superficie de la distribución dada por la función $R(t)$ que depende sólo del tiempo.

A continuación, se introducen perfiles tanto de presión como de densidad, inspirados en soluciones estáticas de las ecuaciones de Einstein.

4.2 Perfiles de Florides-Gokhroo-Mehra (FGM)

Se presentó inicialmente por P.S. Florides [52] como una solución a las ecuaciones de Einstein para una configuración estática. Esta solución es también un caso particular de las familia de soluciones de Tolman VII [53]. La propuesta de FGM [54] que se extiende al caso dinámico es:

$$\rho = \frac{\sigma}{8\pi} \left(1 - k \frac{r^2}{a^2} \right) \Rightarrow \rho(r, t) = \tilde{\rho}_c(t) \left(1 - K(t) \frac{r^2}{R(t)^2} \right) \quad (4.10)$$

Este perfil de densidad corresponde a un conjunto de soluciones encontradas por Stewart [55] y luego por M.K. Gokhroo y A.L. Mehra en [56]. También tenemos el

perfil de presión dado por:

$$P(r, t) = \frac{\tilde{P}_c(t)}{15} \left(5 - g(t) \frac{9r^2}{R(t)^2} \right) \quad (4.11)$$

Donde ambas coinciden con la densidad de energía y presión radial en el caso estático. En contraste con el caso estático, se introducen las variables $\tilde{\rho}_c$ y \tilde{P}_c que dependen del tiempo, dadas por:

$$\tilde{\rho}_c(t) = \rho_c K(t) \quad \text{y} \quad \tilde{P}_c(t) = P_c K(t) \quad (4.12)$$

Al asumir el centro de la distribución como un gas de Fermi altamente relativista, ρ_c y P_c se relacionan mediante la expresión [4]:

$$P_c = \frac{1}{3} \rho_c \quad (4.13)$$

Como se muestra en A.8, la densidad central de la configuración de FGM se relaciona con las condiciones iniciales del sistema y la función K para un tiempo inicial $t = 0$, dada por:

$$\rho_c = \frac{3}{4\pi R_0^3 K_0} \left(1 - \frac{3K_0}{5} \right)^{-1}. \quad (4.14)$$

4.3 Perfiles de Buchdahl

El siguiente perfil de densidad fue descubierto por primera vez por H.B. Buchdahl [57] y redescubierto más tarde por Durgapal & Bannerji en 1983 [58]. Este perfil de densidad [54] puede ser escrito para el caso dinámico de la forma:

$$\rho = \frac{3C}{16\pi} \frac{3 + Cr^2}{(1 + Cr^2)^2} \quad \Rightarrow \quad \rho(r, t) = \tilde{\rho}_c(t) \frac{3 + K(t) \frac{r^2}{R(t)^2}}{\left(1 + K(t) \frac{r^2}{R(t)^2} \right)^2} \quad (4.15)$$

Conjuntamente, proponemos que la presión radial para el caso dinámico viene dado por:

$$P(r, t) = \tilde{P}_c(t) \frac{1 - g(t) \frac{r^2}{R(t)^2}}{\left(1 + g(t) \frac{r^2}{R(t)^2}\right)^2} \quad (4.16)$$

Siendo $\tilde{\rho}_c$ y \tilde{P}_c las funciones del tiempo dadas por (4.12).

Siendo la densidad central, como se obtiene en A.16, dada por:

$$\rho_c = \frac{M_0 (K_0 + 1)}{4\pi R_0^3 K_0} \quad (4.17)$$

4.4 Perfil de Luminosidad

En nuestro escenario, la luminosidad representa la cantidad de energía que un objeto desprende en forma de radiación (neutrinos y/o fotones) por unidad de tiempo. Para obtener una descripción más realista, se propone una función la luminosidad en forma de pulso:

$$L = -\frac{d\tilde{M}(\tau)}{d\tau} = \left(\frac{8\pi\tilde{M}_{exp}}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\tau-\tau_{pico}}{\sigma}\right)^2}, \quad (4.18)$$

donde se tiene que:

Parámetro de la Luminosidad
τ_{pico} es el tiempo de máxima emisión del pulso de luminosidad
\tilde{M}_{exp} es la masa total expulsada hasta el tiempo de corte
σ es la desviación estándar del pulso de radiación gaussiano

Note que se ha escalado los parámetros físicos con la masa inicial de la configuración M_0 . Es decir, $M(t) = \tilde{M}(t) M_0$, $t = \tau M_0$ y $R(t) = \tilde{R}(t) M_0$, con $M_0 = M(0)$. Nuestro perfil de luminosidad en forma de pulso se muestra en la gráfica 4.1a.

Es claro que la función masa decrece más rápido en el tiempo a medida que la luminosidad aumenta, dado que la masa desprendida en forma de radiación es el área bajo la curva de la luminosidad.

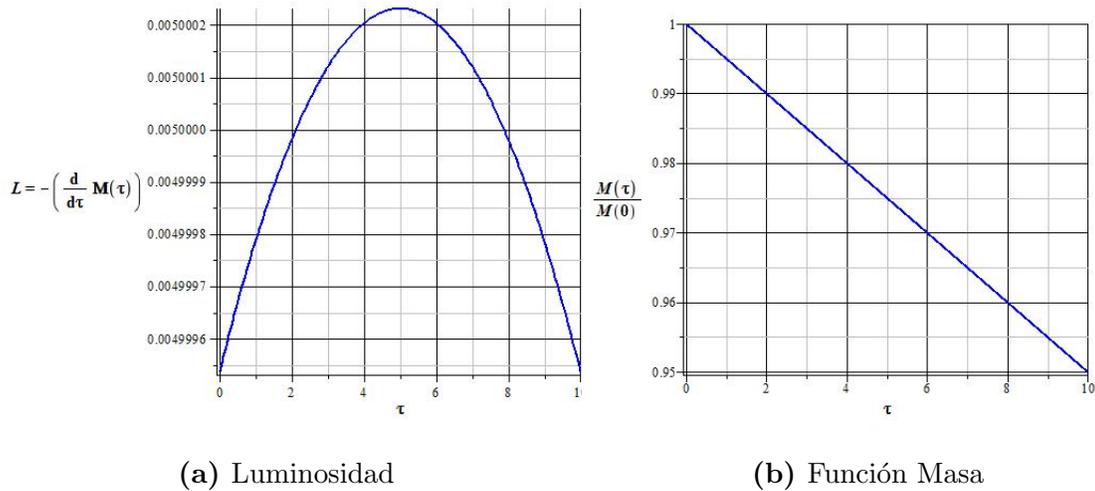


Figura 4.1: Perfil de Luminosidad en forma de pulso y dependencia funcional de la función masa en el tiempo.

4.5 Metodología

Para modelar un escenario que describe la hidrodinámica y radiación de un objeto compacto, debemos obtener todas las variables físicas del sistema. Sin embargo, resulta útil considerar primero variables totales, que no distingan las contribuciones de materia y radiación en el fluido. En la tabla 4.1 se muestra como se obtienen cada una de las variables totales, donde se introduce más información (ecuaciones de estado) al sistema para así poder obtener toda las variables físicas; tales como perfiles de densidad, presión y de la velocidad del fluido así como también sus respectivas condiciones de contorno. Por un lado, los perfiles propuestos aportan la descripción espacial, mientras que las condiciones de contorno contribuyen con la evolución temporal del sistema. El apéndice A muestra, con mayor detalle, algunos procedimientos para obtener las variables físicas. La descripción temporal y espacial de este escenario, para ambas configuraciones, FGM A.1 y Buchdahl A.2, se muestra en el apéndice B; así como también el límite del flujo de radiación en el centro de la distribución, apéndice D.

Luego de resolver el sistema de ecuaciones totales, se considera el escenario que involucra la interacción entre la radiación y la materia. En analogía a lo anterior, la tabla 4.2 muestra tanto las variables de hidrodinámica y radiación como sus ecuaciones.

El sistema de ecuaciones de hidrodinámica y radiación (3.5-3.8), junto con cada

Variables Totales

			P	Ecuaciones de Campo	(1.49-1.52)
			ρ		
			P_{\perp}		
			q		
Funciones del Tiempo				Perfiles de Algunas Variables Física	
Superficie	$M = m(R, t)$	(1.34)	m	Densidad	(4.10, 4.15)
	$[P]_{\Sigma} = [q]_{\Sigma}$	(1.37)	ν	Presión	(4.11, 4.16)
	$[\omega]_{\Sigma} = \frac{\dot{R}}{1 - \frac{2M}{R}}$	(4.7)	ω	Velocidad del Fluido	(4.8)

Tabla 4.1: Esquema para obtener las variables totales y ecuaciones del sistema. La evolución temporal vendrá dada por el comportamiento de las variables físicas M , P y ω en el contorno, y así obtener las funciones del tiempo $K(t)$, $g(t)$ y $R(t)$ correspondientes; mientras que la descripción espacial se obtiene mediante los perfiles de densidad, presión y velocidad del fluido propuestos.

Variables de HyR.

			\mathcal{F}	Ecuaciones de HyR.	(3.5-3.8)
			P_m		
			P_R		
			ρ_m		
			ρ_R		
Relacion de Cierre			(3.1)		
Factor de	Eddington Variable	(3.12)	χ		
	Flujo		f		

Tabla 4.2: Las relaciones de cierre, los factores f y χ , junto con las ecuaciones de hidrodinámica y radiación (HyR), proporcionan toda la información necesaria para obtener todas las variables de HyR; donde las variables totales (P , P_{\perp} y ρ) se obtienen de manera independiente, como lo muestra la tabla 4.1.

una de las relaciones de cierre (3.1), forman un sistema con igual número de ecuaciones e incógnitas. Con ello, se puede obtener la descripción de la interacción entre la materia y la radiación. Sin embargo, las relaciones de cierre representan distintos enfoques físicos, por lo tanto ellas comprenden una hidrodinámica y radiación del fluido ligeramente diferentes, como se observa en la gráfica (3.1). Parte del trabajo consiste en encontrar los posibles parámetros físicos para cada relación de cierre que cumplan con las condiciones de aceptabilidad física; así discernir cual de ellas pueden describir la hidrodinámica y radiación de nuestro escenario.

Capítulo 5

Resultados y Análisis

5.1 Condiciones Iniciales y Parámetros Físicos

Debido al hecho de que se busca resolver el sistema completo de ecuaciones para cada relación de cierre, también se deben encontrar todos los parámetros físicos L_0 , M_0 , R_0 y ρ_c que hacen nuestro escenario físicamente aceptable. Es decir, se excluirán los parámetros que hagan las presiones y densidades de hidrodinámica y radiación negativas y al factor de Eddington menor que $\chi_{min} = 1/3$, entre otros. En el contorno las condiciones de aceptabilidad vienen dadas por:

$$[P_m]_{\Sigma} \geq 0 \quad [P_R]_{\Sigma} \geq 0 \quad [\rho_m]_{\Sigma} \geq 0 \quad [\rho_R]_{\Sigma} \geq 0 \quad [f]_{\Sigma} \geq f_{min} \quad [\chi]_{\Sigma} \geq \frac{1}{3} \quad (5.1)$$

De esta manera, resolviendo este sistema de inecuaciones (véase C), se obtienen restricciones en las variables de hidrodinámica y radiación en el contorno, dadas por las tablas 5.1 y 5.2, que son independientemente de una configuración particular del sistema, es decir, condiciones que se cumplen para cualquier escenario de hidrodinámica y radiación con simetría esférica.

Al considerar el régimen de escape libre ($f = 1$) en el contorno, se imponen ciertas relaciones en las variables de hidrodinámica y radiación del sistema. Empleando las relaciones (3.12) y (3.22), se tiene que la presión total del sistema se convierte en toda

Relaciones de Cierre	Condiciones en el contorno	
<i>Lorentz-Eddington</i> (LE)	$3\rho_R \leq -2P_m + 7P_R$	$3P_\perp \leq 2P$
<i>Bowers-Wilson</i> (BW)	$\rho_R \leq 3P_R$	$P_\perp \leq P$
<i>Janka (Monte Carlo)</i> (MC)	$\rho_R \leq -0,455P_m + 2,545P_R$	$P_\perp \leq 0,77257P$
<i>Maximum Packing</i> (MP)	$\rho_R \leq 3P_R$	$P_\perp \leq P$
<i>Minerbo</i> (Mi)	$\rho_R \leq -0,512P_m + 2,488P_R$	$P_\perp \leq 0,7440P$
<i>Levermore-Pomranning</i> (LP)	$\rho_R = P_R$ y $P_m = 0$	$P_\perp = 0$

Tabla 5.1: Condición de contorno en las variables de hidrodinámica y radiación para cada relación de cierre.

Relaciones de Cierre	Condiciones en el contorno	
<i>Lorentz-Eddington</i> (LE)	$\frac{1}{8} \frac{12(P_m+P_R)^2}{3P_R-\rho_R} + 3P_R - 2\rho_R \leq \rho_m$	
<i>Bowers-Wilson</i> (BW)	$\frac{3(P_m+P_R)^2}{P_m-\rho_R+4P_R} - \rho_R \leq \rho_m$	
<i>Janka (Monte Carlo)</i> (MC)	$\frac{(1,209P_m-1,764\rho_R+6,501P_R)(P_m+P_R)}{(7,167P_R-0,333P_m-2,500\rho_R)} - \rho_R \leq \rho_m$	
<i>Maximum Packing</i> (MP)	$\frac{4(P_m+P_R)^2}{2P_m-\rho_R+5P_R} - \rho_R \leq \rho_m$	
<i>Minerbo</i> (Mi)	$\frac{(3,778P_m-2,909\rho_R+12,504P_R)(P_m+P_R)}{14,551P_R-0,449P_m-5,000\rho_R} - \rho_R \leq \rho_m$	
<i>Levermore-Pomranning</i> (LP)	$0 \leq \rho_m$	

Tabla 5.2: Condición de contorno en las variables de hidrodinámica y radiación para cada relación de cierre.

la presión de radiación, es decir:

$$[P_R]_{(\Sigma, f=1)} = [\mathcal{F}]_{(\Sigma, f=1)} \Rightarrow [P]_{(\Sigma, f=1)} = [P_R]_{(\Sigma, f=1)} \quad (5.2)$$

Además, dado que $\chi(1) = 1$, a partir de las relaciones (3.7) y (3.23), se tiene que:

$$[P_m]_{(\Sigma, f=1)} = 0 \quad \text{y} \quad [P_\perp]_{(\Sigma, f=1)} = 0 \quad (5.3)$$

La ecuación anterior (5.3) indica que las presiones tangenciales del sistema en el contorno se relaciona con la opacidad de la materia en el transporte de radiación. Si las presiones tangenciales aumentan en la superficie, aumenta la anisotropía del fluido, ya que más partículas (neutrinos y/o fotones) interaccionan con la materia, tendiendo al régimen de difusión ($f < 1$). La tabla 5.3 muestra el comportamiento de las variables de hidrodinámica y radiación en el contorno para dos escenarios posibles: el régimen de escape libre (es decir $[P_\perp] = 0$) y en presencia de las presiones tangenciales en la

superficie. Se observa que a medida que el factor de flujo decrece, las variables de radiación disminuyen y las de materia incrementan, sin poder alcanzar el régimen de difusión; $f_{R_{min}}$ y $\chi_{R_{min}}$ vienen dados por la tabla 3.2 y representan los valores mínimos

En el Contorno						
P_{\perp}	P_m	P_R	ρ_m	ρ_R	f	χ
0	0	P	$\rho - P$	P	1	1
αP	$\left(1 - \frac{\chi_{R_{min}}}{f_{R_{min}}}\right) P$	$\left(\frac{\chi_{R_{min}}}{f_{R_{min}}}\right) P$	$\rho - P/f_{R_{min}}$	$P/f_{R_{min}}$	$f_{R_{min}}$	$\chi_{R_{min}}$

Tabla 5.3: Límites de las variables de hidrodinámica y radiación en el contorno para todos los posibles valores de las presiones tangenciales del sistema P_{\perp} . Donde α es un número positivo acotado por los valores obtenidos en la tabla 5.1; y $f_{R_{min}}$ y $\chi_{R_{min}}$ vienen dados por la tabla 3.2 representando los valores mínimos que obtienen en el contorno.

que pueden obtener en el contorno; y α es un número positivo acotado por los valores obtenidos en la tabla 5.1.

Es por tanto útil obtener el comportamiento de las presiones tangenciales en la superficie del fluido $[P_{\perp}]_{\Sigma}$ para ambas configuraciones (FGM y Buchdahl), y ciertas condiciones iniciales determinadas, como se muestran en las gráficas 5.1. Las líneas superiores marcan las magnitudes máximas que pueden obtener las presiones tangenciales en el contorno para las diferentes relaciones de cierre (véase tabla 5.1). Hay que notar que el comportamiento de las presiones tangenciales depende de las condiciones iniciales del sistema, entre ellas la luminosidad.

Por el otro lado, las presiones radial y tangencial, deben ser iguales en el centro de la distribución como una consecuencia de la simetría esférica del sistema. Este hecho, impone ciertas restricciones directas en nuestro escenario, como se muestra:

$$[P]_{r=0} = [P_{\perp}]_{r=0} \quad \Rightarrow \quad \chi(f_{min}) = \frac{1}{3} = \chi_{min} \quad (5.4)$$

Donde f_{min} viene dado por la tabla 3.2. El factor variable de Eddington χ en el centro de la distribución de una distribución esféricamente simétrica toma su valor mínimo 3.15, mientras que el factor de flujo f para todas las relaciones de cierre tiende al régimen de difusión ($f \rightarrow 0$) con la excepción de las relaciones de *Bowers-Wilson* y *Maximum Packing*.

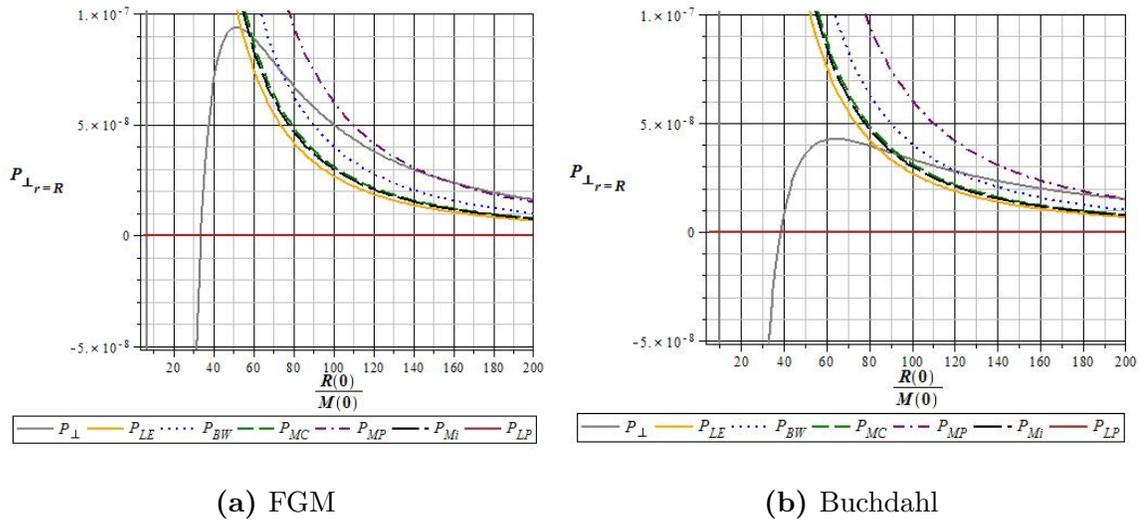


Figura 5.1: Magnitud de las presiones tangenciales en el contorno para ambas configuraciones y ciertas condiciones iniciales. Donde las líneas superiores marcan las magnitudes máximas que pueden obtener las presiones tangenciales en el contorno para las diferentes relaciones de cierre.

5.2 Modelando

Para modelar la hidrodinámica y radiación de nuestro escenario (con cada una de las relaciones de cierre propuestas en la tabla 3.1), se han escogido un conjunto de parámetros físicos, listados en la tabla 5.4, para las configuraciones de FGM y Buchdahl. Se han establecidos los parámetros de nuestro escenario que modelan el régimen de escape libre en la superficie en $t = 0$, escogiendo las condiciones iniciales del sistema que cumplan con $[P_{\perp}]_{(\Sigma, t=0)} = 0$ y obteniendo así las gráficas 5.2 y 5.3. Estas gráficas representan todas las variables de hidrodinámica y radiación que describen las interacciones entre la materia y radiación, para las configuraciones de FGM 4.2 y Buchdahl 4.3 respectivamente. En ambas gráficas se observa que se cumplen con todas las condiciones de contorno obtenidas en el régimen de escape libre, tabla 5.3 y que el sistema se va alejando del régimen de escape libre a medida que evoluciona en el tiempo.

Por otro lado, se puede apreciar en las gráficas 5.2 y 5.3 que a diferencia de las demás relaciones de cierre, en las relaciones de *Bowers-Wilson* (*BW*) y *Maximum Packing* (*MP*) el factor de flujo f tiende a los valores $f = 1/3$ y $f = 0.5$ respectivamente. Es

Parámetros Propuestos	Buchdahl	FGM
$2M_0/R_0$	$\approx 0,052$	$\approx 0,059$
$M_0 \cdot (M_\odot)$	1,00	1,00
$R_0 \cdot (Km)$	$\approx 56,95$	$\approx 49,86$
$\rho_c \cdot (10^{12}g/cm^3)$	$\approx 1,81$	$\approx 15,57$
$M_{exp} \cdot (10^{-2}M_\odot)$	5,00	5,00
$t \cdot (10^{-5}s)$	$\approx 1,2$	$\approx 1,2$
t_{pico}	$t_f/2$	$t_f/2$
σ	300	300
$T_R(0) \cdot (10^{11}K)$	$\approx 5,36$	$\approx 5,73$

Tabla 5.4: Esta tabla presenta un conjunto de parámetros físicos propuestos para modelar la hidrodinámica y radiación de nuestro fluido en dos configuración diferente: Buchdahl y Florides-Gokhroo-Mehra. Se ha denotado a ρ_c como la densidad central; M_\odot la masa solar; t el intervalo de tiempo; M_0 , R_0 y $T_R(0)$ la masa, el radio y la temperatura de superficie inicial del sistema respectivamente.

decir, todas las relaciones de cierre abarcan los valores mínimos y máximos del factor de flujo dados por $f_{min} \leq f \leq 1$. Siendo f_{min} los obtenidos en la tabla 3.2.

Además se observa, que entre todas las relaciones de cierre, la única que no cumple con las condiciones de aceptabilidad física es la de *Janka (MC)*. Sus variables físicas describen escenario físicamente aceptable cerca del contorno mas no en el centro de la distribución. Para cualquier parámetro que cumplan con las condiciones de las tablas 5.1 y 5.2 no cumple simultáneamente con las condiciones de aceptabilidad física en el centro de la distribución, ya que las densidades de energía tienden a valores negativos. Por lo tanto, la relación de cierre de Janka es la única que no se ajusta a las descripciones de hidrodinámica y radiación de nuestro escenario. Esto podría ser consecuencia de que, cerca del centro de la distribución, esta relación crece mucho más rápido que las demás relaciones de cierre como se observa en las gráficas 3.1. De la definición de los factores de Eddington 3.12 se tiene que $\rho_R = \mathcal{F}/f$ se aprecia que si el factor de flujo f crece mucho más rápido la densidad de radiación aumentará como la inversa de f . De igual manera, para ambos perfiles de densidad y presión, todas las relaciones de cierre cumplen con la misma disposición relacionadas con el orden que presentan en las gráficas 3.1. Vemos, de izquierda a derecha, que las relaciones de cierre se encuentran en el siguiente orden: *Levermore-Pomraning (LP)*, *Lorentz-Eddington (LE)*, *Minerbo (Mi)*, *Bowers-Wilson (BW)* y por último la de *Maximum Packing (MP)*.

En la figura 5.4 se muestra la descripción térmica del sistema. Se observa que la temperatura disminuye a medida que se aleja del centro de la distribución, siendo relacionada con las altas densidades que se encuentran en el centro de la distribución y luego decrece hasta llegar a la superficie B.1a. Conforme evoluciona en el tiempo, la temperatura decrece, al igual que el flujo de radiación. La temperatura del sistema depende en gran medida del flujo de radiación en la superficie del fluido $[q]_{\Sigma}$; en la figura 5.4 se observa que la temperatura en la configuración de FGM 5.4a es mayor que en la configuración de Buchdahl 5.4b, así como también el flujo de radiación en el contorno, como se muestra en la figura B.1c. Por otro lado, integrando numéricamente también se obtiene la conductividad térmica del sistema para ambas configuraciones, figura 5.5. Se observa que la conductividad incrementa a medida que se aleja del centro de la distribución, donde la mejor conductividad de calor se encuentra en la superficie. Este resultado era de esperarse, ya que en la descripción de nuestro escenario se mostró que la radiación se encuentra en el régimen de difusión (o cercano a él) en el centro de la distribución y se va aproximando al régimen de escape libre cuanto más cerca se encuentre de la superficie del fluido. El régimen de escape libre en la superficie señala la región de mejor conductividad del sistema, que es también donde la presión de materia es mínima (como se mostró en (5.3)).

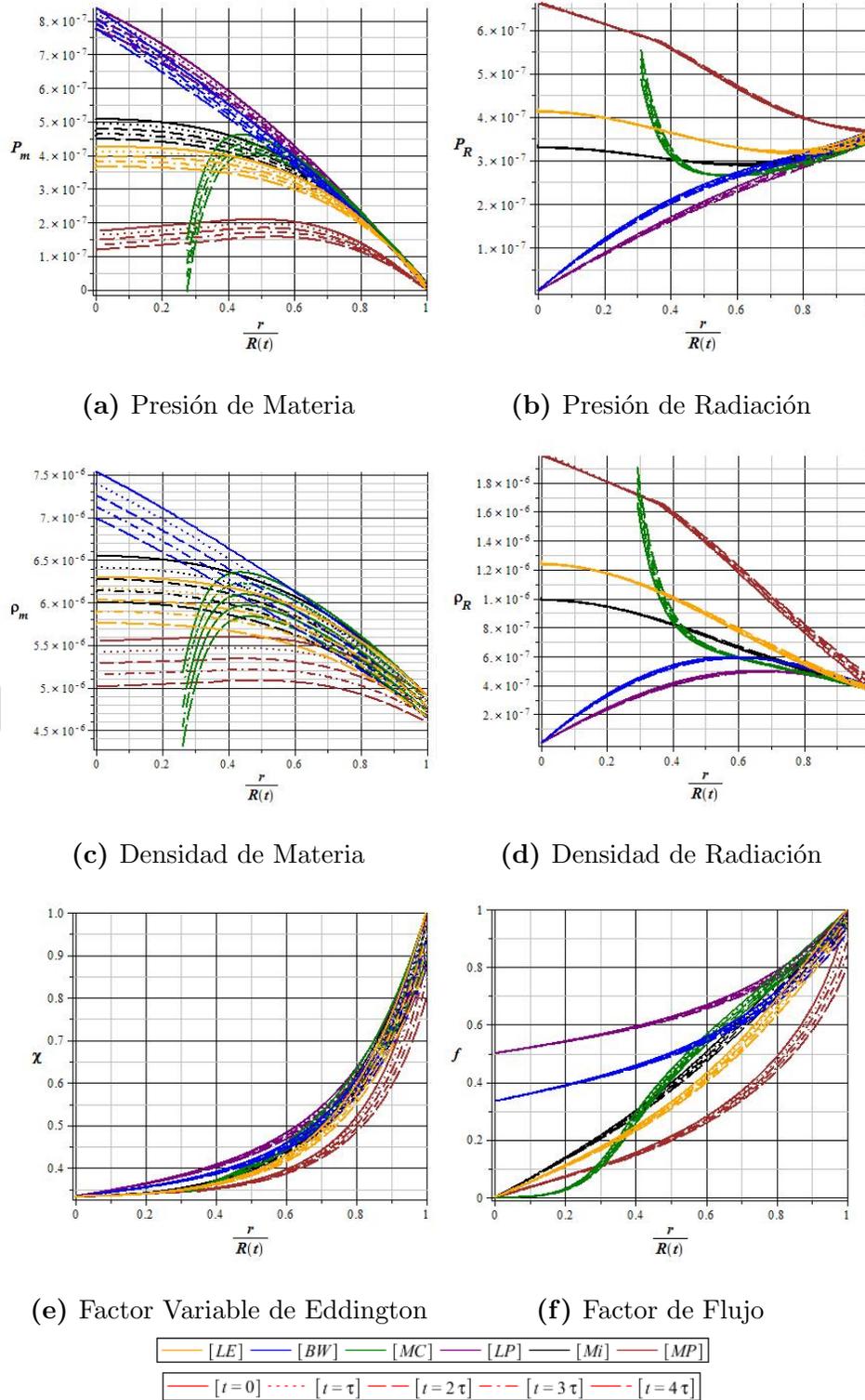


Figura 5.2: Variables de hidrodinámica y radiación en la configuración de Florides-Gokhroo-Mehra para diferentes relaciones de cierre (tabla 3.1), donde se modela una situación de escape libre en el contorno en $t = 0$. La relación de *Janka* (*MC*) es la única que bajo cualquier parámetro físico no cumple con las condiciones de aceptabilidad física de nuestro escenario.

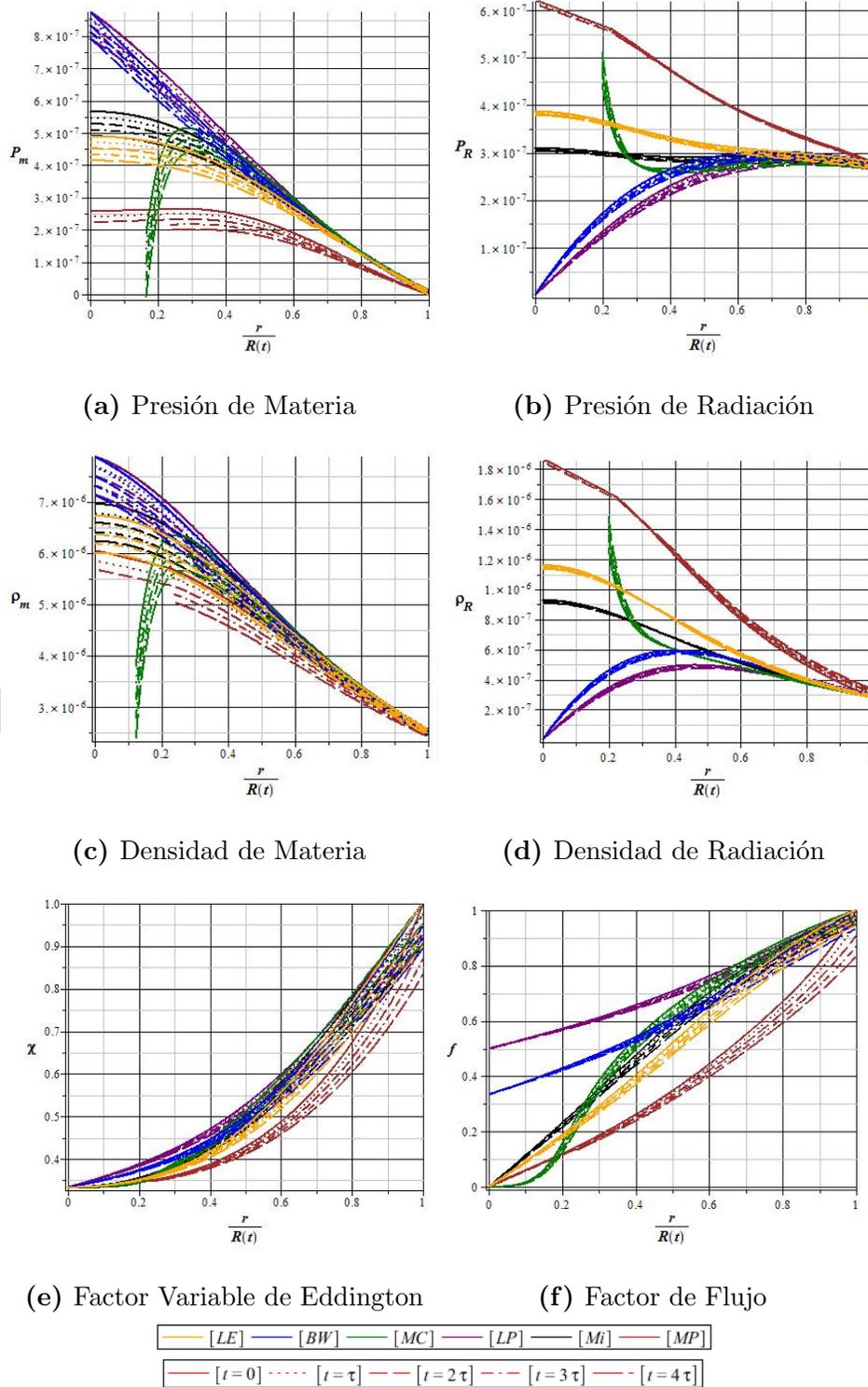


Figura 5.3: Variables de hidrodinámica y radiación en la configuración de Buchdahl para diferentes relaciones de cierre (tabla 3.1), donde se modela una situación de escape libre en el contorno en $t = 0$. La relación de Janka (*MC*) es la única que bajo cualquier parámetro físico no cumple con las condiciones de aceptabilidad física de nuestro escenario.

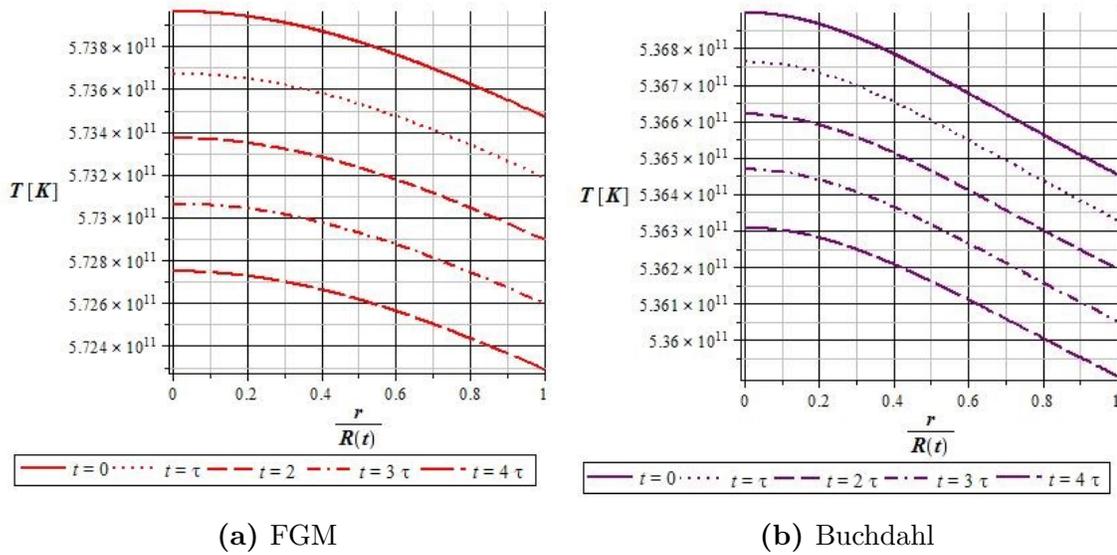


Figura 5.4: Descripción Térmica del fluido evolucionando en el tiempo para ambas configuraciones. En ambas se observa que la temperatura disminuye a medida que el sistema evoluciona en el tiempo.

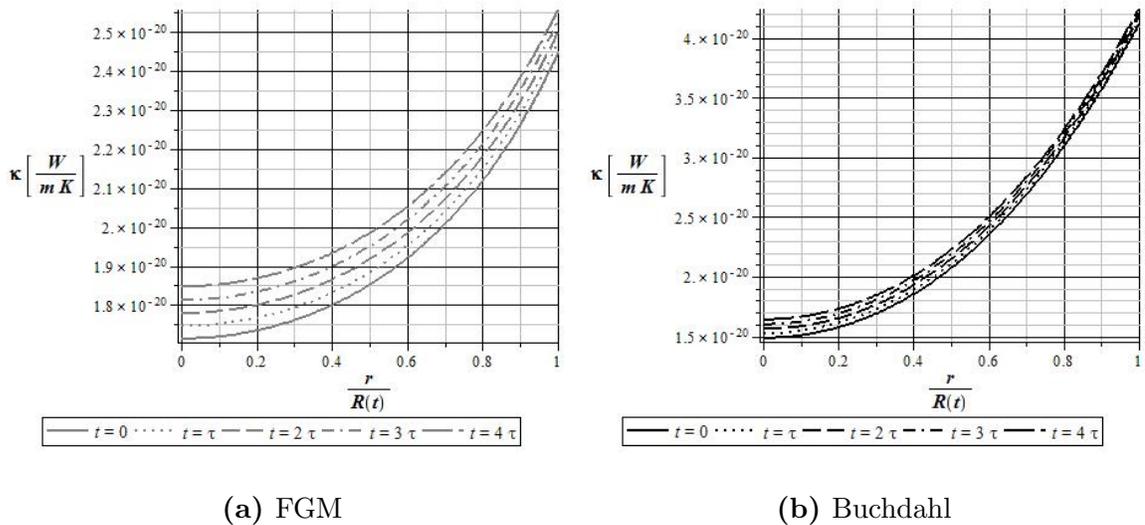


Figura 5.5: Conductividad Térmica del fluido evolucionando en el tiempo para ambas configuraciones. La conductividad aumenta con el tiempo y crece a medida que se aleja del centro de la distribución.

Capítulo 6

Conclusiones

Se modelaron las contribuciones de la radiación y la materia ultradensa en un fluido esféricamente simétrico que radia y evoluciona cuasi-estáticamente; donde se emplearon diferentes relaciones de cierre, así como también un nuevo perfil de la velocidad del fluido bajo diferentes configuraciones: Florides-Gokhroo-Mehra y Buchdahl. Se mostraron todos los parámetros físicos (Ro , Mo , L y ρ_c) que hacen nuestro escenario físicamente aceptable, partiendo de las condiciones de acoplamiento. En el cual se encontraron condiciones en la superficie en las variables de hidrodinámica y radiación que son independiente de las configuraciones propuestas. Sin embargo, de todas las relaciones de cierre que modelan la hidrodinámica y radiación de nuestro escenario, la relación de *Janka* (MC) es la única que no cumple con todas las condiciones de aceptabilidad física para cualquier parámetro. Las demás relaciones modelan un escenario físico aceptable, donde las presiones de materia disminuyen al llegar a la superficie, mientras que la radiación se aproxima al régimen de escape libre. En el centro de la distribución, la radiación se encuentra en el régimen de difusión, en cuatro de las seis relaciones de cierre; mientras que en las relaciones de *Bowers-Wilson* y *Maximum Packing* describen radiación que proviene de las capas más internas de la distribución. Además se mostró que las presiones tangenciales del sistema están vinculadas con la opacidad que tiene la materia frente a la radiación. Siendo la presión de materia nula en la superficie cuando la distribución alcanza el régimen de escape libre en el contorno.

Además, se mostró que con el nuevo perfil de la velocidad del fluido, se pueden modelar escenarios tanto de expansión como de colapso. En el cual se observó que para valores altos de $2M/R$ el fluido colapsa y se tiene un flujo radiación negativo; mientras que cuando el objeto se expande, el flujo radial de calor cambia, siendo su magnitud siempre positiva.

Por otra parte, también se obtuvo la descripción y la conductividad térmica del sistema, donde se encontró que la temperatura decrece con la distancia al centro de la distribución y que se enfría mientras evoluciona en el tiempo. Se observó también que la mejor conductividad térmica se encuentra en la superficie, y que mejora en el tiempo, en concordancia con lo obtenido en los escenarios de hidrodinámica y radiación.

www.bdigital.ula.ve

Bibliografía

- [1] JM. Lattimer y M. Prakash. The physics of neutron stars. *Science*, 304(5670):536–542, 2004.
- [2] L Herrera. *Campos gravitacionales en la materia: La otra cara de la moneda II*. Escuela Venezolana de Relatividad, Campos and Astrofísica, Mérida Venezuela, 1996.
- [3] M Cosenza, L Herrera, M Esculpi, y L Witten. Some models of anisotropic spheres in general relativity. *Journal of Mathematical Physics*, 22(1):118–125, 1981.
- [4] J Martinez. Transport processes in the gravitational collapse of an anisotropic fluid. *Physical Review D*, 53(12):6921, 1996.
- [5] WD Arnett. Neutrino trapping during gravitational collapse of stars. *The Astrophysical Journal*, 218:815–833, 1977.
- [6] Rudolf Kippenhahn, Alfred Weigert, y Achim Weiss. *Stellar structure and evolution*, volume 44. Springer, 1990.
- [7] Martin Schwarzschild. Structure and evolution of the stars, 1958. *Russ. translation: M. Schwarzschild, Structure and evolution of the stars, Izd-vo inostr. lit*, 1961.
- [8] Gerald C Pomraning. *The equations of radiation hydrodynamics*. Courier Corporation, 2005.
- [9] CD Levermore. Relating eddington factors to flux limiters. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 31(2):149–160, 1984.

- [10] Raquel Domínguez-Cascante. Information theory in the study of anisotropic radiation. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 30(22):7707, 1997.
- [11] Markus Rampp y H-T Janka. Radiation hydrodynamics with neutrinos-variable eddington factor method for core-collapse supernova simulations. *Astronomy & Astrophysics*, 396(1):361–392, 2002.
- [12] Jose A Pons, J Ma Ibáñez, y Juan A Miralles. Hyperbolic character of the angular moment equations of radiative transfer and numerical methods. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 317(3):550–562, 2000.
- [13] JM Smit, LJ Van den Horn, y SA Bludman. Closure in flux-limited neutrino diffusion and two-moment transport. *Astronomy and Astrophysics*, 356:559–569, 2000.
- [14] J.B. Hartle. *Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity*. Addison Wesley, San Francisco, United States of America, 2003.
- [15] B. Schutz. *A first course in General Relativity*. Cambridge University Press, United States of America, 2009.
- [16] A. Lichnerowicz. Theories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme. relativité générale et théories unitaires. *Collection d'Ouvrages de Mathématiques à l'Usage des Physiciens, Paris: Masson, 1955*, 1, 1955.
- [17] W Bonnor. B and vickers pa 1981. *Gen. Rel. Grav.* 13, 29.
- [18] G. Darrois. *Mémoires des sciences mathématiques*. Number 98. Gauthier-Villars, 1940.
- [19] Charles W Misner y David H Sharp. Relativistic equations for adiabatic, spherically symmetric gravitational collapse. *Physical Review*, 136(2B):B571, 1964.
- [20] Michael E Cahill y George C McVittie. Spherical symmetry and mass-energy in general relativity. i. general theory. *Journal of Mathematical Physics*, 11(4):1382–1391, 1970.

- [21] James R Wilson. A numerical study of gravitational stellar collapse. *The Astrophysical Journal*, 163:209, 1971.
- [22] Richard C Adams, Boyd B Cary, y Jeffrey M Cohen. A simple model of a supernova. *Astrophysics and space science*, 155(2):271–293, 1989.
- [23] Dany Page, James M Lattimer, Madappa Prakash, y Andrew W Steiner. Minimal cooling of neutron stars: A new paradigm. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 155(2):623, 2004.
- [24] Daniel D Joseph y Luigi Preziosi. Heat waves. *Reviews of Modern Physics*, 61(1):41, 1989.
- [25] B Carter. Journées relativistes, ed. *Cahen M., Deveber R. and Geheniahau J.,(ULB)*, 1976.
- [26] Josep Triginer y Diego Pavón. Heat transport in an inhomogeneous spherically symmetric universe. *Classical and Quantum Gravity*, 12(3):689, 1995.
- [27] A Di Prisco, L Herrera, y M Esculpi. Radiating gravitational collapse before relaxation. *Classical and Quantum Gravity*, 13(5):1053, 1996.
- [28] Rudolf Ernst Peierls. *Quantum theory of solids*. Clarendon, 1955.
- [29] Stuart L Shapiro y Saul A Teukolsky. *Black holes, white dwarfs and neutron stars: the physics of compact objects*. John Wiley & Sons, 2008.
- [30] Steven Weinberg. Entropy generation and the survival of protogalaxies in an expanding universe. *The Astrophysical Journal*, 168:175, 1971.
- [31] Gerald C Pomraning. *The equations of radiation hydrodynamics*. Courier Dover Publications, 1973.
- [32] Dimitri Mihalas y Barbara Weibel-Mihalas. *Foundations of radiation hydrodynamics*. Courier Dover Publications, 1999.
- [33] AM Anile, S Pennisi, y M Sammartino. A thermodynamical approach to eddington factors. *Journal of mathematical physics*, 32(2):544–550, 1991.

- [34] Felix Aguirre, LA Núñez, y Terenzio Soldovieri. Variable eddington factor and radiating slowly rotating bodies in general relativity. *arXiv preprint gr-qc/0503085*, 2005.
- [35] Richard W Lindquist. Relativistic transport theory. *Annals of Physics*, 37(3):487–518, 1966.
- [36] JL Anderson y EA Spiegel. The moment method in relativistic radiative transfer. *The Astrophysical Journal*, 171:127, 1972.
- [37] G Ali y V Romano. Jump conditions for a radiating relativistic gas. *Journal of Mathematical Physics*, 35(6):2878–2901, 1994.
- [38] Garij V Efimov, Wilhelm von Waldenfels, y Rainer Wehrse. Mathematical aspects of the plane-parallel transfer equation. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 58(3):355–373, 1997.
- [39] GM Kremer y Ingo Müller. Radiation thermodynamics. *Journal of mathematical physics*, 33(6):2265–2268, 1992.
- [40] Raquel Domínguez y David Jou. Thermodynamic pressure in nonequilibrium gases. *Physical Review E*, 51(1):158, 1995.
- [41] Albert Fu. Physical constraints on variable eddington factors for the gray problem in radiative transfer. *The Astrophysical Journal*, 323:227–242, 1987.
- [42] Gerald N Minerbo. Maximum entropy eddington factors. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 20(6):541–545, 1978.
- [43] Raquel Domínguez-Cascante y Jordi Faraudo. Nonequilibrium corrections in the pressure tensor due to an energy flux. *Physical Review E*, 54(6):6933, 1996.
- [44] James R Wilson, R Couch, S Cochran, J Blanc, y Z Barkat. Neutrino flow and the collapse of stellar coresfn1. *Annals of the New York Academy of Sciences*, 262(1):54–64, 1975.

- [45] R Bowers y JR Wilson. Collapse of iron stellar cores. *The Astrophysical Journal*, 263:366–376, 1982.
- [46] OEB Messer, Anthony Mezzacappa, SW Bruenn, y MW Guidry. A comparison of boltzmann and multigroup flux-limited diffusion neutrino transport during the postbounce shock reheating phase in core-collapse supernovae. *The Astrophysical Journal*, 507(1):353, 1998.
- [47] H-Th Janka. Flux-limited neutrino diffusion versus monte carlo neutrino transport. *Astronomy and Astrophysics*, 256:452–458, 1992.
- [48] J Cernohorsky, LJ Van Den Horn, y J Cooperstein. Maximum entropy eddington factors in flux-limited neutrino diffusion. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 42(6):603–613, 1989.
- [49] GC Pomraning. Maximum entropy eddington factors and flux limited diffusion theory. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 26(5):385–388, 1981.
- [50] A Körner y H-Th Janka. Approximate radiative transfer by two-moment closure—when is it possible? *Astronomy and Astrophysics*, 266:613–618, 1992.
- [51] Dennis G Zill y Francisco Sánchez Frago. *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*. Thomson Learning, 2002.
- [52] Petros S Florides. A new interior schwarzschild solution. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 337(1611):529–535, 1974.
- [53] Richard C Tolman. Static solutions of einstein’s field equations for spheres of fluid. *Physical Review*, 55(4):364, 1939.
- [54] Hector Hernández y Luis A Núñez. Nonlocal equation of state in anisotropic static fluid spheres in general relativity. *Canadian journal of physics*, 82(1):29–51, 2004.
- [55] BW Stewart. Conformally flat, anisotropic spheres in general relativity. *Journal of Physics A Mathematical General*, 15:2419–2427, 1982.

- [56] MK Gokhroo y AL Mehra. Anisotropic spheres with variable energy density in general relativity. *General relativity and gravitation*, 26(1):75–84, 1994.
- [57] Hans A Buchdahl. General relativistic fluid spheres. *Physical Review*, 116(4):1027, 1959.
- [58] MC Durgapal y R Bannerji. New analytical stellar model in general relativity. *Physical Review D*, 27(2):328, 1983.

www.bdigital.ula.ve

Apéndice A

Configuraciones de FGM y Buchdahl

A.1 Configuración de Florides-Gokhroo-Mehra

Esta configuración fue introducida inicialmente por P.S. Florides en [52], siendo un caso particular de las familia de soluciones de Tolman VII [53]. El perfil de densidad forma parte de una solución a las ecuaciones de Einstein para una configuración estática. Al generalizarse [54] al caso dinámico, tenemos que:

$$\rho = \frac{\sigma}{8\pi} \left(1 - k \frac{r^2}{a^2}\right) \Rightarrow \rho(r, t) = \tilde{\rho}_c(t) \left(1 - K(t) \frac{r^2}{R(t)^2}\right). \quad (\text{A.1})$$

Por otra parte, este perfil de densidad también corresponde a una familia de soluciones encontradas por Stewart [55] y luego por M.K. Gokhroo y A.L. Mehra en [56]. Además, tenemos el perfil de presión dado por:

$$P(r, t) = \frac{\tilde{P}_c(t)}{15} \left(5 - g(t) \frac{9r^2}{R(t)^2}\right). \quad (\text{A.2})$$

De la ecuación de campo (1.49), y la ecuación del perfil de densidad (A.1), tenemos que la función masa puede ser escrita como:

$$m(r, t) = \int_0^r 4\pi r^2 \rho dr = \frac{4}{3}\pi r^3 \tilde{\rho}_c \left(1 - K(t) \frac{3r^2}{5R(t)^2}\right) \quad (\text{A.3})$$

Con el fin de obtener las demás variables físicas relevantes del sistema, es necesario primero encontrar la otra función métrica $\nu(r, t)$. Al conocer la configuración de FGM (A.1-A.3), se puede integrar (1.54) y así obtener la función métrica. Donde las dependencias en el tiempo vendrán en términos de las funciones de acoplamiento.

Siendo las variables efectivas $\tilde{\rho}_c$ y \tilde{P}_c funciones del tiempo que describen la evolución temporal de las densidades y presiones centrales, dadas por:

$$\tilde{\rho}_c(t) = \rho_c K(t) \quad \text{y} \quad \tilde{P}_c(t) = P_c K(t) \quad (\text{A.4})$$

Donde en el caso estático, ρ_c y P_c se relacionan por medio de una constante, a través de la expresión [4]:

$$P_c = \beta \rho_c \quad (\text{A.5})$$

y asumiendo el centro de la distribución, como un gas de Fermi altamente relativista, se tiene que $\beta = 1/3$.

A.1.1 Funciones de Acoplamiento

De las ecuación de frontera (1.34) y la relación (A.3) se obtiene la función dependiente del tiempo $K(t)$, que se acopla a una de las condiciones de contorno, dada por:

$$K(t) = \frac{5}{6} \left[1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{9M}{\pi R^3 \rho_c} \right)} \right]. \quad (\text{A.6})$$

Donde

$$\frac{6}{5} K_0 - 1 = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{9M}{\pi R^3 \rho_c} \right)}, \quad (\text{A.7})$$

de aquí

$$\rho_c = \frac{3}{4} \frac{M_0}{\pi R_0^3 K_0} \left(1 - \frac{3K_0}{5} \right)^{-1}. \quad (\text{A.8})$$

Ya que exigimos la restricción $[\rho]_{\Sigma} \geq 0$ del lado derecho de (A.1) evaluada en la superficie Σ , nos queda que:

$$K(1 - K) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq K \leq 1. \quad (\text{A.9})$$

Vemos que $K(t)$ no sólo es una función del tiempo que permite acoplar la parte temporal de ambas métricas tanto internas como externas, sino que también representa cómo decrece la densidad para un tiempo determinado. Esto se observa claramente en la figura A.1

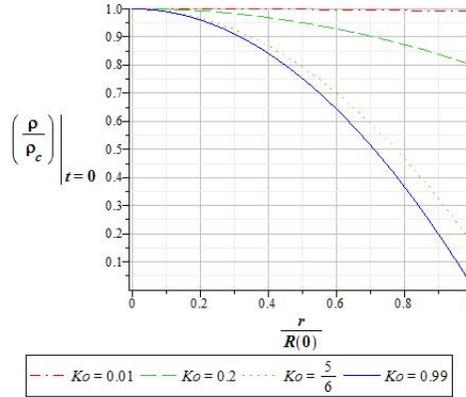


Figura A.1: Perfil de densidad en función de la distancia para diferentes valores iniciales de K_0

A medida que aumentan los valores iniciales de K_0 , la densidad decrece más rápido con la distancia.

Por otro lado, empleando la otra condición de acoplamiento (1.37) y el perfil de presión (4.11) hallamos la otra función del tiempo dada por:

$$g(t) = \frac{5}{9} + \frac{5}{3} \frac{\left(\left[\frac{\partial m}{\partial t} \right]_{\Sigma} + 4\pi R^2 \rho_c K \dot{R} (1 - K) \right)}{4\pi R^2 P_c K \left(\dot{R} + \left(1 - \frac{2M}{R} \right) \right)} \quad (\text{A.10})$$

Donde:

$$\left[\frac{\partial m(r, t)}{\partial t} \right]_{\Sigma} = \frac{24}{15} \pi R^2 \rho_c \left(\dot{K} R \left(\frac{5}{6} - K \right) + K^2 \dot{R} \right) \quad (\text{A.11})$$

A.2 Configuración de Buchdahl

H.B. Buchdahl obtuvo por primera vez esta configuración en [57] y redescubierta más tarde por Durgapal & Bannerji en 1983 [58]. Este perfil de densidad se generaliza al

caso dinámico como:

$$\rho = \frac{3C}{16\pi} \frac{3 + Cr^2}{(1 + Cr^2)^2} \Rightarrow \rho(r, t) = \tilde{\rho}_c(t) \frac{3 + K(t) \frac{r^2}{R(t)^2}}{\left(1 + K(t) \frac{r^2}{R(t)^2}\right)^2} \quad (\text{A.12})$$

Además, en la presión radial se propone el caso dinámico de la forma:

$$P(r, t) = \tilde{P}_c(t) \frac{1 - g(t) \frac{r^2}{R(t)^2}}{\left(1 + g(t) \frac{r^2}{R(t)^2}\right)^2} \quad (\text{A.13})$$

Análogo a la configuración de FGM (A.1), empleando la ecuación de campo cuasi-estática (1.49), se obtiene la función métrica dada por:

$$m(r, t) = \int_0^r 4\pi r^2 \rho dr = \frac{4\pi R^2 \tilde{\rho}_c r^2}{R^2 + Kr^2} \quad (\text{A.14})$$

De igual forma que en la sección anterior, empleando la configuración de Buchdahl (A.12-A.14) en la relación (4.8) se puede obtener la otra función métrica $\nu(r, t)$. Donde $\tilde{\rho}_c$ y \tilde{P}_c vienen dadas por (A.4).

A.2.1 Funciones de Acoplamiento

Sólo son posibles dos funciones del tiempo en los perfiles de densidad y presión, debido a que se ajustarán a las dos ecuaciones de acoplamiento (1.34) y (1.37) obtenidas. Cabe notar que este perfil de densidad de Buchdahl (A.12) es independiente de una de las funciones del tiempo, $g(t)$, ya que de esta manera se desacopla la densidad de la presión y se simplifican los cálculos. Por lo tanto, análogo a la sección anterior tenemos que:

$$K(t) = \left(\frac{4\pi R^3 \rho_c}{M_0} - 1 \right)^{-1}. \quad (\text{A.15})$$

implicando que:

$$\rho_c = \frac{M_0 (K_0 + 1)}{4\pi R_0^3 K_0} \quad (\text{A.16})$$

Donde, al igual que para el caso estático, se impone que sea para todo $K(t) > 0$. Para la otra función del tiempo se tiene que:

$$g(t) = \frac{2\pi R^2 \rho_c K}{3\dot{M}} \left(\dot{R} - 6\frac{R\dot{M}}{M} + \left(1 - \frac{2M}{R}\right) + \mathcal{G} \right) + K \quad (\text{A.17})$$

donde:

$$\mathcal{G} = \left(\left[\dot{R} + \left(1 - \frac{2M}{R}\right) \right]^2 + \frac{12}{2\pi R^2 \rho_c K} \left(\dot{M} - 2\dot{M}\frac{M}{R} + \dot{M}\dot{R} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.18})$$

A.3 Evolución de la Superficie: Configuraciones de FGM y Buchdahl

En nuestro escenario, la evolución de la superficie $R(t)$ cambia con el tiempo y está restringida por la condición de contorno de la velocidad del fluido ω (4.9), es decir:

$$[\omega]_{\Sigma} = \dot{R} \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{-1}. \quad (\text{A.19})$$

En otras palabras, la evolución de superficie $R(t)$ hace que la parte temporal de velocidad del fluido se ajuste a las condiciones de acoplamiento (1.33) y (1.32).

La ecuación para $R(t)$, escrita como:

$$\dot{R} = - \left(\int_0^R d\tilde{r} \frac{\dot{m}}{\tilde{r}} \left(1 - \frac{2m}{\tilde{r}}\right)^{-\frac{3}{2}} \right) \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{A.20})$$

es una ecuación diferencial de primer orden no lineal, lo que indica que el problema puede tener más de una solución diferente, o puede incluso no tenerla, dependiendo del intervalo de integración; fue resuelta de manera numérica.

Tanto en la configuración de Florides-Gokhroo-Mehra como en la de Buchdahl, la ecuación (A.20) presenta una singularidad para ciertos valores de las condiciones

iniciales K_0 , M_0 y R_0 . Se puede despejar la derivada de primer orden con respecto al tiempo en la ecuación (A.20) (ya que \dot{m} también depende de \dot{R}), y ver cómo es su comportamiento para condiciones iniciales dadas; en la figura A.2 se muestra la evolución de la superficie obtenida para ambas configuraciones y parámetros particulares. Nótese que los cambios en el tiempo de $R(t)$ son muy pequeños, siendo

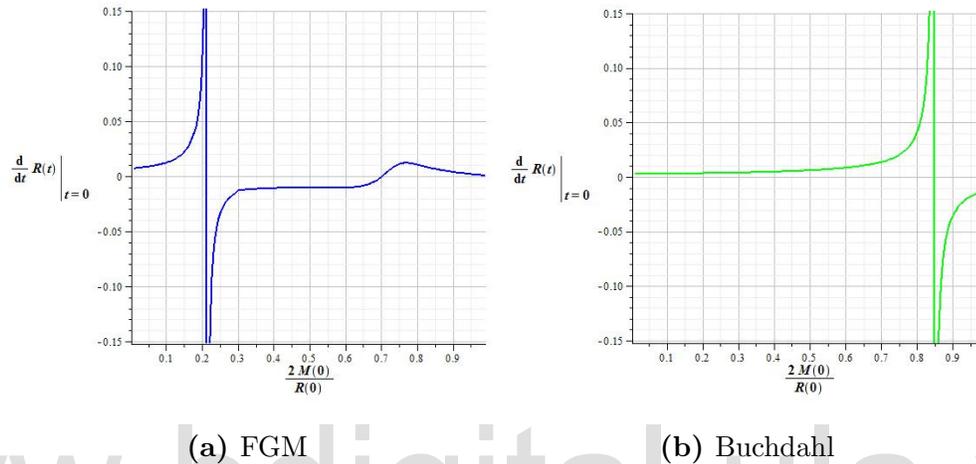


Figura A.2: Relación \dot{R} vs $2M_0/R_0$ para las configuraciones de FGM y Buchdahl, obtenida a partir de la ecuación (A.19). Donde los valores positivo indican que el fluido se expande, mientras que los negativos indican colapso. Se emplearon los valores iniciales $K_0 = 0.3$ y $K_0 = 0.8$ en las configuraciones de FGM y Buchdahl respectivamente.

consistente con el régimen de aproximación cuasi-estático. Los cambios positivos en el tiempo de la superficie \dot{R} indican expansión, mientras que los valores negativos indican que el fluido colapsa. Para poder obtener todos los parámetros que afectan a la evolución de la superficie, se grafica primero la función inversa, como se muestra en la figura A.3.

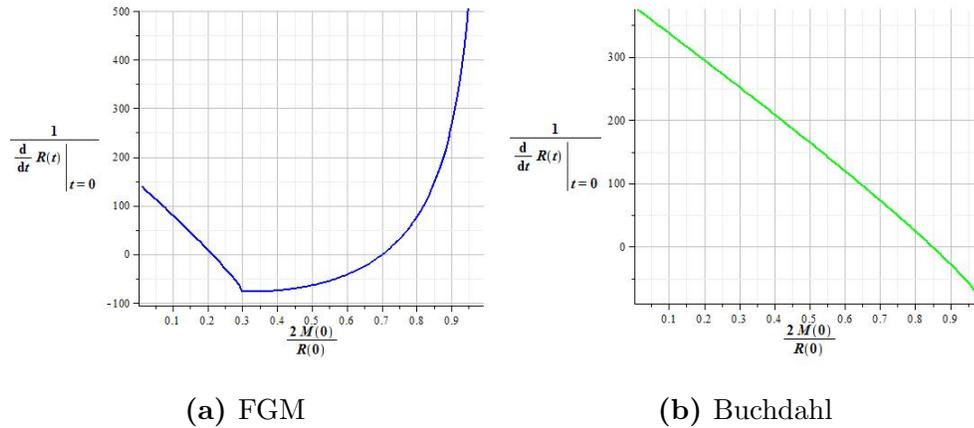


Figura A.3: Relación $1/\dot{R}$ vs $2M_0/R_0$ para las configuraciones de FGM y Buchdahl. Los valores positivo indican que el fluido se expande, mientras que los negativos representan colapso. En la gráficas se emplearon los valores iniciales $K_0 = 0.3$ y $K_0 = 0.8$ en las configuraciones de FGM y Buchdahl respectivamente. Se observa que las singularidades de \dot{R} (figura A.2) se tratan de mejor manera al considerar su inversa $1/\dot{R}$.

Se puede apreciar que de esta manera nos evitamos las singularidades encontradas (véase figura A.2), lo que nos permite obtener todos los parámetros posibles donde ocurre tanto expansión como colapso. Es decir graficando la relación (A.21) de manera implícita se obtiene la figura A.4.

$$0 \leq \frac{1}{\frac{d}{dt}R(t) \Big|_{t=0}} \quad (\text{A.21})$$

Donde las regiones pintadas representan un fluido en expansión, mientras que afuera significa colapso. Las variables físicas del sistema para ambas situaciones posibles se presentan a continuación, obtenidas para las configuraciones de Florides-Gokhroo-Mehra (FGM) y Buchdahl; donde es interesante observar que sólo cuando el sistema colapsa, para ambas configuraciones se obtiene un flujo de radiación negativo.

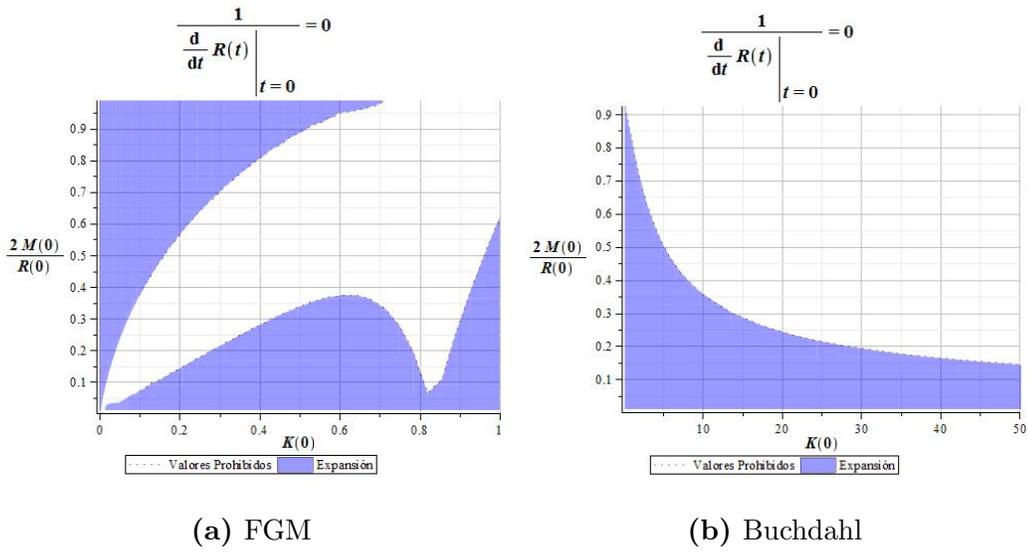


Figura A.4: Gráfica implícita de la ecuación (A.21) para ambas configuraciones frente a las condiciones iniciales del sistema de K_0 y $(2M_0/R_0)$.

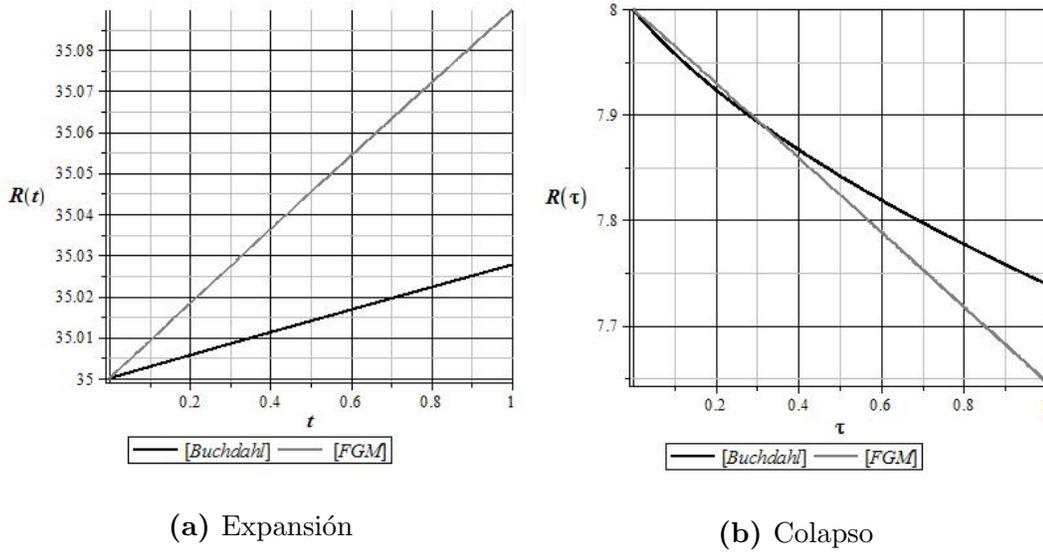


Figura A.5: Evolución de la Superficie

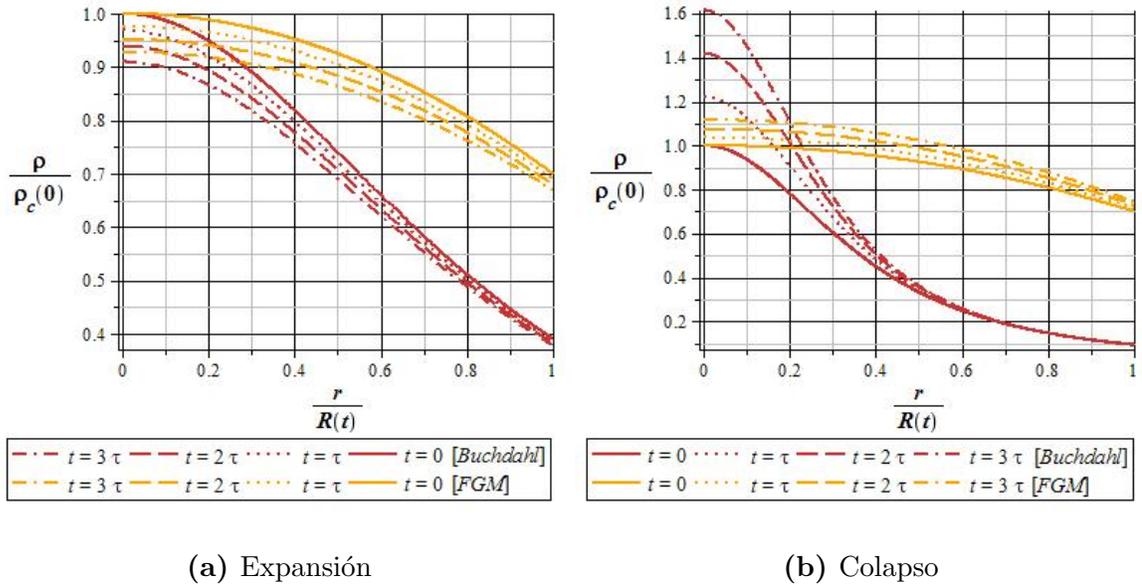


Figura A.6: Densidad Total

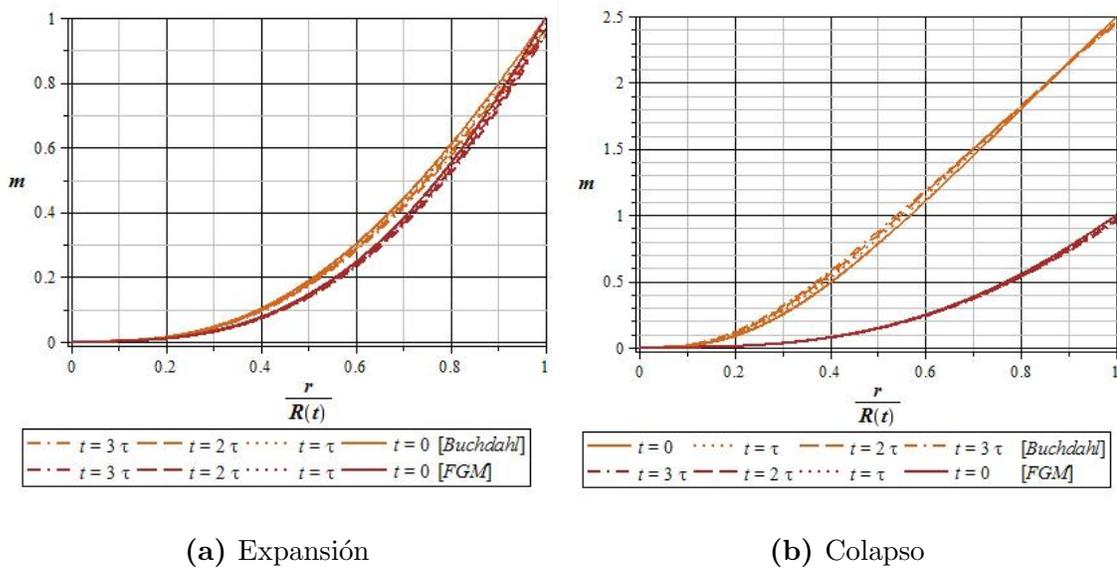


Figura A.7: Función Masa

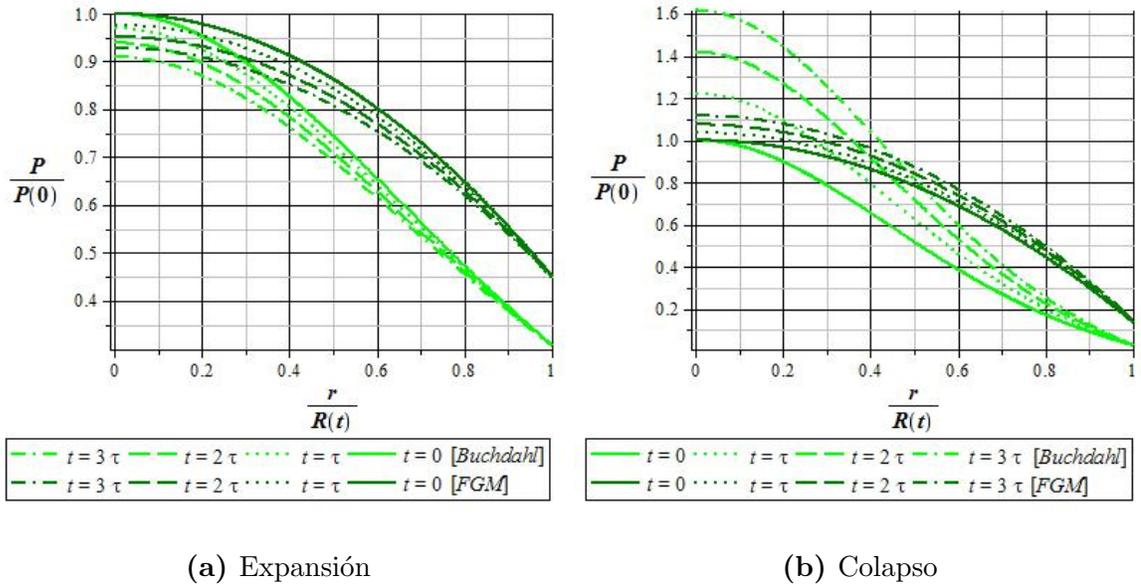


Figura A.8: Presión Total

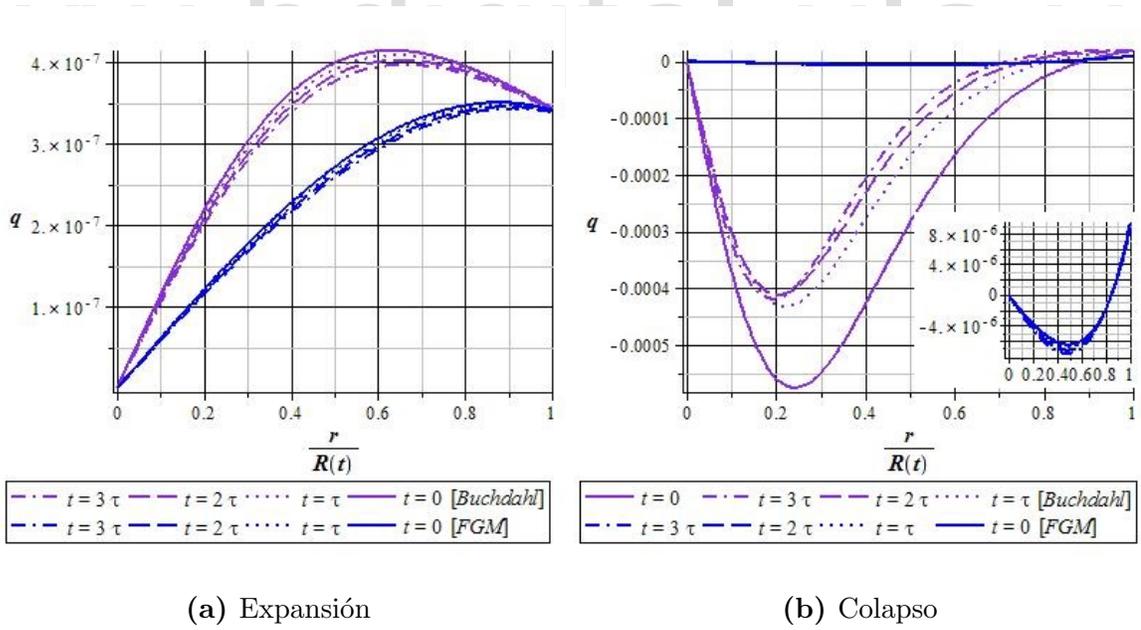


Figura A.9: Densidad del Flujo de Radiación

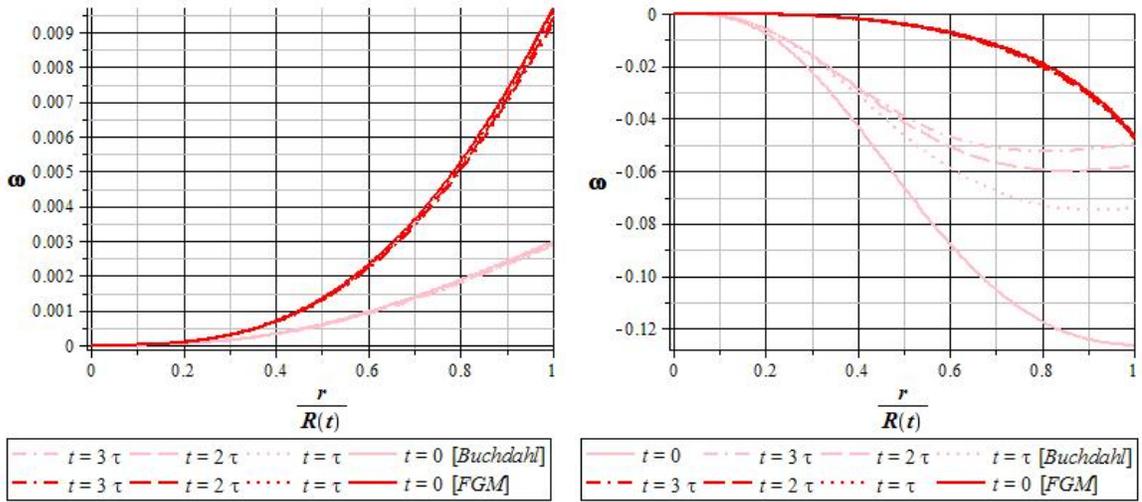


Figura A.10: Velocidad del Fluido

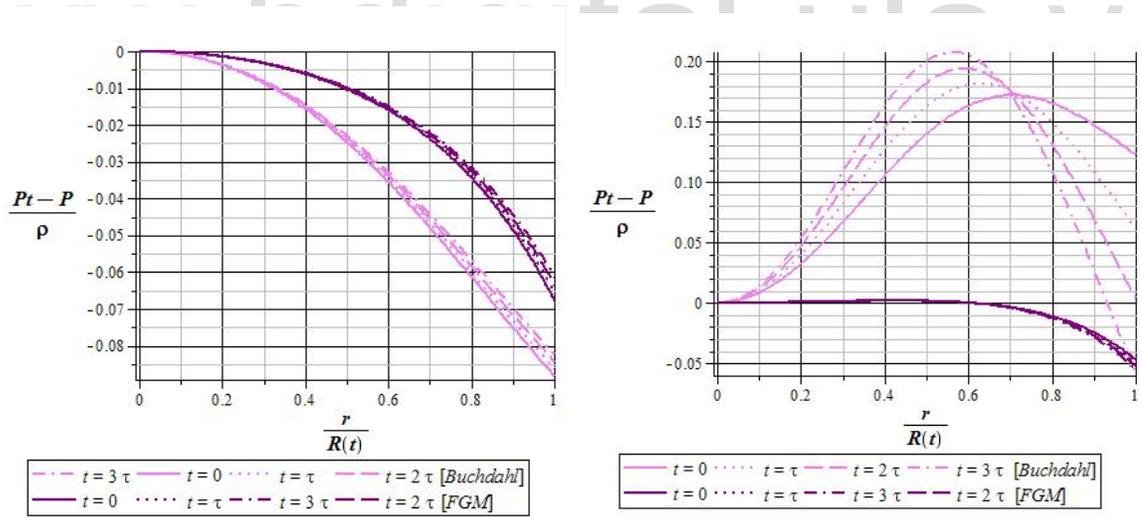


Figura A.11: Anisotropía del Fluido.

Apéndice B

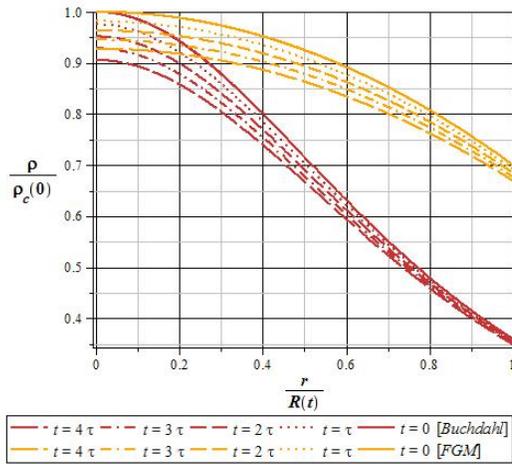
Escenarios en evolución cuasi-estática

En este capítulo se muestran las variables físicas totales de nuestro escenario: presión radial P , presiones tangenciales P_{\perp} , densidad ρ y flujo de radiación q . Ambas configuraciones están contenidas en nuestro escenario, tanto las de FGM como las de Buchdahl, para los mismo parámetros escogidos dados por la tabla 5.4. En la figura B.1 se aprecia como ambos modelos representan escenarios diferentes en todas las variables físicas del sistema: la densidad de energía ρ , la presión radial P , la densidad del flujo de radiación q , la presión tangencial P_{\perp} , la velocidad del fluido ω y la anisotropía I :

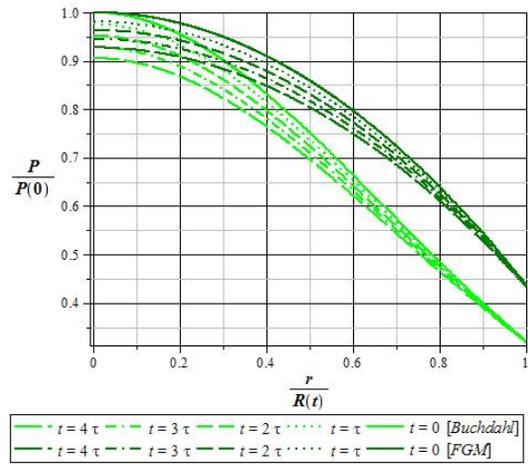
$$I = \frac{P_{\perp} - P}{\rho}. \quad (\text{B.1})$$

Sin embargo, como se muestra en el capítulo 5, ambas configuraciones se encuentran el régimen de escape libre en el contorno.

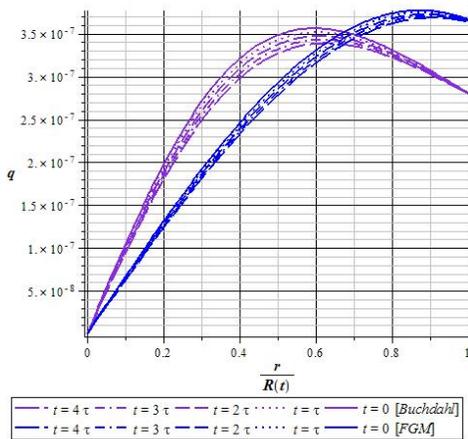
Además, al observar las figuras A.9 y A.10 se muestran que el caso de colapso no puede ser modelado, dado que describe a un flujo de radiación q negativo implicando densidades de materia fuera de las condiciones de aceptabilidad, al ver (3.8) y (3.12); siendo consecuencia tanto del perfil del fluido propuesto (4.6) y (4.7) como de los parámetros escogidos 5.4. En la figura B.1e se muestra el caso de expansión en ambas configuraciones.



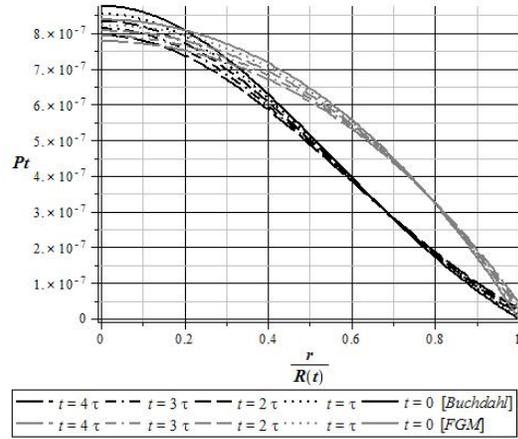
(a) Densidad Total



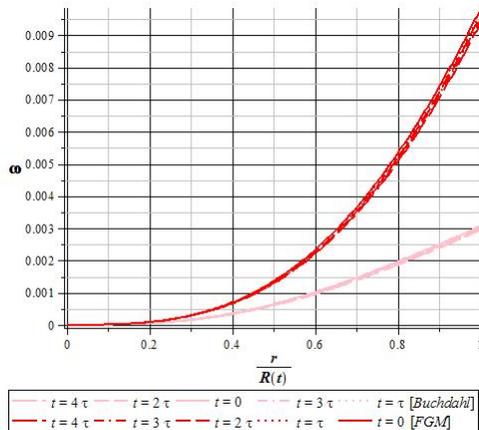
(b) Presión Total



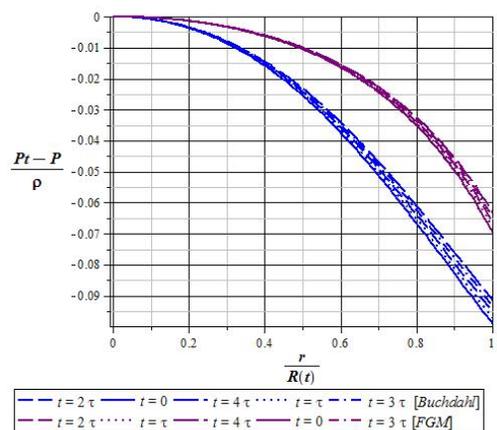
(c) Densidad de Flujo de Energía



(d) Presión tangencial



(e) Velocidad del Fluido



(f) Anisotropía del Fluido

Figura B.1: Las variables Físicas del sistema para ambas configuraciones, Buchdahl y Floride-Gokhroo-Mehra (FGM). Donde se emplearon las mismas condiciones iniciales de la tabla 5.4

Apéndice C

Condiciones de Contorno en Hidrodinámica y Radiación

Como se mostró en el capítulo 1, las condiciones de contorno han impuesto restricciones en las variables físicas totales del sistema. Sin embargo, también debemos encontrar las consecuencias de esas condiciones en nuestras variables de hidrodinámica y radiación, y de las condiciones de aceptabilidad física sistema:

$$[P_m]_\Sigma \geq 0 \quad [P_R]_\Sigma \geq 0 \quad [\rho_m]_\Sigma \geq 0 \quad [\rho_R]_\Sigma \geq 0 \quad [f]_\Sigma \geq f_{min} \quad [\chi]_\Sigma \geq \frac{1}{3} \quad (\text{C.1})$$

lo que permitirá acotar, aun más, el intervalo de los posibles parámetros físicos L_0 , M_0 , R_0 y ρ_c del sistema.

Con el fin de resolver este sistema de inecuaciones, empecemos encontrando las variables de hidrodinámica y radiación para cada relación de cierre (véase tabla 4.2) en términos de las presiones tangeenciales P_\perp , radiales P , densidad ρ y flujo de radiación q totales de nuestro fluido. tabla C.1.

Al evaluar en la superficie con (1.37), se observa que el sistema se puede resolver de manera analítica en tres de las seis relaciones de cierre. Haciendo, sin perder generalidad alguna, el cambio de variables $P_\perp = \sigma P$ y considerando:

$$0 \leq \frac{[P_m]_\Sigma}{[P]_\Sigma} = [P_m]_\sigma \quad 0 \leq \frac{[P_R]_\Sigma}{[P]_\Sigma} = [P_R]_\sigma \quad 0 \leq \frac{[\rho_m]_\Sigma}{[P]_\Sigma} = [\rho_m]_\sigma \quad 0 \leq \frac{[\rho_R]_\Sigma}{[P]_\Sigma} = [\rho_R]_\sigma \quad (\text{C.2})$$

Relaciones de Cierre	ρ_R	P_R
<i>Lorentz-Eddington</i> (LE)	$\frac{(P-P_{\perp})^2+3q^2}{(4P-P_{\perp})}$	$\frac{(5(P-P_{\perp})^2+15q^2-4[(P-P_{\perp})^2-3q^2])}{12(P-P_{\perp})}$
<i>Bowers-Wilson</i> (BW)	$\frac{3q^2}{q+2(P-P_{\perp})}$	$\frac{1}{3} \left(q + \frac{2q^2+4(P-P_{\perp})^2}{q+2(P-P_{\perp})} \right)$
<i>Janka (Monte Carlo)</i> (MC)	<i>Num. obtenida</i>	<i>Num. obtenida</i>
<i>Maximum Packing</i> (MP)	$\frac{2q^2}{q+P-P_{\perp}}$	$\frac{2}{3} \left(\frac{q^2+(P-P_{\perp})^2}{q+P-P_{\perp}} \right)$
<i>Minerbo</i> (Mi)	$(P - P_{\perp}) + 3q/\alpha$	$(P - P_{\perp}) - q/\alpha$
<i>Levermore-Pomraning</i> (LP)	$2(P_{\perp} - P) - 3q \frac{(e^{2\alpha}+1)}{(e^{2\alpha}-1)}$	$q \coth(\alpha)$

Tabla C.1: Densidad ρ_R y Presión P_R de radiación para cada una de las relaciones de cierre en términos de las variables físicas totales: Presión P , Flujo de Calor q y presiones tangenciales P_{\perp} . Nótese que las demás variables de hidrodinámica y radiación se pueden obtener si mayor dificultad a partir de nuestro sistema (3.5-3.7).

se obtiene la tabla C.2. De esta manera, es posible encontrar el intervalo de soluciones

Relaciones de Cierre	$[\rho_R]_{\sigma}$	$[P_R]_{\sigma}$
<i>Lorentz-Eddington</i> (LE)	$\frac{3\sigma^2-6\sigma+4}{4(1-\sigma)}$	$\frac{\sigma^2-2\sigma+4}{4(1-\sigma)}$
<i>Bowers-Wilson</i> (BW)	$\frac{4\sigma^2-10\sigma+9}{3(3-2\sigma)}$	$\frac{3}{3(3-2\sigma)}$
<i>Maximum Packing</i> (MP)	$\frac{2}{3} \frac{\sigma^2-3\sigma+3}{(2-\sigma)}$	$\frac{2}{(2-\sigma)}$

Tabla C.2: Densidad $[\rho_R]_{\sigma} = [\rho_R]_{\Sigma} / [P]_{\Sigma}$ y Presión $[P_R]_{\Sigma} = [P_R]_{\Sigma} / [P]_{\Sigma}$ de radiación adimensional en términos de $\sigma = [P_{\perp}]_{\Sigma} / [P]_{\Sigma}$ para las relaciones de cierre que se resuelven de manera analítica. Se obtienen a partir de la tabla C.1 y la condición de contorno (1.37). Las demás variables de hidrodinámica y radiación se pueden obtener si mayor dificultad a partir de nuestro sistema (3.5-3.7).

donde σ está bien definido y al devolver el cambio de variables, con $\sigma = [P_{\perp}]_{\Sigma} / [P]_{\Sigma}$, se podrán imponer condiciones entre las presiones y como consecuencia, sobre las variables de hidrodinámica y radiación del fluido mediante las relaciones (3.5) y (3.7). Se debe notar, que la única variable física que contiene a la densidad total del sistema es la densidad de materia ρ_m , la cual, se puede resolver de manera independiente. Esto se hace de forma análoga, sugiriendo el cambio de variables $\varsigma = [\rho_m]_{\Sigma} / [P]_{\Sigma}$.

Por otro lado, las demás relaciones de cierre requieren un análisis numérico. Esto se puede resolver, graficando a σ por todos los valores posibles y excluyendo los valores que no cumplan las condiciones de aceptabilidad física, como se muestran en la gráficas

C.2, y así imponer condiciones de contorno en nuestras variables de hidrodinámica y radiación, tabla C.3. Sin embargo, la condición $0 \leq [\rho_R]_\sigma$ requiere un análisis numérico

Relaciones de Cierre	Condiciones en el contorno	
<i>Lorentz-Eddington</i> (LE)	$3\rho_R \leq -2P_m + 7P_R$	$3P_\perp \leq 2P$
<i>Bowers-Wilson</i> (BW)	$\rho_R \leq 3P_R$	$P_\perp \leq P$
<i>Janka (Monte Carlo)</i> (MC)	$\rho_R \leq -0,455P_m + 2,545P_R$	$P_\perp \leq 0,77257P$
<i>Maximum Packing</i> (MP)	$\rho_R \leq 3P_R$	$P_\perp \leq P$
<i>Minerbo</i> (Mi)	$\rho_R \leq -0,512P_m + 2,488P_R$	$P_\perp \leq 0,7440P$
<i>Levermore-Pomraning</i> (LP)	$\rho_R = P_R$ y $P_m = 0$	$P_\perp = 0$

Tabla C.3: Condición de contorno en las variables de hidrodinámica y radiación para cada relación de cierre.

diferente dado que contiene tanto a σ como a ζ . Por lo tanto, graficando ζ en función de σ para todos los posibles valores donde se cumple $0 = [\rho_R]_\sigma$ se logra acotar a ζ , gráficas C.1. Haciendo un ajuste numérico de la curva que separa la región donde

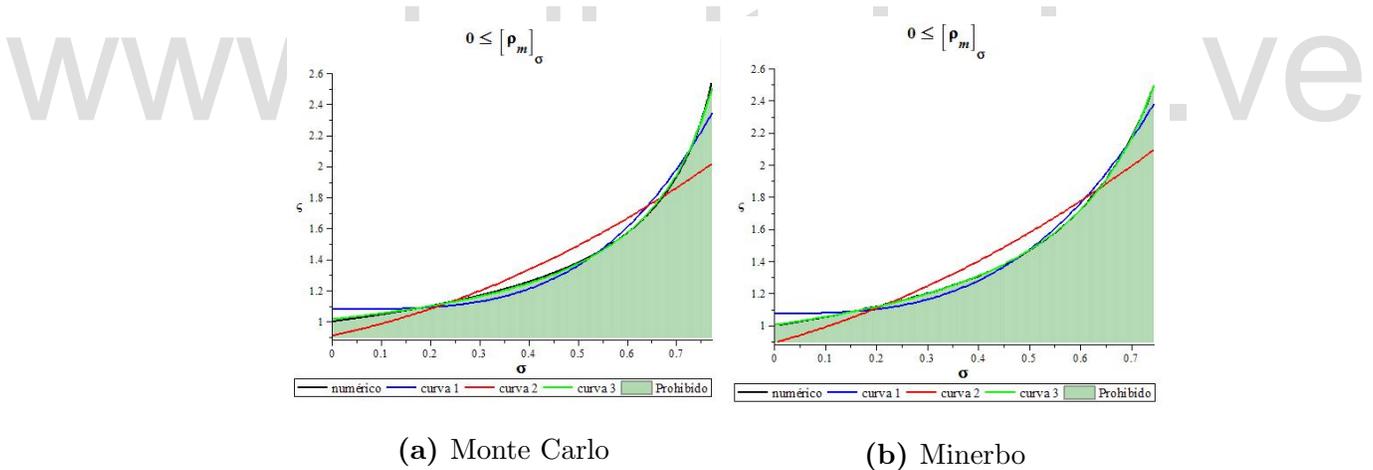


Figura C.1: Grafica de $\zeta = [\rho_m]_\Sigma / [P]_\Sigma$ vs $\sigma = [P_\perp]_\Sigma / [P]_\Sigma$ para todos los valores que cumplen con la condición $0 \leq [\rho_R]_\sigma$. Donde, de lo obtenido en la tabla C.3, se hizo: $0 \leq \sigma_{MC} \leq 0,77257$ y $0 \leq \sigma_{Mi} \leq 0,7440$.

ρ_m se hace negativo (región prohibida), se obtiene la expresión para ζ . Se observa en ambas gráficas que la curva que mejor se ajusta es la número 3, que corresponden a las expresiones de la tabla C.4.

Note que para la relación de cierre de *Levermore-Pomraning* no es necesario hacer este análisis dado que en C.3 se obtuvo que $\sigma_{LP} = 0$.

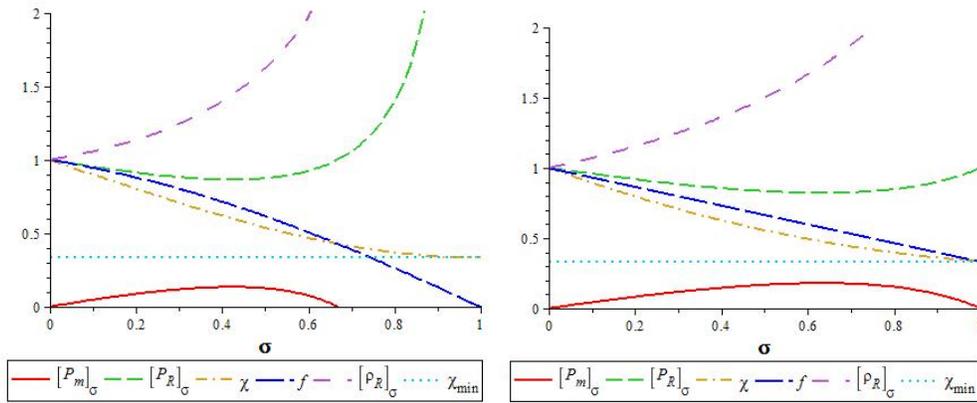
Relaciones de Cierre	Ajuste de Curva $\zeta(\sigma)$
<i>Janka (Monte Carlo)</i> (MC)	$0,7056 - \frac{0,2888}{\sigma - 0,9333} \leq \zeta$
<i>Minerbo</i> (Mi)	$0,5817 - \frac{0,4039}{\sigma - 0,9551} \leq \zeta$

Tabla C.4: Ajuste de la curva $\zeta = [\rho_m]_\Sigma / [P]_\Sigma$ vs $\sigma = [P_\perp]_\Sigma / [P]_\Sigma$ que separa la región que cumple con $0 \leq [\rho_R]_\sigma$, mostrado en la gráficas C.1.

Relaciones de Cierre	Condiciones en el contorno
<i>Lorentz-Eddington</i> (LE)	$\frac{1}{8} \frac{12(P_m + P_R)^2}{3P_R - \rho_R} + 3P_R - 2\rho_R \leq \rho_m$
<i>Bowers-Wilson</i> (BW)	$\frac{3(P_m + P_R)^2}{P_m - \rho_R + 4P_R} - \rho_R \leq \rho_m$
<i>Janka (Monte Carlo)</i> (MC)	$\frac{(1,209P_m - 1,764\rho_R + 6,501P_R)(P_m + P_R)}{(7,167P_R - 0,333P_m - 2,500\rho_R)} - \rho_R \leq \rho_m$
<i>Maximum Packing</i> (MP)	$\frac{4(P_m + P_R)^2}{2P_m - \rho_R + 5P_R} - \rho_R \leq \rho_m$
<i>Minerbo</i> (Mi)	$\frac{(3,778P_m - 2,909\rho_R + 12,504P_R)(P_m + P_R)}{14,551P_R - 0,449P_m - 5,000\rho_R} - \rho_R \leq \rho_m$
<i>Levermore-Pomraning</i> (LP)	$0 \leq \rho_m$

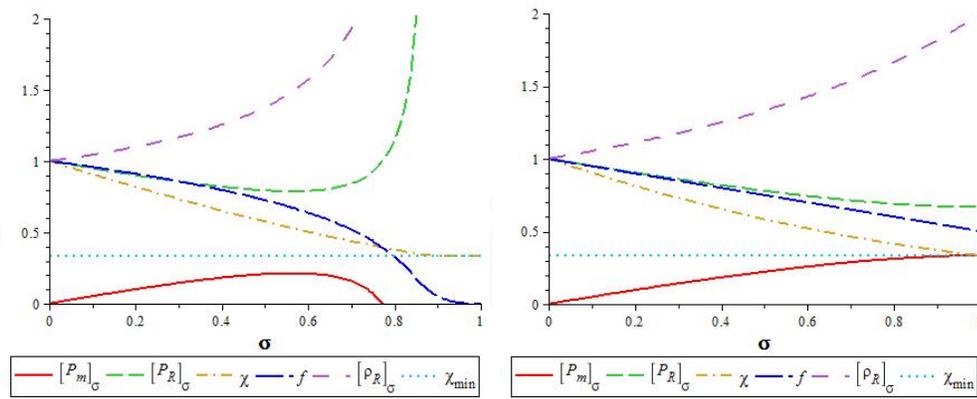
Tabla C.5: Condición de contorno en las variables de hidrodinámica y radiación para cada relación de cierre.

Se observa que estas restricciones son independientes de una configuración particular del sistema, se cumplen para cualquier escenario de hidrodinámica y radiación con simetría esférica. De hecho, la tabla C.2 también nos dice que, si de manera independiente se obtiene una de las variables de hidrodinámicas y radiación, se puede despejar a σ y obtener la distribución de todas las demás variables físicas del sistema en el contorno.



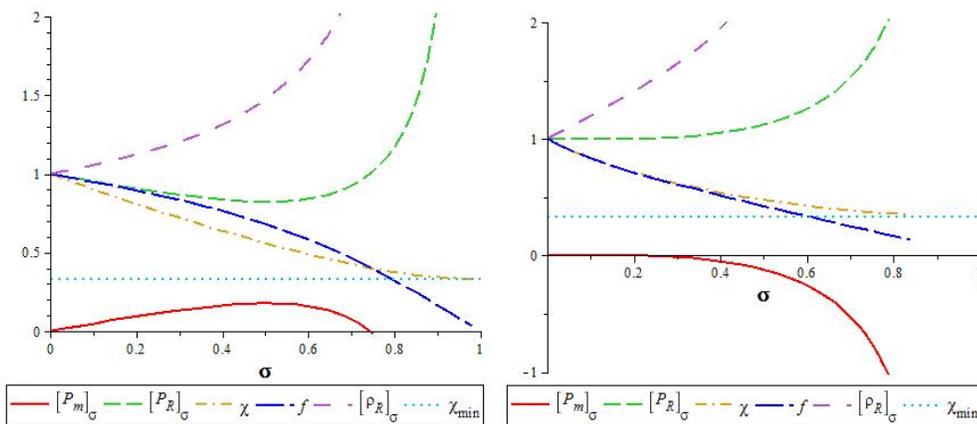
(a) Lorentz-Eddington

(b) Bowers-Wilson



(c) Monte Carlo

(d) Maximum Packing



(e) Minerbo

(f) Levermore-Pomraning

Figura C.2: Gráficas de las variables de hidrodinámica y radiación en el contorno para cada relación de cierre en función de $\sigma = [P_\perp]_\Sigma / [P]_\Sigma$, que cumplen con las condiciones de aceptabilidad física C.1. Donde las cantidades adimensionales vienen dadas por: $[P_m]_\sigma = [P_m]_\Sigma / [P]_\Sigma$, $[P_R]_\sigma = [P_R]_\Sigma / [P]_\Sigma$ y $[\rho_R]_\sigma = [\rho_R]_\Sigma / [P]_\Sigma$; y χ_{min} representa el valor mínimo mostrado en 3.15.

Apéndice D

Comportamiento del Flujo de Radiación en el Centro de la distribución

Es importante notar que, la condición inicial de la velocidad del fluido ω también implica una condición en la densidad del flujo de energía q . Despejando a ω de la expresión (1.53) y evaluando el límite en el centro de la distribución $r = 0$, se obtiene:

$$\omega = -\frac{\dot{m}e^{-\nu}\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{\frac{1}{2}} + 4\pi r^2 q}{4\pi r^2 (\rho + P)} \quad (\text{D.1})$$

$$\Rightarrow \lim_{r \rightarrow 0} \omega = \left(\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\dot{m}e^{-\nu}}{4\pi r^2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{\frac{1}{2}} + \lim_{r \rightarrow 0} q \right) \left(\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\rho + P} \right) \quad (\text{D.2})$$

Teniendo en cuenta que las funciones ρ y P tienen valores centrales definidos y siempre mayores que cero, para que cumpla con las condiciones de aceptabilidad física.

Entonces:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\rho + P} = \frac{1}{\rho_c(t) + P_c(t)} \quad (\text{D.3})$$

Por otro lado, como la función masa se anula en el centro para todo tiempo t , aplicando la regla de L'Hôpital tenemos:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{\dot{m}}{4\pi r^2} e^{-\nu} \right) \lim_{r \rightarrow 0} \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{\dot{m}''}{4\pi} \right) e^{-\nu} = 0 \quad y \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2m'}{1} = 0 \quad (\text{D.4})$$

Por lo tanto, la ecuación (D.2) implica:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \omega = \left(\frac{1}{\rho_c + P_c} \right) \lim_{r \rightarrow 0} q \quad (\text{D.5})$$

Donde, dada la condición inicial en ω (4.7) para todo t , se tiene que:

$$\lim_{r \rightarrow 0} q(0, t) = 0 \quad (\text{D.6})$$

El flujo de radiación q en el centro de la distribución tiende a cero debido a la simetría esférica del sistema.

www.bdigital.ula.ve