



UNIVERSIDAD
DE LOS ANDES
MERIDA VENEZUELA

Universidad de Los Andes
Facultad de Ciencias
Departamento de Física

Fluctuaciones en branas no abelianas

Br. Rossana Rojas Molina

Tutor: Dr. Nelson Pantoja

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de
Licenciada en Física

Mérida-Venezuela

2013

RESUMEN

Partiendo de la solución tipo pared de dominio autogravitante en una simetría $SU(5) \times Z_2$, se realizó un análisis perturbativo análogo al realizado en el caso de un campo escalar por Giovannini [19], encontrando que uno de los dos modos escalares, específicamente el que se relaciona con la fluctuación del campo ϕ_p , se encuentra localizado sobre la pared, indicando esto que la pared como mundo brana tiene una fenomenología interesante. La parte transversa y sin traza tiene asociado un modo de masa 0 localizado, y, por tanto, se recupera la gravedad 4-dimensional en la brana. Además, no es posible escribir el modo vectorial como una ecuación tipo onda, lo cual descarta su confinamiento.

www.bdigital.ula.ve

Índice

Índice	3
1 Introducción	5
2 Fluctuaciones en el sistema acoplado Einstein - campo escalar	9
2.1 Deducción de las ecuaciones para las perturbaciones	9
2.2 Parametrización de las fluctuaciones	12
2.3 Transformaciones de calibre	14
2.4 Desacoplamiento de los modos de las fluctuaciones	16
3 Branas con simetría no abeliana	19
3.1 Pared de dominio en $SU(N) \times Z_2$ para el caso gravitante . . .	19
3.2 Paredes de dominio en $SU(5) \times Z_2$	22
4 Fluctuaciones en branas gruesas con la simetría $SU(5) \times Z_2$	33
4.1 Ecuaciones de los distintos modos de las perturbaciones	33
4.2 Ecuaciones invariantes de calibre	38
4.3 Desacoplamiento de los modos de las fluctuaciones	41
4.4 Ecuaciones tipo onda de los modos	42
5 Localización de los modos de las fluctuaciones	47
5.1 Modo tensorial	48
5.2 Primer modo escalar	50
5.3 Segundo modo escalar	51
6 Conclusiones	55
Bibliografía	57

www.bdigital.ula.ve

Capítulo 1

Introducción

En los últimos tiempos han surgido diversas teorías físicas en las que se da cabida a la idea de las dimensiones adicionales, pese a que estas dimensiones no formen parte de nuestra percepción cotidiana. Desde comienzos del siglo XX, estas teorías que incorporan en sus modelos a más de las tres dimensiones espaciales que conocemos, han tratado también de explicar la razón por la cual no es posible percibir las. Esta imposibilidad puede ser explicada si se supone que la invariancia traslacional de nuestro universo está parcialmente rota. Una de las primeras explicaciones que se dan a esta suposición fue dada por Oscar Klein [1], cuando propone que la dimensión adicional está compactificada en un círculo muy pequeño (alrededor de $10^{-33}cm$), y a cada punto del espacio le correspondería uno de estos círculos, ubicados a lo largo de la dimensión adicional. Una dimensión tan pequeña es por supuesto imperceptible para nuestros sentidos.

Sin embargo, surgió posteriormente la idea de que la dimensión adicional no tenía que ser necesariamente tan pequeña. Es en 1983 donde Rubakov y Shaposhnikov [2] suponen que el universo es una pared de dominio generada por un campo escalar y donde la materia está confinada a bajas energías en el pozo de un potencial, bastante estrecho en las dimensiones adicionales. Sin embargo, con esta nueva suposición es válido pensar que puede haber partículas con suficiente energía como para escapar de dicho pozo, lo que ocasionaría que algunos fenómenos violen la ley de conservación de la energía. Por otro lado, este modelo no sugeriría cómo reproducir la gravitación 4-dimensional sobre la pared.

Los mundos brana tomaron importancia tiempo después, cuando en 1999 Ran-

dall y Sumdrum consideran a nuestro universo como una 3-brana inmersa en un espacio de mayor dimensionalidad y donde la gravedad se localiza utilizando la curvatura del espacio circundante. El modo 0 del gravitón se encuentra ubicado sobre la brana, y reproduce la gravitación newtoniana, mientras que los modos masivos son correcciones a la misma. Existen dos escenarios distintos: el RS1 donde la dimensión adicional está acotada [3], y el RS2 donde la dimensión adicional es infinita [4]. Podría pensarse que este modelo es poco realista ya que la pared es infinitamente delgada, es decir, es una singularidad, y en este sentido una brana gruesa podría ser un modelo más acorde para describir a nuestro universo. Estas branas gruesas son soluciones a sistemas acoplados Einstein - campo escalar, que interpolan entre dos mínimos de un potencial con rompimiento espontáneo de simetría. Algunas de estas paredes gruesas tienen un límite de pared delgada bien definido en [5][6][7]

Además de la gravitación, los campos del modelo estandar también deben poder ser localizados en estas branas. La localización de los fermiones y campos vectoriales se realiza por mecanismos no gravitacionales. Uno de estos mecanismos consiste en introducir un acoplamiento de Yukawa entre los fermiones y el campo escalar que genera la pared [2] y esto conduce a la localización de fermiones [8][9][10]. La localización de los campos de calibre se estudia en [11] en ausencia de gravedad y su análogo gravitacional se considera en [12].

Otro aspecto importante que se puede considerar a estudiar estas branas gruesas generadas por un campo escalar, es su estabilidad perturbativa. Para ello, la estrategia usual consiste en hacer pequeñas fluctuaciones a la métrica y al campo que genera la pared. En última instancia, sólo el sector transversal y sin traza (que representa al gravitón) debe estar localizado sobre la brana, mientras que los sectores escalares y vectoriales no deben estar confinados, para garantizar en parte su viabilidad como modelo del universo. En [13] se demuestra que para los dos casos particulares de paredes de dominio gruesas consideradas en [14] y [15], los sectores escalares y vectoriales no están localizados. Por otro lado, la parte trasversal y sin traza del sector tensorial se encuentra localizado sobre la pared, al igual que en el escenario RS2 singular.

Las branas gruesas generadas por un campo escalar no poseen una simetría de calibre interna. Generar una pared de dominio en una simetría no abeliana, como $SU(5) \times Z_2$ puede resultar interesante ya que la brana, al tener una simetría interna de forma natural, puede dar origen a un gran número de posibles interacciones con los otros campos de la teoría. Sin embargo, no se

ha hecho hasta ahora el análisis perturbativo de una pared de dominio en la simetría ya mencionada en presencia de gravedad. Este aspecto será el punto fundamental de este trabajo.

En el capítulo 2 se mostrará en detalle el proceso que se sigue para obtener las ecuaciones linealizadas de las fluctuaciones en un sistema acoplado Einstein - campo escalar, tomando como referencia lo expuesto en [16] y generalizado en [7]. En el capítulo 3 se hace una revisión bibliográfica breve del trabajo de Vachaspati [17], mostrando cómo se genera una pared de dominio en una simetría $SU(N) \times Z_2$ y luego se muestra parte del trabajo de Vázquez [18], donde se toma como inspiración el trabajo anterior para generar una pared de dominio autogravitante en $SU(5) \times Z_2$. En el capítulo 4 y como aporte del presente trabajo, se hace el análisis de fluctuaciones en la simetría no abeliana anteriormente mencionada, mostrando cómo obtener ecuaciones tipo onda para los modos de las fluctuaciones con el fin de hallar la forma de los potenciales asociados a cada modo, y finalmente, en el capítulo 5 se establece qué modos se localizan sobre la brana.

www.bdigital.ula.ve

www.bdigital.ula.ve

Capítulo 2

Fluctuaciones en el sistema acoplado Einstein - campo escalar

En lo sucesivo, se mostrará el método general que se sigue para obtener la ecuación linealizada de las perturbaciones hechas en torno a una solución exacta cualquiera del sistema acoplado Einstein - campo escalar. Luego de proponer una parametrización general de dichas fluctuaciones, establecer cómo transforman dichas fluctuaciones bajo difeomorfismos para luego proponer cambios de variable adecuados y hacer la transformación a coordenadas conformemente planas, se procederá a establecer la localización o no localización de los diferentes sectores de las fluctuaciones sobre la pared.

2.1 Deducción de las ecuaciones para las perturbaciones

La ecuación de las perturbaciones en el sistema acoplado Einstein - campo escalar se obtiene partiendo del procedimiento usado para encontrar dicha ecuación cuando la perturbación se hace sobre una solución exacta de las ecuaciones de Einstein en el vacío.

Sean g_{ab} y ϕ soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein:

$$R_{ab} = T_{ab} + \frac{1}{2}g_{ab}R \quad (2.1)$$

$$T_{ab} = \nabla_a\phi\nabla_b\phi - g_{ab}\left(\frac{1}{2}g^{cd}\nabla_c\phi\nabla_d\phi + V(\phi)\right) \quad (2.2)$$

$$g^{ab}\nabla_a\nabla_b\phi = \frac{dV(\phi)}{d\phi} \quad (2.3)$$

donde la métrica es covariantemente constante, es decir, $\nabla_c g_{ab} = 0$. Puede suponerse ahora que existe una familia de métricas y de campos escalares que dependen diferencialmente de un parámetro λ y que además son solución a las ecuaciones de Einstein mostradas anteriormente, de forma tal que:

$$\tilde{g}_{ab}|_{\lambda=0} = g_{ab}, \quad \tilde{\phi}(\lambda)|_{\lambda=0} = \phi$$

El parámetro λ se considera ahora infinitesimal, de forma que este produce pequeñas desviaciones en g_{ab} y en ϕ , siendo posible hacer la siguiente aproximación:

$$\tilde{g}_{ab}(\lambda) \approx g_{ab} + \lambda h_{ab} \quad \frac{d\tilde{g}_{ab}}{d\lambda}|_{\lambda=0} = h_{ab} \quad (2.4)$$

$$\tilde{\phi}(\lambda) \approx \phi + \lambda\psi \quad \frac{d\tilde{\phi}}{d\lambda}|_{\lambda=0} = \psi \quad (2.5)$$

donde h_{ab} y ψ representan las desviaciones de la métrica y del campo escalar, respectivamente. Al escribir las ecuaciones de Einstein en la forma de Ricci utilizando la métrica perturbada, se tiene

$$\tilde{R}_{ab} = \tilde{T}_{ab} - \frac{1}{3}\tilde{g}_{ab}\tilde{T} \quad (2.6)$$

donde $\tilde{T} = \tilde{g}^{ab}\tilde{T}_{ab}$

$$\tilde{T}_{ab} = \tilde{\nabla}_a\tilde{\phi} - \tilde{g}_{ab}\left(\frac{1}{2}\tilde{\nabla}^c\tilde{\phi}\tilde{\nabla}_c\tilde{\phi} + V(\tilde{\phi})\right) \quad (2.7)$$

$$\tilde{g}^{ab}\tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}_b\tilde{\phi} = \frac{d}{d\tilde{\phi}}V(\tilde{\phi}) \quad (2.8)$$

En general, las ecuaciones de Einstein pueden resultar difíciles de resolver. En principio, si la métrica \tilde{g}_{ab} y el campo $\tilde{\phi}$ son conocidos, se puede encontrar una solución exacta para la perturbación h_{ab} y ψ . Sin embargo, para simplificar los cálculos se hará uso de una estrategia que consiste en diferenciar las ecuaciones (2.6), (2.7) y (2.8) con respecto a λ y evaluarlas luego en $\lambda = 0$ (con esto se garantiza que las ecuaciones sean lineales en λ). Pero antes, hay que establecer cuál es la relación entre el tensor de Riemman de la métrica perturbada y el de la métrica sin perturbar. Se puede demostrar que dicha relación es la siguiente:

$$\tilde{R}_{abc}{}^d = R_{abc}{}^d - 2\nabla_{[a}C_{b]c}^d + 2C_{c[a}^e C_{b]e}^d \quad (2.9)$$

2.1. DEDUCCIÓN DE LAS ECUACIONES PARA LAS
PERTURBACIONES

11

donde el tensor C_{ab}^c se define como la diferencia entre los operadores $\tilde{\nabla}_a$ y ∇_a : $C_{ab}^c \omega_c = \tilde{\nabla}_a \omega_b - \nabla_a \omega_b$. Dicho tensor está dado por:

$$C_{ab}^c = \frac{1}{2} \tilde{g}^{cd} (\nabla_a \tilde{g}_{bd} + \nabla_b \tilde{g}_{ad} - \nabla_d \tilde{g}_{ab}) \quad (2.10)$$

Introduciendo la métrica perturbada (2.4) en la ecuación anterior y despreciando los término cuadráticos en λ , se obtiene

$$C_{ab}^c \approx \frac{1}{2} \lambda g^{cd} (\nabla_a h_{bd} + \nabla_b h_{ad} - \nabla_d h_{ab}) \quad (2.11)$$

De aquí se observa que $C_{ab}^c|_{\lambda=0} = 0$. Al contraer (2.9) se consigue el tensor de Ricci para la métrica perturbada, que resulta ser

$$\tilde{R}_{ac} = R_{ac} - 2\nabla_{[a} C_{b]c}^b + 2C_{c[a}^e \tilde{C}_{b]e}^b \quad (2.12)$$

Ahora, podemos obtener el miembro izquierdo de la ecuación (2.6) derivando (2.12) con respecto a λ y evaluando en $\lambda = 0$. Por lo cual

$$\frac{d\tilde{R}_{ab}}{d\lambda}|_{\lambda=0} = \frac{d}{d\lambda} \left(\nabla_c \tilde{C}_{ab}^c - \nabla_a \tilde{C}_{cb}^c \right) |_{\lambda=0} \quad (2.13)$$

Al sustituir la definición del tensor C_{ab}^c dada por (2.11) en la ecuación (2.13) se obtiene que:

$$\frac{d}{d\lambda} \tilde{R}_{ab}|_{\lambda=0} = \nabla^c \nabla_{(a} h_{b)c} - \frac{1}{2} \nabla^c \nabla_c h_{ab} - \frac{1}{2} \nabla_a \nabla_b (g^{cd} h_{cd}) \quad (2.14)$$

Es posible escribir el primer término del lado izquierdo de la ecuación anterior en función del tensor de Riemann, utilizando

$$\nabla^d \nabla_{(a} h_{b)d} = \nabla_{(a} \nabla^d h_{b)d} + R^d_{(ab)}{}^c h_{cd} + R_{(a}{}^d h_{b)d} \quad (2.15)$$

Así, la ecuación (2.14) se escribe como:

$$\frac{d}{d\lambda} \tilde{R}_{ab}|_{\lambda=0} = \nabla_{(a} \nabla^d h_{b)d} - \frac{1}{2} \nabla^d \nabla_d h_{ab} - \frac{1}{2} \nabla_a \nabla_b (g^{cd} h_{cd}) + R^d_{(ab)}{}^c h_{cd} + R^c_{(a} h_{b)c} \quad (2.16)$$

Ahora, debe verse cómo se escribe el lado derecho de la ecuación (2.6), haciendo uso de $\frac{d}{d\lambda} \tilde{g}^{cd} = -h^{cd}$ y las ecuaciones (2.4) y (2.5). Entonces, derivando con respecto a λ y evaluando en $\lambda = 0$ se obtiene que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \tilde{T}_{ab}|_{\lambda=0} &= 2\nabla_{(a} \varphi \nabla_{b)} \phi + \frac{1}{2} (g_{ab} h^{cd} - h_{ab} g^{cd}) \nabla_c \phi \nabla_d \phi \\ &\quad - g_{ab} g^{cd} \nabla_{(c} \varphi \nabla_{d)} \phi - h_{ab} V(\phi) - g_{ab} \frac{dV}{d\phi} \varphi \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$-\frac{1}{3} \frac{d}{d\lambda} \left(\tilde{g}_{ab} \tilde{g}^{cd} \tilde{T}_{cd} \right) |_{\lambda=0} = -\frac{1}{3} \left(h_{ab} g^{cd} - g_{ab} h^{cd} \right) T_{cd} - \frac{1}{3} g_{ab} g^{cd} \left(\frac{d}{d\lambda} \tilde{T}_{cd} \right) |_{\lambda=0} \quad (2.18)$$

Finalmente, al sumar (2.17) con (2.18) e igualando el resultado anterior con (2.16) se obtiene la ecuación linealizada de las fluctuaciones. Dicha ecuación es la siguiente:

$$\begin{aligned} \nabla_{(a} \nabla^d h_{b)d} - \frac{1}{2} \nabla^d \nabla_d h_{ab} - \frac{1}{2} \nabla_a \nabla_b \left(g^{cd} h_{cd} \right) + R^d{}_{(ab)}{}^c h_{cd} + R^c{}_{(a} h_{b)c} \\ = 2 \nabla_{(a} \varphi \nabla_{b)} \phi + \frac{2}{3} h_{ab} V(\phi) + \frac{2}{3} g_{ab} \frac{dV}{d\phi} \varphi \end{aligned} \quad (2.19)$$

En forma análoga, considerando esta vez la ecuación para el campo escalar (2.8), se encuentra que:

$$\begin{aligned} -h^{ab} \nabla_a \nabla_b \phi - \frac{1}{2} g^{ab} g^{cd} \left(\nabla_a h_{bd} + \nabla_b h_{ad} - \nabla_d h_{ab} \right) \nabla_c \phi \\ + g^{ab} \nabla_a \nabla_b \varphi - \frac{d^2 V}{d\phi^2} \varphi = 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

2.2 Parametrización de las fluctuaciones

Lo visto en la sección anterior es de completa generalidad, ya que no se ha considerado ningún tensor métrico en particular, ni tampoco una forma explícita del tensor de perturbación h_{ab} . Debido a que es de interés considerar soluciones que representen una pared de dominio, supondremos una métrica de la siguiente forma

$$ds^2 = e^{2A} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dr^2 \quad (2.21)$$

donde los índices espacio-temporales μ, ν toman los valores 0,1,2,3 y r denota la coordenada de la dimensión adicional.

Con dicha métrica, las ecuaciones de Einstein que se obtienen son:

$$V(\phi) = - \left(6A'^2 + \frac{3}{2} A'' \right) \quad (2.22)$$

$$\phi'^2 = -3A'' \quad (2.23)$$

Ahora bien, la fluctuación de la métrica, es decir, h_{ab} , contiene modos tensoriales, vectoriales y escalares. Estos modos pueden ser descompuestos, atendiendo a la invariancia de Poincaré en cuatro dimensiones [19], de la manera

siguiente:

$$h_{ab} = e^{2A} \begin{pmatrix} 2h_{\mu\nu}^{TT} + 2\partial_{(\mu}f_{\nu)} + 2\eta_{\mu\nu}\psi + 2\partial_{\mu}\partial_{\nu}E & e^{-A}(D_{\mu} + \partial_{\mu}C) \\ e^{-A}(D_{\mu} + \partial_{\mu}C) & e^{-2A}2\omega \end{pmatrix}$$

En esta parametrización tenemos un sector transverso y sin traza, $h_{\mu\nu}^{TT}$, esto es

$$h_{\mu}^{TT\mu} = 0 \quad \partial^{\mu}h_{\mu\nu}^{TT} = 0 \quad (2.24)$$

y los vectores f_{μ} y D_{μ} con divergencia 0,

$$\partial^{\mu}f_{\mu} = 0 \quad \partial^{\mu}D_{\mu} = 0 \quad (2.25)$$

Al sustituir la métrica (2.21) y la parametrización del tensor h_{ab} propuesta en (2.2) en la ecuación (2.19), se consiguen las tres ecuaciones siguientes, que representan el sector tensorial, vectorial y escalar de las fluctuaciones, respectivamente:

$$\begin{aligned} & (-e^{2A}\partial^{\beta}\partial_{\beta} - \partial_r^2 - 4A'\partial_r) h_{\mu\nu}^{TT} \\ & + \partial_{(\mu} [3e^{-A}D_{\nu)} - f_{\nu)}'' - 4A'f_{\nu)}' + e^{-A}D_{\nu)}'] \\ & + \eta_{\mu\nu} [-e^{-2A}\partial^{\beta}\partial_{\beta} (\psi + e^{2A}A'E' - e^AA'C) - \psi'' - 8A'\psi'] \\ & + \eta_{\mu\nu} [8A'^2\omega + A'\omega' + 2A''\omega] \\ & + \partial_{\mu}\partial_{\nu} [-e^{-2A}(\omega + 2\psi) - E'' - 4A'E' + e^{-A}C' + 3A'e^{-A}C] \\ & = \frac{2}{3} \frac{dV}{d\phi} \varphi \eta_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$-\frac{1}{2}e^{-A}\partial^{\beta}\partial_{\beta} (D_{\mu} - e^Af_{\mu}') + \partial_{\mu}(3A'\omega - 3\psi' - \phi'\varphi) = 0 \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} & -e^{-2A}\partial^{\beta}\partial_{\beta} (\omega + E'' + 2e^{2A}A'E' - e^AA'C - e^AC') - 4\psi'' - 8A'\psi' \\ & + 4A'\omega' + 2A''\omega + 8A'^2\omega - 2\phi'\varphi' - \frac{2}{3} \frac{dV}{d\phi} \varphi = 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

Por último, de (2.20) se obtiene la ecuación para el campo escalar y su respectiva fluctuación:

$$\begin{aligned} & e^{-2A}\partial^{\beta}\partial_{\beta} (\varphi - e^A\phi'C + e^{2A}E'\phi') - 2(\phi'' + 4A'\phi')\omega - \phi'\omega' \\ & + 4\phi'\psi' + \varphi'' + 4A'\varphi' - \frac{d^2V}{d\phi^2}\varphi = 0 \end{aligned} \quad (2.29)$$

2.3 Transformaciones de calibre

Como se ve claramente en las ecuaciones (2.26), (2.27), (2.28) y (2.29) existe un acoplamiento entre las fluctuaciones de la métrica y las fluctuación asociada al campo que genera la pared. Con miras a establecer la localización o no localización de los distintos modos sobre la brana, se debe definir, como primer paso, una serie de variables que sean invariantes bajo transformaciones infinitesimales de coordenadas, para luego escribir las ecuaciones de las fluctuaciones de la métrica en función de dichas variables.

Ley de transformación de las fluctuaciones

En relatividad general existe una libertad de calibre asociada al grupo de difeomorfismos. Esto implica que dos perturbaciones, h_{ab} y \bar{h}_{ab} representan la misma perturbación física si y sólo si difieren un "difeomorfismo infinitesimal" de la métrica, que es generado por un campo vectorial ϵ^a [16], cumpliéndose para la transformación de cordenadas que

$$\bar{x}^a = x^a + \epsilon^a \quad (2.30)$$

Por otro lado, el cambio en un campo tensorial, originado por el difeomorfismo infinitesimal, define a la derivada de Lie, y por tanto la perturbación de la métrica tiene la siguiente libertad de calibre:

$$\bar{h}_{ab} = h_{ab} - 2\nabla_{(a}\epsilon_{b)} \quad (2.31)$$

El campo vectorial ϵ_a puede ser expresado explícitamente si se considera la métrica dada en este caso por la ecuación (2.21):

$$\epsilon_a = (e^{2A}\epsilon_\mu, \epsilon_r) \quad (2.32)$$

El vector ϵ_μ puede ser expresado en función de la derivada de un escalar y de un vector transverso, como sigue

$$\epsilon_\mu = \partial_\mu \epsilon + \zeta_\mu, \quad \partial^\mu \zeta_\mu = 0 \quad (2.33)$$

Ahora, al estudiar detalladamente cómo transforma el tensor h_{ab} de acuerdo a (2.31), se podrá obtener las transformaciones de todos los campos involucrados en dicho tensor.

En primer lugar, se considera la parte cuadridimensional de \bar{h}_{ab} , y para conseguir las transformaciones de los escalares E y ψ se calcula $g^{\mu\nu}\bar{h}_{\mu\nu}$, obteniéndose que

$$\bar{\psi} = \psi - A'\epsilon_r \quad (2.34)$$

$$\bar{E} = E - \epsilon \quad (2.35)$$

Para encontrar la transformación del campo vectorial f_μ se calcula $\partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu}$:

$$\bar{f}_\mu = f_\mu - \zeta_\mu \quad (2.36)$$

En segundo lugar, se consideran las componentes a lo largo de la coordenada adicional. Para encontrar la transformación de los campos C y D_μ se calcula la divergencia de la parte vectorial de \bar{h}_{ab} , esto es, $\partial^\mu \bar{h}_{\mu r}$. De forma que:

$$\bar{C} = C - e^A \epsilon' - e^{-A} \epsilon_r \quad (2.37)$$

$$\bar{D}_\mu = D_\mu - e^A \zeta'_\mu \quad (2.38)$$

Ahora, la transformación del campo escalar ω se encuentra calculando $\partial^\mu \bar{h}_{rr}$. Así,

$$\bar{\omega} = \omega - \epsilon'_r \quad (2.39)$$

Por último, la transformación de la perturbación del campo que genera la pared, φ , es:

$$\bar{\varphi} = \varphi - \phi' \epsilon_r \quad (2.40)$$

VARIABLES INVARIANTES DE CALIBRE

En lo que sigue, se definirán unas variables invariantes de calibre partiendo de las transformaciones hechas a los campos escalares y vectoriales involucrados en la presente teoría y mostrados en las ecuaciones (2.34)-(2.40).

Los grados de libertad de la transformación de coordenadas determinan el número de variables a definir [19]. De acuerdo con esto, la función de calibre ζ_μ permite definir la variable vectorial \bar{V}_μ , dada por:

$$\bar{V}_\mu = \bar{D}_\mu - e^A \bar{f}'_\mu \quad (2.41)$$

Ahora, las transformaciones para las funciones escalares involucran a ϵ y ϵ_r , por lo que se definen las dos variables siguientes:

$$\bar{\Gamma} = \bar{\psi} + A' (e^{2A} \bar{E}' - e^A \bar{C}) \quad (2.42)$$

$$\bar{\Theta} = \bar{\omega} - e^A \bar{C}' + e^{2A} \bar{E}'' - A' e^A \bar{C} + 2A' e^{2A} \bar{E}' \quad (2.43)$$

También se define una variable invariante de calibre asociada a las fluctuaciones del campo que genera la pared, es decir, φ . Entonces:

$$\bar{\chi} = \bar{\varphi} + e^{2A} \phi' \bar{E}' - e^A \phi' \bar{C} \quad (2.44)$$

Es posible escribir las ecuaciones (2.42), (2.43) y (2.44) de una manera más simple, si se establece que

$$\bar{\Omega} \equiv e^{2A}\bar{E}' - e^A\bar{C} \quad (2.45)$$

Por lo tanto, se tiene que:

$$\bar{\Gamma} = \bar{\psi} + A'\bar{\Omega} \quad (2.46)$$

$$\bar{\Theta} = \bar{\omega} + \bar{\Omega}' \quad (2.47)$$

$$\bar{\chi} = \bar{\varphi} + \phi'\bar{\Omega} \quad (2.48)$$

2.4 Desacoplamiento de los modos de las fluctuaciones

Usando el hecho de que las nuevas variables son invariantes de calibre, es decir, $\bar{\Gamma} = \Gamma$, $\bar{\Theta} = \Theta$ y $\bar{V}_\mu = V_\mu$, se escriben las ecuaciones correspondientes a los distintos modos de las fluctuaciones, (2.26)-(2.29), en función de dichas variables como sigue:

$$\begin{aligned} & (-e^{-2A}\partial^\beta\partial_\beta - \partial_r^2 - 4A'\partial_r)h_{\mu\nu}^{TT} + e^{-A}\partial_{(\mu}(\partial_r + 3A')V_{\nu)} \\ & + \partial_\mu\partial_\nu[-e^{-2A}(\Theta + 2\Gamma - 2A'\Omega - \Omega') - 4A'E - E'' + e^{-A}(3A'C + C')] \\ & + \eta_{\mu\nu}[-e^{-2A}\partial^\beta\partial_\beta\bar{\Gamma} - (\bar{\Gamma}'' - (A'\bar{\Omega})'') - 8A'(\bar{\Gamma}' - (A'\bar{\Omega})')] \\ & + \eta_{\mu\nu}[(8A'^2 + 2A'')(\bar{\Theta} - \bar{\Omega}') + A'(\bar{\Theta}' - \bar{\Omega}'')] = \frac{2}{3}\eta_{\mu\nu}(\bar{\chi} - \phi'\bar{\Omega})\frac{dV}{d\phi} \end{aligned} \quad (2.49)$$

Para el modo vectorial:

$$-\frac{1}{2}e^A\partial^\beta\partial_\beta\bar{V}_\mu + \partial_\mu[3A'(\bar{\Theta} - \bar{\Omega}') - 3(\bar{\Gamma}' - (A'\bar{\Omega})') - \phi'(\bar{\chi} - \phi'\bar{\Omega})] = 0 \quad (2.50)$$

El modo escalar se escribe como:

$$\begin{aligned} & -e^{-2A}\partial^\beta\partial_\beta\bar{\Theta} + 4A'(\bar{\Theta} - \bar{\Omega}'') - 8A'(\bar{\Gamma}' - (A'\bar{\Omega})') - 4(\bar{\Gamma}'' - (A'\bar{\Omega})'') \\ & - 2\phi'(\bar{\chi} - (\phi'\bar{\Omega})') + (8A'^2 + 2A'')(\bar{\Theta} - \bar{\Omega}') = \frac{2}{3}(\bar{\chi} - \phi'\bar{\Omega})\frac{dV}{d\phi} \end{aligned} \quad (2.51)$$

Por último, la ecuación para el campo escalar y su fluctuación en función de las variables invariantes de calibre es:

$$\begin{aligned} & \partial^\beta\partial_\beta\bar{\chi} - 2(\phi'' + 4A'\phi')(\bar{\Theta} - \bar{\Omega}') - \phi'(\bar{\Theta}' - \bar{\Omega}'') + 4\phi'(\bar{\Gamma}' - (A'\bar{\Omega})') \\ & + 4A'(\bar{\chi}' - (\phi'\bar{\Omega})') + \chi'' - (\phi'\bar{\Omega})'' = (\bar{\chi} + \phi'\bar{\Omega})\frac{d^2V}{d\phi^2} \end{aligned} \quad (2.52)$$

La forma final de las ecuaciones para los distintos modos de las fluctuaciones dependerá de la fijación de calibre que se haga. Existe una escogencia de calibre en particular con la que se logra eliminar los grados de libertad no físicos (aquellos que no pueden ser escritos en función de las variables definidas anteriormente) y en última instancia permite el estudio de la localización de los distintos modos sobre la pared. Esta escogencia de calibre es una generalización del calibre longitudinal, donde todas las componentes escalares fuera de la diagonal de la métrica perturbada son nulas [20]. De forma que:

$$\bar{E} = 0, \quad \bar{C} = 0, \quad \bar{f}_\mu = 0 \quad (2.53)$$

De esta forma, los parámetros de la transformación de calibre pueden ser fijados por completo:

$$\epsilon = E, \quad \epsilon_r = (E' - C), \quad \zeta_\mu = f_\mu \quad (2.54)$$

Con lo impuesto en (2.53) es inmediato ver que la función $\bar{\Omega}$ definida en (2.45) es igual a 0, así como todas sus derivadas. Por lo tanto, los términos dependientes de $\bar{\Omega}$ que aparecen en las ecuaciones de los distintos modos se anulan. Eliminando entonces la tilde de las variables en las ecuaciones para los distintos modos de las fluctuaciones, se tiene que:

$$\begin{aligned} & (-e^{-2A}\partial^\beta\partial_\beta - \partial_r^2 - 4A'\partial_r)h_{\mu\nu}^{TT} + e^{-A}\partial_{(\mu}(\partial_r + 3A')V_{\nu)} \\ & + \eta_{\mu\nu}[-e^{-2A}\partial^\beta\partial_\beta\Gamma - \Gamma'' - 8A'\Gamma' + (8A'^2 + 2A'')\Theta + A'\Theta'] \\ & + \partial_\mu\partial_\nu[-e^{-2A}(\Theta + 2\Gamma)] = \frac{2}{3}\eta_{\mu\nu}\chi\frac{dV}{d\phi} \end{aligned} \quad (2.55)$$

$$-\frac{1}{2}e^{-A}\partial^\beta\partial_\beta V_\mu + \partial_\mu[3A'\Theta - 3\Gamma' - \phi'\chi] = 0 \quad (2.56)$$

$$\begin{aligned} & -e^{-2A}\partial^\beta\partial_\beta\Theta + 4A'\Theta' - 8A'\Gamma' - 4\Gamma'' - 2\phi'\chi' \\ & + (8A'^2 + 2A'')\Theta = \frac{2}{3}\chi\frac{dV}{d\phi} \end{aligned} \quad (2.57)$$

$$e^{-2A}\partial^\beta\partial_\beta\chi - 2(\phi'' + 4A'\phi')\Theta - \phi'\Theta' + 4\phi'\Gamma' + 4A'\chi' + \chi'' = \chi\frac{d^2V}{d\phi^2} \quad (2.58)$$

Es conveniente ahora reescribir las ecuaciones (2.55)-(2.58) en un sistema de coordenadas conformemente planas, definidas por:

$$\eta = \int e^{-A(r)} dr \quad (2.59)$$

Con este cambio de coordenadas la métrica (2.21) se escribe como:

$$ds^2 = e^{2A}(\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + d\eta^2) \quad (2.60)$$

La relación entre la coordenda r y η es:

$$dr = e^{-A}d\eta \quad (2.61)$$

Entonces, las ecuaciones de los modos de las fluctuaciones haciendo trasformaciones a coordenadas conformes son:

$$\begin{aligned} &(-\partial^\beta\partial_\beta - 3A'\partial_\eta - \partial_\eta^2)h_{\mu\nu}^{TT} + \partial_{(\mu}(\partial_\eta + 3A')V_{\nu)} - \partial_\mu\partial_\nu(2\Gamma + \Theta) \\ &+ \eta_{\mu\nu}[-\partial^\beta\partial_\beta\Gamma - 7A'\Gamma' + (6A'^2 + 2A'')\Theta + A'\Theta' - \Gamma''] \\ &= \frac{2}{3}e^{2A}\chi\eta_{\mu\nu}\frac{dV}{d\phi} \end{aligned} \quad (2.62)$$

$$-\frac{1}{2}\partial^\beta\partial_\beta V_\mu + \partial_\mu[3A'\Theta - 3\Gamma' - \phi'\chi] = 0 \quad (2.63)$$

$$\begin{aligned} &-\partial^\beta\partial_\beta\Theta + 4A'\Theta' - 4A'\Gamma' - 4\Gamma'' - 2\phi'\chi' \\ &+ (6A'^2 + 2A'')\Theta = \frac{2}{3}e^{2A}\chi\frac{dV}{d\phi} \end{aligned} \quad (2.64)$$

$$\partial^\beta\partial_\beta\chi - 2(\phi'' + 3A'\phi')\Theta - \phi'\Theta' + 4\phi'\Gamma' + 3A'\chi' + \chi'' = \chi e^{2A}\frac{d^2V}{d\phi^2} \quad (2.65)$$

Capítulo 3

Branas con simetría no abeliana

En este capítulo revisaremos un par de trabajos donde se consiguen de manera explícita soluciones tipo pared de dominio en simetrías no abelianas. El primero de estos trabajos es el de Vachaspati [17], para una simetría $SU(N) \times Z_2$ y el segundo, realizado por Vázquez [18], donde se trabaja con la simetría de calibre $SU(5) \times Z_2$.

3.1 Pared de dominio en $SU(N) \times Z_2$ para el caso gravitante

En primer lugar consideremos una teoría 1 + 1 dimensional sin gravitación

$$L = \text{Tr}[(\partial_\mu \Phi)^2] - V(\Phi) \quad (3.1)$$

$$V(\Phi) = -m^2 \text{Tr}[\Phi^2] + h(\text{Tr}[\Phi^2])^2 + \lambda \text{Tr}[\Phi^4] + V_0 \quad (3.2)$$

donde el campo Φ puede ser representado como una matriz hermítica $N \times N$. Entonces Φ , queda escrita en términos de sus componentes de la siguiente manera

$$\Phi = \sum_{a=1}^{N^2-1} \Phi^a T_a \quad (3.3)$$

Los T_a son los generadores de $SU(N)$ y cumplen con la normalización dada por

$$\text{Tr}[T_a T_b] = \frac{1}{2} \delta_{ab} \quad (3.4)$$

Es de interés considerar valores impares de N , ya que es en este caso cuando el presente modelo admite soluciones tipo pared de dominio. Para N impar, el modelo contiene la ruptura de una simetría Z_2 y, por tanto, los valores asintóticos de Φ son los mínimos del potencial conectados por dicha simetría. Si Φ_k denota la solución pared de dominio, debe satisfacer

$$\Phi_k(x = -\infty) = -U\Phi_k(+\infty)U^{-1} \quad (3.5)$$

con $U \in SU(N)$.

Luego, se propone que Φ_k tenga la forma

$$\Phi_k = f(x)M + g(x)P \quad (3.6)$$

donde $f(x)$ y $g(x)$ son funciones y M y P son generadores de $SU(N)$ que satisfacen la condición de normalización mostrada en (3.4), es decir:

$$\text{Tr}(M^2) = \frac{1}{2} = \text{Tr}(P^2) \quad (3.7)$$

$$\text{Tr}(MP) = 0 \quad (3.8)$$

Además, se impone que

$$\text{Tr}(M^3P) = \text{Tr}(MP^3) = 0 \quad (3.9)$$

Al introducir Φ_k en el potencial, se obtiene que:

$$V(\Phi_k) = -\frac{m^2}{2}(f^2 + g^2) + \frac{h}{4}(f^4 + g^4) + \lambda[f^4\text{Tr}(M^4) + g^4\text{Tr}(P^4)] \\ + \left[\frac{h}{2} + 6\lambda\text{Tr}(M^2P^2) \right] f^2g^2 - V_0 \quad (3.10)$$

Por simplicidad, se impone que $\frac{h}{2} + 6\lambda\text{Tr}(M^2P^2) = 0$ y así, el campo $f(x)$ se desacopla del campo $g(x)$ y por tanto la energía se puede expresar en términos de dos campos independientes. Ahora, se debe determinar qué forma tienen las funciones f y g y cuales son los generadores M y P . Dichas funciones cumplen con las siguientes condiciones:

$$f(x = \infty) = -f(-\infty), \quad g(x = \infty) = g(-\infty) \quad (3.11)$$

De las ecuaciones de Euler-Lagrange se encuentra que f y g deben satisfacer

$$f'' + m^2f + 4\lambda[3\text{Tr}(M^2P^2) - \text{Tr}(M^4)]f^3 = 0 \quad (3.12)$$

$$g'' + m^2g + 4\lambda[3\text{Tr}(M^2P^2) - \text{Tr}(P^4)]g^3 = 0 \quad (3.13)$$

Con estas ecuaciones unidas a las condiciones de contorno mostradas en (3.11), se obtiene que g puede ser escogido igual a una constante, tal que

$$g^2 = -\frac{m^2}{4\lambda} \frac{1}{3\text{Tr}(\mathbf{M}^2\mathbf{P}^2) - \text{Tr}(\mathbf{P}^4)} \quad (3.14)$$

y que f viene dado por

$$f(x) = f_0 \tanh\left(\frac{m}{\sqrt{2}}x\right) \quad (3.15)$$

con f_0 dado por

$$f_0^2 = -\frac{m^2}{4\lambda} \frac{1}{3\text{Tr}(\mathbf{M}^2\mathbf{P}^2) - \text{Tr}(\mathbf{M}^4)} \quad (3.16)$$

Puede verse de las ecuaciones anteriores que para que la función f sea válida, debe cumplirse que

$$\text{Tr}(\mathbf{M}^4) > 3\text{Tr}(\mathbf{M}^2\mathbf{P}^2) \quad (3.17)$$

y la solución para g será válida siempre que

$$\text{Tr}(\mathbf{P}^4) > 3\text{Tr}(\mathbf{M}^2\mathbf{P}^2) \quad (3.18)$$

Ahora bien, las matrices \mathbf{M} y \mathbf{P} se escogen de manera que los valores asintóticos de Φ_k tengan la simetría dada por

$$SU(N) \times Z_2 \longrightarrow \frac{SU(n+1) \times SU(n) \times U(1)}{Z_{n+1} \times Z_n} \quad (3.19)$$

y además que el valor de expectación en el vacío de Φ_k sea de la forma

$$\Phi_0 = R \text{diag}(p_1, p_2, \dots, p_N) \quad (3.20)$$

donde R es un factor de normalización y los p_i satisfacen

$$\sum_{i=1}^N p_i^2 = \frac{1}{2} \quad (3.21)$$

Esto, unido con las condiciones impuestas en (3.7), (3.9), (3.17) y (3.18), permite determinar que la forma de los generadores \mathbf{M} y \mathbf{P} es

$$\mathbf{M} = \beta \begin{pmatrix} 1_{N-1} & 0 \\ 0 & -(N-1) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \sqrt{N}\beta \begin{pmatrix} \mathbf{1}_n & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

con $\beta = \frac{1}{\sqrt{2N(N-1)}}$

Finalmente, la solución Φ_k tiene la forma

$$\Phi_k(x) = \frac{m}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{\frac{N-1}{N-3}} \left[\tanh\left(\frac{m}{\sqrt{2}}x\right) \mathbf{M} + \sqrt{N}\mathbf{P} \right] \quad (3.22)$$

Por completitud, debe demostrarse que la solución mostrada en (3.22) es una solución completa de la teoría, es decir, que es la solución con menor energía a lo largo de los generadores \mathbf{M} y \mathbf{P} . En el trabajo de Vachaspati, esto logra ser demostrado vía un análisis perturbativo. Sin embargo, puesto que los detalles de dicha demostración no son de interés para este trabajo, no serán revisados aquí.

3.2 Paredes de dominio en $SU(5) \times Z_2$

Ahora, se mostrará brevemente el proceso para conseguir una solución tipo pared de dominio en un sistema acoplado Einstein - campo de $SU(5)$, solución que será de principal interés en este trabajo. Cabe destacar que, a diferencia que en el caso de Vachaspati, la pared de dominio que se tratará a continuación será considerada como una 3-variedad inmersa en un espacio tiempo 5-dimensional.

El modelo de esta teoría 4+1 dimensional está descrito por la siguiente acción

$$S = \int d^4x dr \sqrt{-|\mathbf{g}|} \left[\frac{R}{2} - \text{Tr}(\partial_a \Phi \partial^a \Phi) - V(\Phi) \right] \quad (3.23)$$

El campo Φ puede ser representado como una matriz hermítica 5×5 y ser escrita en término de los 24 generadores de $SU(5)$ como

$$\Phi = \sum_{a=1}^{24} \phi^a T_a \quad (3.24)$$

Los generadores T^a serán tomados con la normalización

$$\text{Tr}(T_a T_b) = \frac{1}{2} \delta_{ab} \quad (3.25)$$

Tomando como inspiración el potencial V de sexto orden derivado del superpotencial W propuesto en [15], se propone que el potencial $V(\Phi)$ sea un

polinomio de sexto orden. Tomando en cuenta la simetría de calibre considerada, el potencial más general es

$$V(\Phi) = -m^2 \text{Tr}[\Phi^2] + h(\text{Tr}[\Phi^2])^2 + k \text{Tr}[\Phi^4] + \alpha(\text{Tr}[\Phi^2])^3 + \beta(\text{Tr}[\Phi^3])^2 + \gamma(\text{Tr}[\Phi^4])(\text{Tr}[\Phi^2]) + V_0 \quad (3.26)$$

La constante V_0 será fijada de manera que las ecuaciones de Einstein puedan resolverse de manera analítica.

Solución pared de dominio

En este punto es bueno mencionar que en la simetría $SU(5) \times Z_2$ existen dos rompimientos que originan soluciones tipo pared de dominio estables en ausencia de gravitación [21]. Es conveniente entonces considerar estos dos rompimientos en el caso gravitacional, aunque los resultados obtenidos para cada caso serán muy similares, como veremos más adelante.

1. Rompimiento $SU(5) \times Z_2 \rightarrow SU(3) \times SU(2) \times U(1)/(Z_3 \times Z_2)$

Se propone que la solución pared de dominio Φ_k dependa sólo de la coordenada adicional r . Así:

$$\Phi_k = \phi_m(r)M_A + \phi_p(r)P_A \quad (3.27)$$

donde M_A y P_A son dos generadores diagonales de $SU(5)$. Para este primer caso, dichos generadores son:

$$M_A = \frac{1}{\sqrt{40}} \begin{pmatrix} 1_{4 \times 4} & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$P_A = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1_{2 \times 2} & 0 & 0 \\ 0 & -1_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tomando como referencia el sistema acoplado Einstein - campo escalar, la solución tipo pared de dominio satisface la condición de contorno

$$\Phi_k(x = -\infty) = -U\Phi_k(+\infty)U^{-1} \quad (3.28)$$

con $U \in SU(5)$. La solución Φ_k debe interpolar entre dos mínimos de un potencial que esta vez no es de cuarto orden sino de sexto orden, tal como se muestra en (3.65).

Al sustituir la forma explícita de Φ_k dada por (3.27) en el potencial, se obtiene que

$$\begin{aligned}
V(\Phi_k) = & -\frac{1}{2}m^2\phi_m^2 + \left(\frac{h}{4} + \frac{13}{80}k\right)\phi_m^4 + \left(\frac{\alpha}{8} + \frac{9}{160}\beta + \frac{13}{160}\gamma\right)\phi_m^6 \\
& -\frac{1}{2}m^2\phi_p^2 + \left(\frac{h}{4} + \frac{k}{16}\right)\phi_p^4 + \left(\frac{\alpha}{8} + \frac{\gamma}{32}\right)\phi_p^6 \\
& \left(\frac{3}{8}\alpha + \frac{9}{160}\beta + \frac{11}{160}\gamma\right)\phi_m^2\phi_p^4 + \left(\frac{3}{8}\alpha - \frac{9}{80}\beta + \frac{19}{160}\gamma\right)\phi_m^4\phi_p^2 \\
& \left(\frac{h}{2} + \frac{3}{40}k\right)\phi_m^2\phi_p^2 + V_0(3.29)
\end{aligned}$$

Para encontrar una solución analítica, es necesario que el campo ϕ_m se desacople de ϕ_p , y esto se logra si los parámetros satisfacen las siguientes relaciones [22]:

$$\begin{aligned}
h &= -12\text{Tr}(\mathbf{P}^2\mathbf{M}^2)k \\
\alpha &= \frac{4}{3} \left[\frac{2\text{Tr}(\mathbf{M}^3)\text{Tr}(\mathbf{P}^4) - 3\text{Tr}(\mathbf{P}^2\mathbf{M})\text{Tr}(\mathbf{M}^4)}{3\text{Tr}(\mathbf{P}^2\mathbf{M}) - 2\text{Tr}(\mathbf{M}^3)} - 6\text{Tr}(\mathbf{P}^2\mathbf{M}^2) \right] \gamma \\
\beta &= \frac{1}{6} \left[\frac{\text{Tr}(\mathbf{M}^4) - \text{Tr}(\mathbf{P}^4)}{\text{Tr}(\mathbf{P}^2\mathbf{M})[3\text{Tr}(\mathbf{P}^2\mathbf{M}) - 2\text{Tr}(\mathbf{M}^3)]} \right] \gamma \quad (3.30)
\end{aligned}$$

En este primer caso, sustituyendo \mathbf{M} por \mathbf{M}_A y \mathbf{P} por \mathbf{P}_A en (3.30), se encuentra que:

$$\begin{aligned}
h &= -\frac{3}{20}k \\
\alpha &= -\frac{41}{180}\gamma \\
\beta &= \frac{8}{27}\gamma \quad (3.31)
\end{aligned}$$

Al sustituir los valores de h , α y β mostrados en (3.31) en el potencial $V(\Phi_k)$, este queda ahora en término de los parámetros m^2 , k y γ y de dos potenciales independientes, V_{ϕ_M} y V_{ϕ_P} como:

$$V(\Phi_k) = V_{\phi_m} + V_{\phi_p} + V_0 \quad (3.32)$$

con

$$\begin{aligned}
V_{\phi_m} &= -\frac{1}{2}m^2\phi_m^2 + \frac{k}{8}\phi_m^4 + \frac{5}{72}\gamma\phi_m^6 \\
V_{\phi_p} &= -\frac{1}{2}m^2\phi_p^2 + \frac{k}{40}\phi_p^4 + \frac{\gamma}{360}\phi_p^6 \quad (3.33)
\end{aligned}$$

De esta forma, se han encontrado las relaciones que deben tener entre sí los parámetros del potencial para que la solución pared de dominio propuesta en (3.27) haga posible que $V(\Phi_k)$ se desacople y quede escrito en función de dos potenciales independientes.

El sistema acoplado Einstein - campo de $SU(5)$ queda descrito como

$$S = \int d^4x dy \sqrt{g} \left[\frac{R}{2} - \text{Tr}(\partial_a \Phi \partial^a \Phi) - V(\Phi) \right] \quad (3.34)$$

$$\Phi = \sum_{a=1}^{24} \phi^a T_a \quad (3.35)$$

$$V(\Phi) = -m^2 \text{Tr}[\Phi^2] - \frac{3}{20} k (\text{Tr}[\Phi^2])^2 + k \text{Tr}[\Phi^4] - \frac{41}{180} \gamma (\text{Tr}[\Phi^2])^3 \\ + \frac{8}{27} \gamma (\text{Tr}[\Phi^3])^2 + \gamma (\text{Tr}[\Phi^4]) (\text{Tr}[\Phi^2]) + V_0 \quad (3.36)$$

$$g_{ab} = e^{2A(y)} (-dt_a dt_b + dx_a^i dx_b^i) + dy_a dy_b \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.37)$$

Usando la forma explícita del campo Φ_k y la métrica g_{ab} , se obtienen las ecuaciones de Einstein para este sistema:

$$3A'' = -(\phi_m'^2 + \phi_p'^2) \quad (3.38)$$

$$\frac{3}{2} A'' + 6A'^2 = -V(\Phi_k) \quad (3.39)$$

$$\phi_m'' + 4A' \phi_m' = -m^2 \phi_m + \frac{1}{2} k \phi_m^3 + \frac{5}{12} \gamma \phi_m^5 \quad (3.40)$$

$$\phi_p'' + 4A' \phi_p' = -m^2 \phi_p + \frac{1}{10} k \phi_p^3 + \frac{1}{60} \gamma \phi_p^5 \quad (3.41)$$

Al imponer las condiciones de contorno

$$\phi_m(+\infty) = -\phi_m(-\infty) \quad (3.42)$$

$$\phi_p(+\infty) = \phi_p(-\infty) \quad (3.43)$$

partiendo de la ecuación (3.41) se encuentra una solución no trivial para el campo ϕ_P dada por

$$\phi_{P_0}^2 = \frac{-3k \pm \sqrt{9k^2 + 60\gamma m^2}}{\gamma} \quad (3.44)$$

Al introducir el valor obtenido de ϕ_{P_0} en (3.38) y (3.39), las ecuaciones de Einstein quedan como:

$$3A'' = -\phi_m'^2 \quad (3.45)$$

$$\frac{3}{2}A'' + 6A'^2 = -(V_{\phi_m} + \Lambda_{\phi_p} + V_0) \quad (3.46)$$

$$\phi_m'' + 4A'\phi_m' = -m^2\phi_m + \frac{1}{2}k\phi_m^3 + \frac{5}{12}\gamma\phi_m^5 \quad (3.47)$$

donde

$$\Lambda_{\phi_p} = V_{\phi_p}|_{\phi_{P_0}} \quad (3.48)$$

Tomando como referencia la solución tipo pared de dominio encontrada para el potencial "doble pozo" de sexto orden, y considerando que el potencial V_{ϕ_M} también es de sexto orden, se propone que ϕ_M y la función A tengan la siguiente forma:

$$\phi_m = a \tanh(br) \quad (3.49)$$

$$A(r) = -\frac{a^2}{9}[2\text{Ln}(\cosh(br)) + \frac{1}{2}\tanh^2(br)] \quad (3.50)$$

Sustituyendo $A(r)$ en la ecuación de Einstein (3.39), se obtiene la siguiente expresión para $V(\Phi_k)$:

$$V(\Phi_k) = \frac{b^2}{2a^2}[(a^2 - \phi_m^2)^2 - \frac{4}{3}\phi_m^2(a^2 - \frac{\phi_m^2}{3})^2] \quad (3.51)$$

$$= V_{\phi_m} + \Lambda_{\phi_p} + V_0 \quad (3.52)$$

Ahora, debe establecerse la relación entre los parámetros m , k y γ y las constantes a y b que se encuentran en las soluciones propuestas para ϕ_m y $A(r)$. Para ello, se hace una identificación término a término entre las ecuaciones (3.51) y (3.52), obteniéndose que:

$$\Lambda_{\phi_p} + V_0 = \frac{1}{2}a^2b^2 \quad (3.53)$$

$$\frac{1}{2}m^2 = b^2 + \frac{2}{3}a^2b^2 \quad (3.54)$$

$$\frac{k}{8} = \frac{b^2}{2a^2} + \frac{4b^2}{9} \quad (3.55)$$

$$\frac{5}{72}\gamma = -\frac{2}{27}\frac{b^2}{a^2} \quad (3.56)$$

Las relaciones (3.53), (3.54), (3.55) y (3.56) son las condiciones que deben cumplirse para que ϕ_m dado por (3.49) sea solución de las ecuaciones de Einstein (3.45), (3.46) y (3.47). Resta por verificar que ϕ_m

es en efecto una solución tipo pared de dominio, es decir, que interpole entre dos mínimos del potencial $V(\phi_m)$. El valor de ϕ_m que minimiza dicho potencial tiene la forma:

$$\phi_{m_{min}}^2 = \frac{1}{5} \frac{-3k \pm \sqrt{9k^2 + 60\gamma m^2}}{\gamma} \quad (3.57)$$

El valor de ϕ_p que minimiza a $V(\phi_p)$ es la solución para ϕ_{p_0} encontrada anteriormente

$$\phi_{p_0}^2 = \frac{-3k \pm \sqrt{9k^2 + 60\gamma m^2}}{\gamma} \quad (3.58)$$

Sustituyendo los valores de m^2 , k y γ en función de a y b , se encuentra que

$$\phi_{m_{min}}^2 = a^2 \quad (3.59)$$

$$\phi_p^2 = 5a^2 \quad (3.60)$$

De esta forma, se ha comprobado que ϕ_M dado por (3.49) es una solución pared de dominio al sistema acoplado Einstein - campo de $SU(5)$.

El valor de Λ_{ϕ_p} , V_0 y el potencial $V(\Phi)$ queda expresado en términos de a y b de la siguiente manera:

$$\Lambda_{\phi_p} = V_{\phi_p}|_{\phi_0} = -\frac{5}{54} a^2 b^2 (27 + 16a^2) \quad (3.61)$$

$$V_0 = \frac{1}{2} a^2 b^2 \left[1 + 5 \left(1 + \frac{16}{27} a^2 \right) \right] \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned} V(\Phi) = & b^2 \left[- \left(2 + \frac{4}{3} a^2 \right) \text{Tr} \Phi^2 - \left(\frac{3}{5a^2} + \frac{8}{15} \right) (\text{Tr} \Phi^2)^2 \right] \\ & + b^2 \left[\left(\frac{4}{a^2} + \frac{32}{9} \right) \text{Tr} \Phi^4 + \frac{164}{675} \frac{1}{a^2} (\text{Tr} \Phi^2)^3 - \frac{128}{405} \frac{1}{a^2} (\text{Tr} \Phi^3)^2 \right] \\ & - \frac{16}{15} \frac{b^2}{a^2} (\text{Tr} \Phi^4) (\text{Tr} \Phi^2) + V_0 \quad (3.63) \end{aligned}$$

En forma matricial, la solución pared de dominio tiene la forma

$$\Phi_k = \frac{1}{2\sqrt{10}} \begin{pmatrix} S_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_3 \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} S_1 &= a \tanh(br) + 5a & S_2 &= a \tanh(br) - 5a \\ S_3 &= -4a \tanh(br) \end{aligned} \quad (3.64)$$

Estos resultados fueron obtenidos con anterioridad en [18]

2. Rompimiento $SU(5) \times Z_2 \rightarrow SU(4) \times U(1)/Z_4$

En este caso, los generadores que expanden el campo Φ de $SU(5)$ son

$$M_B = \frac{1}{\sqrt{60}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad P_B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

El potencial que se propone para este rompimiento es esencialmente el mismo que se muestra en (3.65) pero los signos de los términos de cuarto orden difieren, ya que existe la libertad de escogerlos convenientemente para conseguir la solución tipo pared de dominio en este rompimiento de simetría. El potencial $V(\Phi)$ debe ser el siguiente:

$$V(\Phi) = -m^2 \text{Tr}[\Phi^2] - h(\text{Tr}[\Phi^2])^2 - k \text{Tr}[\Phi^4] + \alpha(\text{Tr}[\Phi^2])^3 + \beta(\text{Tr}[\Phi^3])^2 + \gamma(\text{Tr}[\Phi^4])(\text{Tr}[\Phi^2]) + V_0 \quad (3.65)$$

Utilizando la relaciones mostradas en (3.30) y sustituyendo M por M_B y P por P_B , se encuentra que el potencial (3.65) se desacopla si los parámetros h , α y β satisfacen:

$$\begin{aligned} h &= -\frac{9}{10}k \\ \alpha &= -\frac{137}{210}\gamma \\ \beta &= -\frac{8}{63}\gamma \end{aligned} \quad (3.66)$$

Así, el potencial se puede escribir como:

$$V(\Phi_k) = V_{\phi_m} + V_{\phi_p} + V_0 \quad (3.67)$$

con

$$\begin{aligned} V_{\phi_m} &= -\frac{1}{2}m^2\phi_m^2 + \frac{k}{6}\phi_m^4 - \frac{10}{189}\gamma\phi_m^6 \\ V_{\phi_p} &= -\frac{1}{2}m^2\phi_p^2 + \frac{k}{10}\phi_p^4 - \frac{2}{105}\gamma\phi_p^6 \end{aligned} \quad (3.68)$$

Las ecuaciones de Einstein para este rompimiento de simetría son:

$$3A'' = -(\phi_m'^2 + \phi_p'^2) \quad (3.69)$$

$$\frac{3}{2}A'' + 6A'^2 = -V(\Phi_k) \quad (3.70)$$

$$\phi_m'' + 4A'\phi_m' = -m^2\phi_m + \frac{2}{3}k\phi_m^3 - \frac{20}{63}\gamma\phi_m^5 \quad (3.71)$$

$$\phi_p'' + 4A'\phi_p' = -m^2\phi_p + \frac{2}{5}k\phi_p^3 - \frac{4}{35}\gamma\phi_p^5 \quad (3.72)$$

Imponiendo la condición de contorno (3.43) y partiendo de la ecuación (3.72), se halla una solución no trivial para ϕ_p dada por:

$$\phi_{p0}^2 = \frac{7k \pm \sqrt{49k^2 - 140\gamma m^2}}{4\gamma} \quad (3.73)$$

Con el valor obtenido de ϕ_{p0} , las ecuaciones de Einstein se escriben como sigue:

$$3A'' = -\phi_m'^2 \quad (3.74)$$

$$\frac{3}{2}A'' + 6A'^2 = -(V_{\phi_m} + \Lambda_{\phi_p} + V_0) \quad (3.75)$$

$$\phi_m'' + 4A'\phi_m' = -m^2\phi_m + \frac{2}{3}k\phi_m^3 - \frac{20}{63}\gamma\phi_m^5 \quad (3.76)$$

donde $\Lambda_{\phi_p} = V_{\phi_p}|_{\phi_{p0}}$.

Con ϕ_m y $A(r)$ dados por (3.49) y (3.50), respectivamente, y sustituyendo $A(r)$ en la ecuación de Einstein (3.75), se obtiene la siguiente expresión para $V(\Phi_k)$:

$$V(\Phi_k) = \frac{b^2}{2a^2} \left[(a^2 - \phi_m^2)^2 - \frac{4}{3}\phi_m^2 \left(a^2 - \frac{\phi_m^2}{3} \right)^2 \right] \quad (3.77)$$

$$= V_{\phi_m} + \Lambda_{\phi_p} + V_0 \quad (3.78)$$

Procediendo de la misma manera que en el primer rompimiento de simetría, debe establecerse la relación entre h , k y γ y los factores a y b , haciendo una identificación término a término entre (3.77) y (3.78). Dichas relaciones son:

$$\Lambda_{\phi_p} + V_0 = \frac{1}{2}a^2b^2 \quad (3.79)$$

$$\frac{1}{2}m^2 = b^2 + \frac{2}{3}a^2b^2 \quad (3.80)$$

$$\frac{k}{6} = \frac{b^2}{2a^2} + \frac{4b^2}{9} \quad (3.81)$$

$$\frac{10}{189}\gamma = \frac{2}{27}\frac{b^2}{a^2} \quad (3.82)$$

Resta ahora verificar que ϕ_m es una solución tipo pared de dominio. Para ello, se determina el valor de ϕ_m que minimiza $V(\phi_m)$, siendo este:

$$\phi_{m_{min}}^2 = \frac{3}{20} \frac{7k \pm \sqrt{49k^2 - 140\gamma m^2}}{\gamma} \quad (3.83)$$

El valor de ϕ_p que minimiza $V(\phi_p)$ es justamente el que se muestra en (3.73). Sustituyendo en ambos valores mínimos a k , γ y m^2 en función de los parámetros a y b , se tiene que:

$$\begin{aligned} \phi_{m_{min}}^2 &= a^2 \\ \phi_{p_{min}}^2 &= \frac{5}{3}a^2 \end{aligned} \quad (3.84)$$

De esta forma se ha comprobado que con los generadores propuestos para este rompimiento de simetría se llega a una solución tipo pared de dominio que interpola entre dos mínimos del potencial.

El valor de Λ_{ϕ_p} , V_0 y el potencial $V(\Phi)$ queda expresado en términos de a y b de la siguiente manera:

$$\Lambda_{\phi_p} = V_{\phi_p}|_{\phi_0} = -\frac{5}{162}a^2b^2(27 + 16a^2) \quad (3.85)$$

$$V_0 = \frac{1}{2}a^2b^2 \left[1 + \frac{5}{3} \left(1 + \frac{16}{27}a^2 \right) \right] \quad (3.86)$$

$$\begin{aligned} V(\Phi) &= b^2 \left[- \left(2 + \frac{4}{3}a^2 \right) \text{Tr}\Phi^2 + \left(\frac{27}{10a^2} + \frac{12}{5} \right) (\text{Tr}\Phi^2)^2 \right] \\ &+ b^2 \left[- \left(\frac{3}{a^2} + \frac{8}{3} \right) \text{Tr}\Phi^4 - \frac{137}{150} \frac{1}{a^2} (\text{Tr}\Phi^2)^3 - \frac{8}{45} \frac{1}{a^2} (\text{Tr}\Phi^3)^2 \right] \\ &+ \frac{7}{5} \frac{b^2}{a^2} (\text{Tr}\Phi^4)(\text{Tr}\Phi^2) + V_0 \end{aligned} \quad (3.87)$$

En forma matricial, la solución pared de dominio tiene la forma

$$\Phi_k = \frac{1}{2\sqrt{15}} \begin{pmatrix} S_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_3 \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} S_1 &= -2a \tanh(br) + 5a & S_2 &= 3a \tanh(br) + 5a \\ S_3 &= 3a \tanh(br) - 5a & & (3.88) \end{aligned}$$

Estos resultados fueron obtenidos con anterioridad en [22].

www.bdigital.ula.ve

www.bdigital.ula.ve

Capítulo 4

Fluctuaciones en branas gruesas con la simetría $SU(5) \times Z_2$

En este capítulo, y como aporte del presente trabajo, se analizará la localización de los modos de las perturbaciones en paredes de dominio con simetría no abeliana, utilizando para ello buena parte de los resultados mostrados en capítulos anteriores. Como primer paso se reescribirán las ecuaciones linealizadas de las fluctuaciones tomando en cuenta que el campo que genera la brana, llámesele Φ , transforma bajo la representación adjunta de $SU(5)$ y que el potencial es el más general posible en la simetría de calibre considerada. Posteriormente se buscará escribir los distintos modos de las fluctuaciones como ecuaciones tipo onda, apelando a los trabajos ya realizados en este sentido para el caso de campo escalares con simetría abeliana, de modo que al estudiar los potenciales mecánico - cuánticos asociados se puede determinar la localización o no localización de los distintos modos.

Cabe destacar que aunque se han mostrado dos rompimientos de simetría distintos que generan soluciones tipo pared de dominio, lo que sigue es completamente válido en ambos, por lo que no se hará ninguna distinción.

4.1 Ecuaciones de los distintos modos de las perturbaciones

Al igual que en el caso de un sistema Einstein - campo escalar, en el contexto de la simetría de calibre $SU(5) \times Z_2$ las ecuaciones de las perturbaciones se

34 derivan de las ecuaciones de Einstein para una métrica perturbada arbitraria \tilde{g}_{AB} , y haciendo analogías con el caso abeliano, se tiene que:

$$\tilde{R}_{AB} = \tilde{T}_{AB} - \frac{1}{3}\tilde{g}_{AB}\tilde{T} \quad (4.1)$$

y el tensor energía- impulso se escribe como:

$$\tilde{T}_{AB} = 2\text{Tr}[\nabla_A\tilde{\Phi}\nabla_B\tilde{\Phi}] - \tilde{g}_{AB}(\text{Tr}[\nabla_C\tilde{\Phi}\nabla^C\tilde{\Phi}] + V(\tilde{\Phi})) \quad (4.2)$$

Dado que estamos interesados en soluciones tipo pared de dominio, $\tilde{\Phi}$ será una perturbación hecha en torno al campo Φ_k dado por la ecuación (3.27). El campo perturbado más general que puede escribirse en la simetría considerada tiene la forma:

$$\tilde{\Phi} = \Phi_k + \lambda \sum_{a=1}^{24} \varphi^a T_a \quad (4.3)$$

donde λ es un parámetro infinitesimal y todos los φ^a dependen las coordenadas espacio- temporales y de la coordenada adicional r . Hay que tener en cuenta que los generadores de $SU(5)$ pueden ser diagonales o no diagonales. Dado que Φ_k puede ser escrito como una matriz diagonal y el producto de una matriz diagonal por una no diagonal es siempre no diagonal, siendo la traza de dicho producto nula, se tiene que las perturbaciones que están a lo largo de los generadores no diagonales no tienen ninguna contribución (esto se ve más claramente al notar que el tensor energía impulso y el potencial $V(\Phi)$ se compone de trazas). Por lo tanto, la perturbación de Φ_k se escribirá como una expansión a lo largo de los 4 generadores diagonales de $SU(5)$. De una forma más específica, la perturbación del campo se escribe como:

$$\tilde{\Phi} = \Phi_k + \lambda(\varphi_m M + \varphi_p P + \varphi_3 T^3 + \varphi_4 T^4) \quad (4.4)$$

donde M_A y P_A son los generadores que expanden a Φ_k y

$$T^3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad T^4 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo (4.4) en (4.2) se encuentra que el tensor energía-impulso perturbado es:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{AB} = & 2\text{Tr}[\nabla_A\tilde{\Phi}_k\nabla_B\tilde{\Phi}_k] + 2\lambda\nabla_{(A}\phi_b\nabla_{B)}\varphi_b \\ & -\tilde{g}_{AB}[\tilde{g}^{CD}(\text{Tr}[\nabla_C\tilde{\Phi}_k\nabla_D\tilde{\Phi}_k] + \lambda\nabla_{(C}\phi_b\nabla_{D)}\varphi_b) + V(\tilde{\Phi})] \end{aligned} \quad (4.5)$$

El subíndice b denota una suma sobre los dos campos que forman la solución Φ_k , a saber, ϕ_m y ϕ_p , definidos en (3.49) y (3.58) respectivamente, y sus perturbaciones correspondientes (para evitar confusiones, el índice b , que identifica los campos escalares de la teoría, se escribe en minúscula, mientras que los índices espacio - temporales se escriben en mayúscula). Como se puede observar, no aparecen en la ecuación fluctuaciones a lo largo de los generadores diagonales T^3 y T^4 .

El potencial $V(\tilde{\Phi})$ es el potencial mostrado en (3.65) sustituyendo Φ por $\tilde{\Phi}$, es decir:

$$V(\tilde{\Phi}) = -m^2 \text{Tr}[\tilde{\Phi}^2] + h(\text{Tr}[\tilde{\Phi}^2])^2 + k \text{Tr}[\tilde{\Phi}^4] + \alpha(\text{Tr}[\tilde{\Phi}^2])^3 + \beta(\text{Tr}[\tilde{\Phi}^3])^2 + \gamma(\text{Tr}[\tilde{\Phi}^4])(\text{Tr}[\tilde{\Phi}^2]) + V_0 \quad (4.6)$$

Al introducir la forma explícita de $\tilde{\Phi}$ en el potencial perturbado, y al hacer uso de las condiciones mostradas en (3.31), se encuentra lo siguiente:

$$V(\tilde{\Phi}) = V(\Phi_k) + \lambda \left(-m^2 \phi_m + \frac{1}{2} k \phi_m^3 + \frac{5}{12} \gamma \phi_m^5 \right) \varphi_m + \lambda \left(-m^2 \phi_p + \frac{1}{10} k \phi_p^3 + \frac{1}{60} \gamma \phi_p^5 \right) \varphi_p + V_0 \quad (4.7)$$

Es de notar que las fluctuaciones que están a lo largo de T^3 y T^4 no aportan ninguna contribución al potencial perturbado. Por medio de un cálculo directo, se puede demostrar que

$$\begin{aligned} \text{Tr}[M^2 T^i] &= \text{Tr}[P^2 T^i] = \text{Tr}[PMT^i] = 0 \\ \text{Tr}[M^3 T^i] &= \text{Tr}[P^3 T^i] = \text{Tr}[M^2 PT^i] = \text{Tr}[P^2 MT^i] \\ &= \text{Tr}[MPMT^i] = \text{Tr}[PMPT^i] = 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

ocurriendo lo mismo con los términos que resultan de intercambiar M o potencias superiores de M con P o potencias superiores de P . (4.8) es válida para los generadores diagonales involucrados en ambos rompimientos de simetría (por simplicidad, se evita escribir subíndices y para cada caso se sustituye M y P con los generadores correspondientes). Esto hace que el potencial perturbado también se desacople y se pueda escribir como la suma de dos funciones independientes entre sí y que corresponden exactamente con las derivadas con respecto al campo de los potenciales V_{ϕ_M} y V_{ϕ_P} definidos en (3.68). Por lo tanto, $V(\tilde{\Phi})$ puede escribirse como:

$$V(\tilde{\Phi}) = V(\Phi_k) + \lambda \left(\frac{dV(\phi_m)}{d\phi_m} \varphi_m + \frac{dV(\phi_p)}{d\phi_p} \varphi_p \right) \quad (4.9)$$

Ahora, se puede escribir el tensor T_{AB} sustituyendo (4.9) en (4.5), obteniéndose

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{AB} = & 2\text{Tr}[\nabla_A \Phi_k \nabla_B \Phi_k] - \tilde{g}_{AB} [\tilde{g}^{CD} (\text{Tr}[\nabla_C \Phi_k \nabla_D \Phi_k] + \lambda \nabla_{(C} \phi_b \nabla_{D)} \varphi_b)] \\ & + 2\lambda \nabla_{(A} \phi_b \nabla_{B)} \varphi_b - \tilde{g}_{AB} \left[V(\Phi_k) + \lambda \left(\frac{dV(\phi_m)}{d\phi_m} \varphi_m + \frac{dV(\phi_p)}{d\phi_p} \varphi_p \right) \right] \end{aligned} \quad (4.10)$$

Siguiendo el mismo proceso mostrado en el capítulo 1, referente a la obtención de la ecuación linealizada de las fluctuaciones, se deriva el lado derecho de (4.1) con respecto a λ , es decir:

$$\frac{d}{d\lambda} \tilde{R}_{AB} = \frac{d}{d\lambda} \left(\tilde{T}_{AB} - \frac{1}{3} \tilde{g}_{AB} \tilde{g}^{CD} \tilde{T}_{CD} \right) \quad (4.11)$$

Realizando los cálculos correspondientes, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \tilde{R}_{AB} = & 2\nabla_{(A} \phi_b \nabla_{B)} \varphi_b + \frac{2}{3} g_{AB} \left(\frac{dV(\phi_m)}{d\phi_m} \varphi_m + \frac{dV(\phi_p)}{d\phi_p} \varphi_p \right) \\ & + \frac{2}{3} h_{AB} V(\Phi_k) \end{aligned} \quad (4.12)$$

El proceso para calcular el lado izquierdo de (4.1) ya se ha mostrado en detalle en el capítulo 1, por lo que la ecuación linealizada de la fluctuaciones en la simetría $SU(5) \times Z_2$ es

$$\begin{aligned} \nabla_{(A} \nabla^D h_{B)D} - \frac{1}{2} \nabla^D \nabla_D h_{AB} - \frac{1}{2} \nabla_A \nabla_B (g^{CD} h_{CD}) + R^D{}_{(AB)}{}^C h_{CD} \\ + R^C{}_{(A} h_{B)C} = & 2\nabla_{(A} \phi_b \nabla_{B)} \varphi_b + \frac{2}{3} g_{AB} \left(\frac{dV(\phi_m)}{d\phi_m} \varphi_m + \frac{dV(\phi_p)}{d\phi_p} \varphi_p \right) \\ & + \frac{2}{3} h_{AB} V(\Phi_k) \end{aligned} \quad (4.13)$$

Para hallar la ecuación correspondiente a la fluctuación del campo de $SU(5)$ se hacen variaciones de la acción dada por (3.23), con respecto al campo, y luego se sustituye Φ por $\tilde{\Phi}$. El campo $\tilde{\Phi}$ en función de sus componentes se escribe como

$$\tilde{\Phi} = \tilde{\phi}_m M + \tilde{\phi}_p P \quad (4.14)$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_m &= \phi_m + \lambda \varphi_m \\ \tilde{\phi}_p &= \phi_p + \lambda \varphi_p \end{aligned} \quad (4.15)$$

De este modo se encuentra que

$$\begin{aligned} \tilde{g}^{AB} \text{Tr}[\tilde{\nabla}_A(\tilde{\phi}_m \mathbf{M} + \tilde{\phi}_p \mathbf{P}) \tilde{\nabla}_B(\tilde{\phi}_m \mathbf{M} + \tilde{\phi}_p \mathbf{P})] = \\ \frac{d}{d\phi_m} \left(\frac{dV(\phi_m)}{d\phi_m} \varphi_m \right) + \frac{d}{d\phi_p} \left(\frac{dV(\phi_p)}{d\phi_p} \varphi_p \right) \end{aligned} \quad (4.16)$$

donde el miembro derecho de (4.16) es la expresión de $\frac{dV(\tilde{\Phi})}{d\phi_b}$ como función de dos potenciales desacoplados. Desarrollando las trazas, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \tilde{g}^{AB} \tilde{\nabla}_A \tilde{\phi}_m \tilde{\nabla}_B \tilde{\phi}_m + \frac{1}{2} \tilde{g}^{AB} \tilde{\nabla}_A \tilde{\phi}_p \tilde{\nabla}_B \tilde{\phi}_p \\ = \frac{d^2 V(\phi_m)}{d\phi_m^2} \varphi_m + \frac{d^2 V(\phi_p)}{d\phi_p^2} \varphi_p \end{aligned} \quad (4.17)$$

Al hallar la ecuación de Euler - Lagrange para cada uno de los campos, se consiguen dos ecuaciones de idéntica forma, y entonces por simplicidad se escribe una única ecuación donde el subíndice b denota a m o a p según sea el caso (esta vez no hay suma sobre b). Entonces, la ecuación que se obtiene de hacer variaciones de la acción con respecto a $\tilde{\Phi}$ queda como:

$$\tilde{g}^{AB} \tilde{\nabla}_A \tilde{\nabla}_B \tilde{\phi}_b = \frac{d^2 V(\phi_b)}{d\phi_b^2} \varphi_b \quad (4.18)$$

Procediendo ahora a derivar el lado izquierdo de (4.18) con respecto a λ , se obtiene:

$$\begin{aligned} -h^{AB} \nabla_A \nabla_B \phi_b - \frac{1}{2} g^{AB} g^{CD} (\nabla_A h_{BD} + \nabla_B h_{AD} - \nabla_D h_{AB}) \nabla_C \phi_b \\ + g^{AB} \nabla_A \nabla_B \varphi_b - \frac{d^2 V(\phi_b)}{d\phi_b^2} \varphi_b = 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

Una vez fijada la forma específica de g_{AB} y del tensor de las perturbaciones de la métrica h_{AB} , pueden hallarse las ecuaciones de los distintos modos de las fluctuaciones, al sustituir dichos tensores en (4.13) y (4.16). Tomando como referencia lo mostrado en el capítulo 1, h_{AB} es

$$h_{AB} = e^{2A} \begin{pmatrix} 2h_{MN}^{TT} + 2\partial_{(M} f_{N)} + 2\eta_{MN}\psi + 2\partial_M \partial_N E & e^{-A} (D_M + \partial_M C) \\ e^{-A} (D_M + \partial_M C) & 2e^{-2A}\omega \end{pmatrix}$$

y g_{AB} está dada por (3.37).

Haciendo uso de la ecuación de Einstein (3.39) en el miembro derecho de (4.13),

las ecuaciones del modo tensorial, vectorial y escalar de las fluctuaciones son, respectivamente:

$$\begin{aligned}
 & \left(-e^{2A} \partial^B \partial_B - \partial_r^2 - 4A' \partial_r \right) h_{MN}^{TT} \\
 & + \partial_{(M} \left[3e^{-A} D_{N)} - f_{N)}'' - 4A' f_{N)}' + e^{-A} D_{N)}' \right] \\
 & + \eta_{MN} \left[-e^{-2A} \partial^B \partial_B \left(\psi + e^{2A} A' E' - e^A A' C \right) - \psi'' - 8A' \psi' \right] \\
 & + \eta_{MN} \left[8A'^2 \omega + A' \omega' + 2A'' \omega \right] \\
 & + \partial_M \partial_N \left[-e^{-2A} (\omega + 2\psi) - E'' - 4A' E' + e^{-A} C' + 3A' e^{-A} C \right] \\
 & = \frac{2}{3} \eta_{MN} \left(\frac{dV(\phi_m)}{d\phi_m} \varphi_m + \frac{dV(\phi_p)}{d\phi_p} \varphi_p \right) \quad (4.20)
 \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2} e^{-A} \partial^B \partial_B \left(D_M - e^A f_M' \right) + \partial_M (3A' \omega - 3\psi' - \phi_m' \varphi_m - \phi_p' \varphi_p) = 0 \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned}
 & -e^{-2A} \partial^B \partial_B \left(\omega + E'' + 2e^{2A} A' E' - e^A A' C - e^A C' \right) - 4\psi'' - 8A' \psi' \\
 & + 4A' \omega' + 2A'' \omega + 8A'^2 \omega - 2(\phi_m' \phi_m' + \phi_p' \phi_p') \\
 & = \frac{2}{3} \left(\frac{dV(\phi_m)}{d\phi_m} \varphi_m + \frac{dV(\phi_p)}{d\phi_p} \varphi_p \right) \quad (4.22)
 \end{aligned}$$

Análogamente, de (4.16) se obtiene que:

$$\begin{aligned}
 & e^{-2A} \partial^B \partial_B \left(\varphi_b - e^A \phi_b' C + e^{2A} E' \phi_b' \right) - 2(\phi_b'' + 4A' \phi_b') \omega - \phi_b' \omega' \\
 & + 4\phi_b' \psi' + \varphi_b'' + 4A' \varphi_b' - \frac{d^2 V(\phi_b)}{d\phi_b^2} \varphi_b = 0 \quad (4.23)
 \end{aligned}$$

4.2 Ecuaciones invariantes de calibre

De nuevo, es conveniente escribir las ecuaciones (4.20), (4.21), (4.22) y (4.23) en función de variables que sean invariantes bajo transformaciones infinitesimales de coordenadas, ya que dichas variables representan grados de libertad físicos. El tensor h_{AB} transforma como

$$\bar{h}_{AB} = h_{AB} - 2\nabla_{(A} \epsilon_{B)} \quad (4.24)$$

donde

$$\epsilon_A = \left(e^{2A} \epsilon_M, \epsilon_r \right) \quad (4.25)$$

y la parte 4-dimensional de ϵ_A se puede escribir como la suma de la derivada de una escalar y un vector transverso (sin divergencia):

$$\epsilon_M = \partial_M \epsilon + \zeta_M, \quad \partial^M \zeta_M = 0 \quad (4.26)$$

Calculando la traza de el sector cuadrimensional de \bar{h}_{AB} , es decir, $g^{MN}\bar{h}_{MN}$, así como la divergencia del mismo, dada por $\partial^M \bar{h}_{Mr}$, se encuentran las siguientes transformaciones:

$$\begin{aligned} \bar{\psi} &= \psi - A' \epsilon_r \\ \bar{E} &= E - \epsilon \\ \bar{f}_M &= f_M - \zeta_M \end{aligned} \quad (4.27)$$

Considerando ahora la divergencia de la parte vectorial de \bar{h}_{AB} , $\partial^M \bar{h}_{Mr}$, se determina la forma en la que transforman el campo escalar C , y el vector D_M :

$$\begin{aligned} \bar{C} &= C - e^A \epsilon' - e^{-A} \epsilon_r \\ \bar{D}_M &= D_M - e^A \zeta'_M \end{aligned} \quad (4.28)$$

Finalmente la transformación del campo ω se encuentra calculando $g^{rr} \bar{h}_{rr}$:

$$\bar{\omega} = \omega - \epsilon'_r \quad (4.29)$$

Dado que ya se ha visto que sólo las fluctuaciones a largo de los generadores M_A y P_A son relevantes, se definen únicamente transformaciones de coordenadas de φ_m y de φ_p , tomando como referencia lo mostrado en la ecuación (2.40). Ambas transformaciones se identifican con el subíndice b , así:

$$\bar{\varphi}_b = \varphi_b - \phi'_b \epsilon_r \quad (4.30)$$

Después de ver reflejadas todas las transformaciones infinitesimales de coordenadas de los campos escalares y vectoriales implicados en la teoría, deben escribirse tres funciones invariantes de calibre correspondientes a los tres grados de libertad impuestos por las variables ζ_M , ϵ y ϵ_r , y una cuarta función relacionada con las perturbaciones de los campos ϕ_m y ϕ_p . Las tres primeras funciones, \bar{V}_M , $\bar{\Gamma}$ y $\bar{\Theta}$ ya se han definido en (2.41), (2.42) y (2.43), respectivamente. La cuarta función se escribe como:

$$\bar{\chi}_b = \bar{\varphi}_b + e^{2A} \phi'_b \bar{E}' - e^A \phi'_b \bar{C} = \bar{\varphi}_b + \phi'_b \bar{\Omega} \quad (4.31)$$

donde b puede ser igual a m ó a p . Al escribir las ecuaciones (4.20), (4.21), (4.22) y (4.23) en función de las variables \bar{V}_M , $\bar{\Gamma}$ y $\bar{\Theta}$ y $\bar{\chi}_b$, y al hacer la

escogencia de calibre propuesta en (2.53), se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} & (-e^{-2A}\partial^B\partial_B - \partial_r^2 - 4A'\partial_r)h_{MN}^{TT} + e^{-A}\partial_{(M}(\partial_r + 3A')V_{N)} \\ & + \eta_{MN}[-e^{-2A}\partial^B\partial_B\Gamma - \Gamma'' - 8A'\Gamma' + (8A'^2 + 2A'')\Theta + A'\Theta'] \\ & + \partial_M\partial_N[-e^{-2A}(\Theta + 2\Gamma)] = \frac{2}{3}\eta_{MN} \left(\chi_m \frac{dV(\phi_m)}{d\phi_m} + \chi_p \frac{dV(\phi_p)}{d\phi_p} \right) \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$-\frac{1}{2}e^{-A}\partial^B\partial_B V_M + \partial_M[3A'\Theta - 3\Gamma' - \phi_m\chi_m - \phi_p\chi_p] = 0 \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} & -e^{-2A}\partial^B\partial_B\Theta + 4A'\Theta' - 8A'\Gamma' - 4\Gamma'' - 2\phi'_m\chi'_m - 2\phi'_p\chi'_p \\ & + (8A'^2 + 2A'')\Theta = \frac{2}{3} \left(\chi_m \frac{dV(\phi_m)}{d\phi_m} + \chi_p \frac{dV(\phi_p)}{d\phi_p} \right) \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} & e^{-2A}\partial^B\partial_B\chi_b - 2(\phi''_b + 4A'\phi'_b)\Theta - \phi'_b\Theta' + 4\phi'_b\Gamma' + 4A'\chi'_b + \chi''_b \\ & = \chi_b \frac{d^2V(\phi_b)}{d\phi_b^2} \end{aligned} \quad (4.35)$$

Finalmente, se escriben las ecuaciones (4.32), (4.33), (4.34) y (4.35) en un sistema de coordenadas conformemente plano, donde la relación entre la coordenada adicional r y la nueva coordenada, η , está dada por (2.59). Entonces:

$$\begin{aligned} & (-\partial^B\partial_B - 3A'\partial_\eta - \partial_\eta^2)h_{MN}^{TT} + \partial_{(M}(\partial_\eta + 3A')V_{N)} - \partial_M\partial_N(2\Gamma + \Theta) \\ & + \eta_{MN}[-\partial^B\partial_B\Gamma - 7A'\Gamma' + (6A'^2 + 2A'')\Theta + A'\Theta' - \Gamma''] \\ & = \frac{2}{3}e^{2A}\eta_{MN} \left(\chi_m \frac{dV(\phi_m)}{d\phi_m} + \chi_p \frac{dV(\phi_p)}{d\phi_p} \right) \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$-\frac{1}{2}\partial^B\partial_B V_M + \partial_M[3A'\Theta - 3\Gamma' - \phi'_m\chi_m - \phi'_p\chi_p] = 0 \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned} & -\partial^B\partial_B\Theta + 4A'\Theta' - 4A'\Gamma' - 4\Gamma'' - 2(\phi'_m\chi'_m + \phi'_p\chi'_p) \\ & + (6A'^2 + 2A'')\Theta = \frac{2}{3}e^{2A} \left(\chi_m \frac{dV(\phi_m)}{d\phi_m} + \chi_p \frac{dV(\phi_p)}{d\phi_p} \right) \end{aligned} \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned} & \partial^B\partial_B\chi_b - 2(\phi''_b + 3A'\phi'_b)\Theta - \phi'_b\Theta' + 4\phi'_b\Gamma' + 3A'\chi'_b + \chi''_b \\ & = \chi_b e^{2A} \frac{d^2V(\phi_b)}{d\phi_b^2} \end{aligned} \quad (4.39)$$

4.3 Desacoplamiento de los modos de las fluctuaciones

En lo que sigue, se mostrará el procedimiento a través del cual se desacoplan los modos tensoriales, vectoriales y escalares en el sistema acoplado Einstein - campo de $SU(5)$.

- Al considerar en primer lugar la parte no diagonal de la ecuación (4.36) se tiene que:

$$(-\partial^B \partial_B - 3A' \partial_\eta - \partial_\eta^2) h_{MN}^{TT} + \partial_{(M} (\partial_\eta + 3A') V_{N)} - \partial_M \partial_N (2\Gamma + \Theta) = 0 \quad (4.40)$$

Cada uno de los términos que aparecen en esta ecuación depende de campos que satisfacen restricciones cinemáticas que los hacen independientes. Por ejemplo, si se toma la divergencia de (4.40), sólo queda el tercer término igualado a 0, ya que el vector V_M se compone de dos vectores sin divergencia, como lo indica la ecuación (2.41). Se concluye entonces que

$$(-\partial^B \partial_B - 3A' \partial_\eta - \partial_\eta^2) h_{MN}^{TT} = 0 \quad (4.41)$$

$$\partial_{(M} (\partial_\eta + 3A') V_{N)} = 0 \rightarrow (\partial_\eta + 3A') V_N = 0 \quad (4.42)$$

$$\partial_M \partial_N (2\Gamma + \Theta) = 0 \rightarrow 2\Gamma + \Theta = 0 \quad (4.43)$$

- Ahora, la parte diagonal de (4.36) está representada por los términos proporcionales a η_{MN} :

$$-\partial^B \partial_B \Gamma - 7A' \Gamma' + (6A'^2 + 2A'') \Theta + A' \Theta' - \Gamma'' = \frac{2}{3} e^{2A} \left(\chi_m \frac{dV(\phi_m)}{d\phi_m} + \chi_p \frac{dV(\phi_p)}{d\phi_p} \right) \quad (4.44)$$

Esta ecuación escalar se complementa con la ecuación (4.38) y con ellas se podrá estudiar la localización de uno de los modos escalares de las fluctuaciones.

- Tomando ahora la ecuación (4.37), y usando el hecho de que la divergencia de V_M es igual a 0, se tiene que

$$\frac{1}{2} \partial^B \partial_B V_M = 0 \quad (4.45)$$

$$\partial_M [3A' \Theta - 3\Gamma' - \phi'_m \chi_m - \phi'_p \chi_p] = 0 \quad (4.46)$$

- Por último, con la ecuación (4.39) se estudiará la localización de otro de los modos escalares.

4.4 Ecuaciones tipo onda de los modos

Buena parte del proceso por el cual las ecuaciones de los distintos modos de las fluctuaciones pueden escribirse como ecuaciones de Schrödinger se muestra en [13], y, aunque en la mencionada referencia el campo que genera la brana es escalar, se puede establecer una analogía casi exacta con el sistema con simetría $SU(5) \times Z_2$ que ya ha sido presentado, debido a que el potencial perturbado de sexto orden mostrado en (4.6) se desacopla y a que de la ecuación (4.16) se obtienen dos ecuaciones no-acopladas, porque cada una depende de un campo (ϕ_m ó ϕ_p) y su respectiva fluctuación.

Modo tensorial

La ecuación (4.41) puede escribirse como una ecuación de Schrödinger haciendo una separación de variables simple, esto es, escribiendo h_{MN}^{TT} como el producto de una función de las coordenadas espacio-temporales y una función de la coordenada adicional:

$$h_{MN}^{TT} = e^{-\frac{3}{2}A} e^{ip \cdot x} \Psi_{MN}(\eta) \quad (4.47)$$

Así, se elimina el término de primer orden en la derivada y se obtiene:

$$(-\partial_\eta^2 + V_{QM})\Psi_{MN} = m^2\Psi_{MN} \quad (4.48)$$

donde $m^2 = p^N p_N$ y el potencial mecánico cuántico está dado por:

$$V_{QM} = \frac{9}{4}A'^2 + \frac{3}{2}A'' \quad (4.49)$$

Modo vectorial

Para estudiar la localización de este modo, asociado a la función V_M , se parte de las ecuaciones (4.42) y (4.45). Al restar ambas ecuaciones, se obtiene:

$$-\frac{1}{2}\partial^B\partial_B V_M + (\partial_\eta + 3A')V_M = 0 \quad (4.50)$$

Se ve claramente que no es posible hacer ningún cambio de variable que permita escribir (4.50) como una ecuación tipo onda, ya que no existe el término de segunda derivada en η . Por tanto, no hay un potencial mecánico cuántico asociado al modo vectorial, y este hecho descarta la localización de este modo en la brana.

Modos escalares

1. El primero de los modos escalares está asociado a las funciones Θ , Γ , a los campos ϕ_m y ϕ_p y sus respectivas fluctuaciones. Eso indica un acoplamiento entre las perturbaciones de la métrica y la perturbación del campo que genera la pared. Como primer paso para escribir la ecuación tipo onda de este primer modo escalar, se restan las ecuaciones (4.44) y (4.38), obteniéndose:

$$\partial^B \partial_B (\Theta - \Gamma) - 3A' \Gamma' - 3A' \Theta' + 3\Gamma'' + 2\phi'_m \chi'_m + 2\phi'_p \chi'_p = 0 \quad (4.51)$$

Haciendo uso de (4.43) puede eliminarse Θ de (4.51), y la ecuación queda ahora en función de Γ y las fluctuaciones del campo. Así:

$$-3\partial^B \partial_B \Gamma + 3A' \Gamma' + 3\Gamma'' + 2\phi'_m \chi'_m + 2\phi'_p \chi'_p = 0 \quad (4.52)$$

Es en este punto donde podemos hacer uso del hecho de que ϕ_p es una constante, tal como se muestra en (3.58), siendo entonces su derivada igual a 0. Por lo tanto, se puede hacer uso de la condición (4.43) y (4.46) para despejar a χ_m en función de Γ y sus derivadas:

$$\chi_m = \frac{-6A' \Gamma - 3\Gamma'}{\phi'_m} \quad (4.53)$$

Al sustituir (4.53) en (4.52), se obtiene que:

$$-\partial^B \partial_B \Gamma + \left(3A' - 2\frac{\phi''_m}{\phi'_m}\right) \Gamma' + 4\left(A'' - \frac{\phi''_m}{\phi'_m} A'\right) \Gamma + \Gamma'' = 0 \quad (4.54)$$

Dado que la forma de la ecuación (4.54) es idéntica a lo que se muestra en [13], se puede proponer también el siguiente cambio de variable:

$$\Upsilon = \frac{e^{\frac{3}{2}A}}{\phi'_m} \Gamma, \quad \Gamma = e^{ip \cdot x} \tilde{\Gamma}(\eta) \quad (4.55)$$

Despejando Γ en función de Υ e introduciendo esto en (4.54), se llega a una ecuación tipo onda

$$(-\partial_\eta^2 + V_{QM_\Upsilon}) \Upsilon = m^2 \Upsilon \quad (4.56)$$

donde

$$V_{QM_\Upsilon} = \left(-\frac{5}{2}A'' + \frac{9}{4}A'^2 + A' \frac{\phi''_m}{\phi'_m} - 2\left(\frac{\phi''_m}{\phi'_m}\right)^2 + \frac{\phi'''_m}{\phi'_m}\right) \quad (4.57)$$

2. El segundo modo escalar está relacionado con la ecuación (4.39), que se deriva de la ecuación de Euler - Lagrange para el campo perturbado $\tilde{\Phi}$. El estudio de este modo escalar se divide en dos casos: $b = m$ y $b = p$

a) Cuando $b = m$, la ecuación (4.39) tiene la forma

$$\begin{aligned} \partial^B \partial_B \chi_m - 2(\phi_m'' + 3A' \phi_m') \Theta - \phi_m' \Theta' + 4\phi_m' \Gamma' \\ + 3A' \chi_m' + \chi_m'' = \chi_m e^{2A} \frac{d^2 V(\phi_m)}{d\phi_m^2} \end{aligned} \quad (4.58)$$

Tomando igualmente la referencia [19], se propone el siguiente cambio de variable

$$\Xi = e^{\frac{3}{2}A} \left(\chi_m - \frac{\phi_m'}{A'} \right) \Gamma \quad (4.59)$$

Para demostrar que este cambio de variable es válido, se sustituye (4.59) en una ecuación de Schrödinger, y luego de hacer los cálculos correspondientes, se debe llegar a la ecuación (4.39). Para ello, se parte de que la ecuación tipo onda puede escribirse como:

$$(A^+ A^- + \partial^B \partial_B) \Xi = 0 \quad (4.60)$$

donde

$$A^\pm = \pm \partial_\eta + \frac{Z'}{Z}, \quad Z = e^{\frac{3}{2}A} \frac{\phi_m'}{A'} \quad (4.61)$$

Desarrollando los operadores A^+ y A^- se tiene que:

$$\left(-\partial_\eta^2 + \partial_\eta \left(\frac{Z'}{Z} \right) + \left(\frac{Z'}{Z} \right)^2 + \partial^B \partial_B \right) \Xi = 0 \quad (4.62)$$

Sustituyendo Ξ en (4.62), haciendo uso de (4.54) para despejar $\partial^B \partial_B \Gamma$, sumando todos los términos y multiplicando ambos lados por -1 se tiene que:

$$\begin{aligned} 0 = \chi_m'' + 3A' \chi_m' + \partial^B \partial_B \chi_m \\ - \frac{4\phi_m''}{A'} \Gamma' + \frac{2\phi_m' A''}{A'^2} \Gamma' - 4 \left(\phi_m'' - \frac{A''}{A'} \phi_m' \right) \Gamma \\ - \left(3A' \frac{\phi_m''}{\phi_m'} - 3A'' + \frac{\phi_m'''}{\phi_m'} - \frac{2\phi_m'' A''}{\phi_m' A'} - \frac{A'''}{A'} + \frac{2(A'')^2}{A'^2} \right) \chi_m \end{aligned} \quad (4.63)$$

De la ecuación (4.46) se despeja Γ' , quedando ésta en función de Γ y de χ_m . Después de reordenar términos la ecuación parece complicarse, pero al hacer uso de la ecuación de Einstein (3.45), que

establece que $\phi_m'^2 = -3A''$, y al reescribir de forma adecuada algunos términos, (4.63) se simplifica notablemente, quedando como:

$$\chi_m'' + 3A'\chi_m' + \partial^B \partial_B \chi_m + 4\phi_m'' \Gamma = \left(3A' \frac{\phi_m''}{\phi_m'} - 3A'' + \frac{\phi_m'''}{\phi_m'} \right) \chi_m \quad (4.64)$$

Ahora, se toma la ecuación (4.58) y se calcula el lado izquierdo de la misma haciendo uso de (3.45) y (3.46). En primer lugar, se tiene que:

$$e^{2A} \frac{dV(\phi_m)}{d\phi_m} = -e^{2A} (4A'\phi_m + \phi_m'') \quad (4.65)$$

Luego, haciendo transformaciones a coordenadas conformes, se tiene que:

$$e^{2A} \frac{dV^2(\phi_m)}{d\phi_m^2} = - \left(3A'' + 3A' \frac{\phi_m''}{\phi_m'} + \frac{\phi_m'''}{\phi_m'} \right) \quad (4.66)$$

Sustituyendo (4.66) en (4.58) y usando la ecuación (4.46) para despejar Γ' , se encuentra que

$$\chi_m'' + 3A'\chi_m' + \partial^B \partial_B \chi_m + 4\phi_m'' \Gamma = \left(3A' \frac{\phi_m''}{\phi_m'} - 3A'' + \frac{\phi_m'''}{\phi_m'} \right) \chi_m \quad (4.67)$$

Como se ve, (4.67) coincide exactamente con (4.64), por lo que queda demostrado que con el cambio de variable propuesto en (4.59), puede escribirse (4.58) como una ecuación de Schrödinger, donde el potencial mecánico cuántico está dado por:

$$V_{QM\Xi} = \frac{9}{4}A'^2 + 3A' \frac{\phi_m''}{\phi_m'} - \frac{3}{2}A'' + \frac{\phi_m'''}{\phi_m'} - \frac{2\phi_m''A''}{\phi_m'A'} - \frac{A'''}{A'} + \frac{2A''^2}{A'^2} \quad (4.68)$$

- b) Cuando $b = p$, todos los términos que dependen de las derivadas de ϕ_p se anulan, ya que este campo es constante. La ecuación (4.39) queda así:

$$\partial^B \partial_B \chi_p + 3A'\chi_p' + \chi_p'' = 0 \quad (4.69)$$

Puede notarse que (4.69) tiene la misma forma que (4.41), y por lo tanto será posible llevarla a una ecuación tipo Schrödinger haciendo un cambio de variable muy similar. Se propone entonces que

$$\chi_p = e^{-\frac{3}{2}A} e^{ip \cdot x} \tilde{\chi}_p(\eta) \quad (4.70)$$

y de aquí se obtiene que

$$(-\partial_\eta^2 + V_{QM\chi_p}) \tilde{\chi}_p = m^2 \tilde{\chi}_p \quad (4.71)$$

Por supuesto, el potencial mecánico cuántico asociado las fluctuaciones de ϕ_p es idéntico al que se obtuvo para el sector transversal y sin traza,

$$V_{QM_{xp}} = \frac{9}{4}A'^2 + \frac{3}{2}A'' \quad (4.72)$$

www.bdigital.ula.ve

Capítulo 5

Localización de los modos de las fluctuaciones

En lo que sigue, serán considerados de manera explícita los potenciales mecánico cuánticos asociados a las fluctuaciones que se obtienen en los dos rompimientos de simetría estudiados anteriormente. De esta forma será posible establecer si los modos se localizan o no en la pared de dominio.

Una inspección de los resultados obtenidos en ambos rompimientos indica que el comportamiento de las fluctuaciones es esencialmente el mismo. Las pequeñas diferencias entre las constantes que aparecen en la definición de los parámetros del potencial en cada caso, no genera diferencias sustanciales entre ambos rompimientos. Dado que se proponen las mismas funciones A y ϕ_m , el análisis del comportamiento se hará sólo una vez.

5.1 Modo tensorial

El potencial V_{QM} dado por (4.49) se muestra en la figura (5.1)

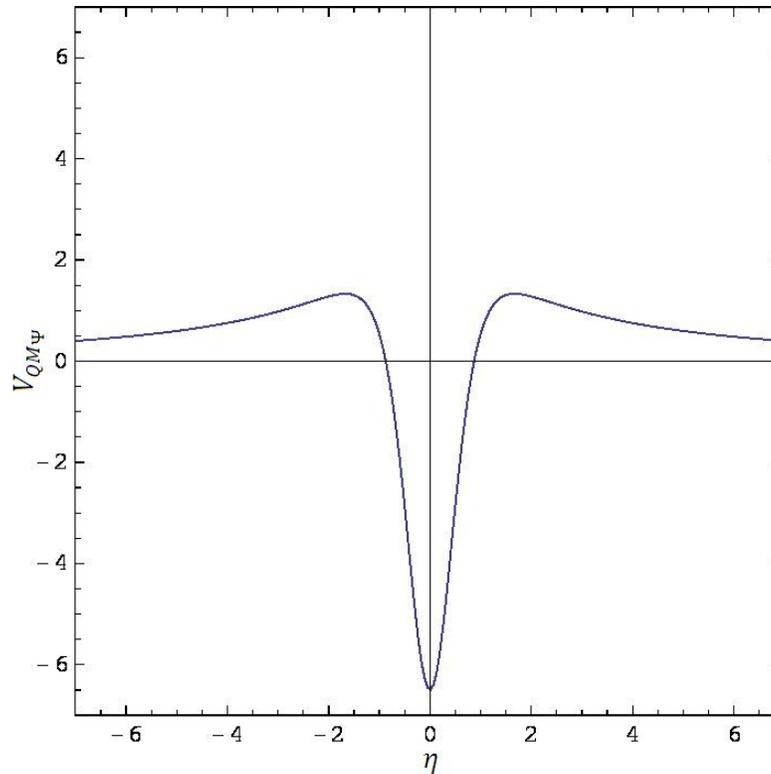


Figura 5.1: Potencial asociado al modo transversal y sin traza

Un potencial como el mostrado anteriormente puede dar lugar a estados ligados. Dado que estamos haciendo analogías con la mecánica cuántica al escribir ecuaciones tipo Schrödinger para este y los demás modos considerados, es conveniente pensar en partículas. De esta manera, en la figura 5.1 se observa claramente que el modo de masa 0 se encuentra en una región donde una partícula hipotética no podría escapar del pozo de potencial, quedando entonces confinada allí. Como ya es sabido, el modo de masa 0 de la ecuación asociada a la parte trasversal y sin traza de las fluctuaciones métricas es el responsable de la localización de la gravedad en la brana.

Dada la forma particular de V_{QM} , resulta fácil encontrar una expresión para

este modo 0, que se obtiene partiendo de la ecuación (4.48) y haciendo $m^2 = 0$.

Así:

$$(-\partial_\eta^2 + V_{QM})\Psi_0 = 0 \quad (5.1)$$

Usando el hecho de que V_{QM} puede escribirse como

$$V_{QM} = \left(e^{\frac{3}{2}A(\eta)}\right)'' e^{-\frac{3}{2}A(\eta)} \quad (5.2)$$

y sustituyendo (5.2) en (5.1) se obtiene una expresión para el modo 0:

$$\Psi_0(\eta) = N_0 e^{\frac{3}{2}A(\eta)} \quad (5.3)$$

donde la constante N_0 se obtiene al imponer que Ψ_0 sea integrable:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi_0|^2 dz = 1 \quad (5.4)$$

El gráfico de Ψ_0 se muestra en la figura (5.2):

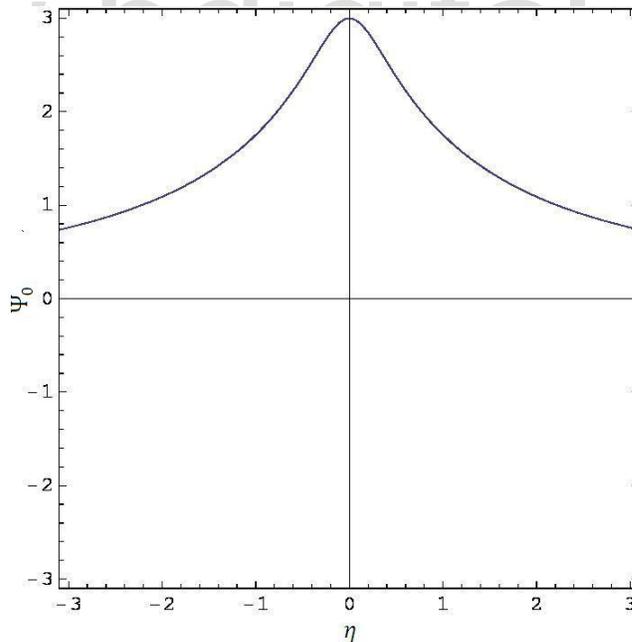


Figura 5.2: Modo 0 de las fluctuaciones tensoriales

La figura 5.2 indica que el modo 0 tiene su máximo en el origen y es allí donde se ubica la brana. Por lo tanto, y como se tenía predicho, la gravedad está localizada sobre la pared de dominio.

5.2 Primer modo escalar

Este modo está asociado a la variable Υ definida en (4.55). La gráfica del potencial $V_{QM\Upsilon}$ mostrado en (4.57) es la figura 5.3:

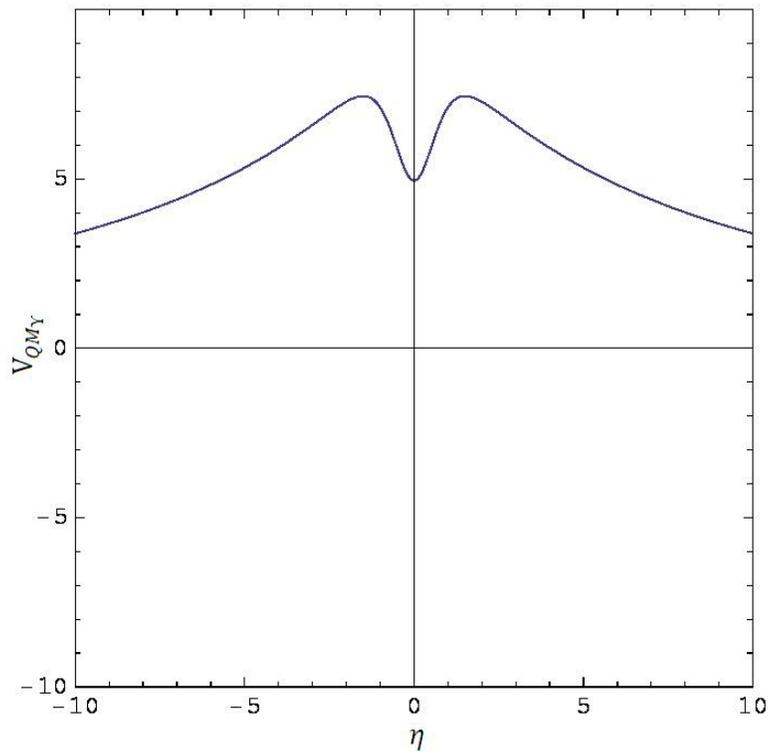


Figura 5.3: Potencial $V_{QM\Upsilon}$

Al seguir haciendo analogías con la mecánica cuántica, un potencial como el que se muestra en 5.3 no permite el confinamiento de partículas, aún cuando se observa un pequeño pozo. Se concluye entonces que este modo escalar no está localizado sobre la brana.

5.3 Segundo modo escalar

Como ya es sabido, de (4.39) se derivan dos casos distintos:

- $b = m$ (variable Ξ)

La gráfica del potencial mecánico cuántico correspondiente a este caso se muestra en la figura 5.4

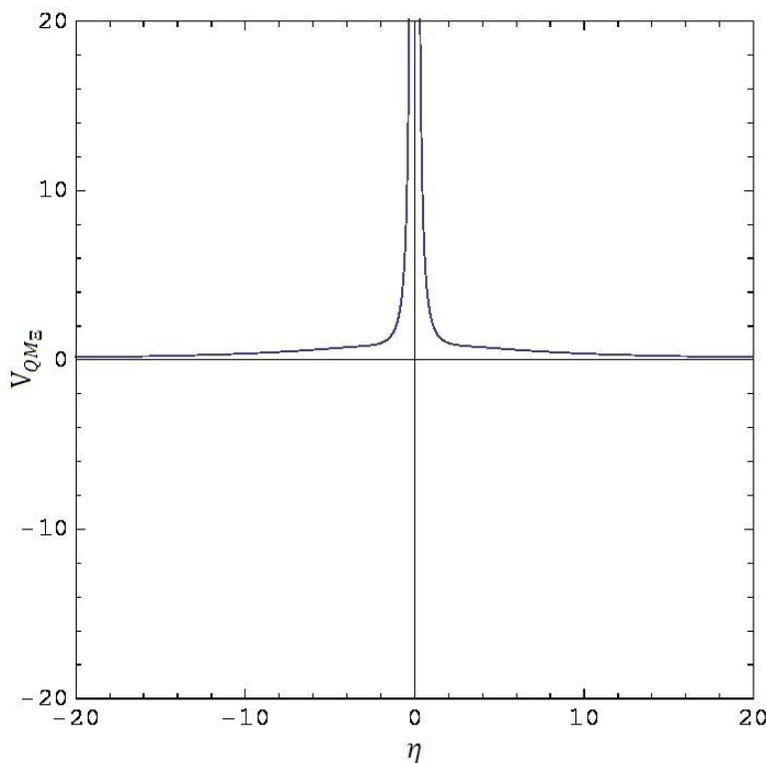


Figura 5.4: Potencial $V_{QM\Xi}$

Este potencial tampoco puede dar lugar a estados ligados, por lo que el campo Ξ asociado a la fluctuación del campo ϕ_m no se encuentra localizado sobre la pared.

- $b = p$ (variable $\overline{\chi_p}$)

Como ya se ha mencionado, el potencial correspondiente a este caso tiene idéntica forma que el potencial obtenido para la parte tensorial (sector transversal y sin traza), y por tanto los gráficos son también idénticos, como se evidencia en la figura 5.5:

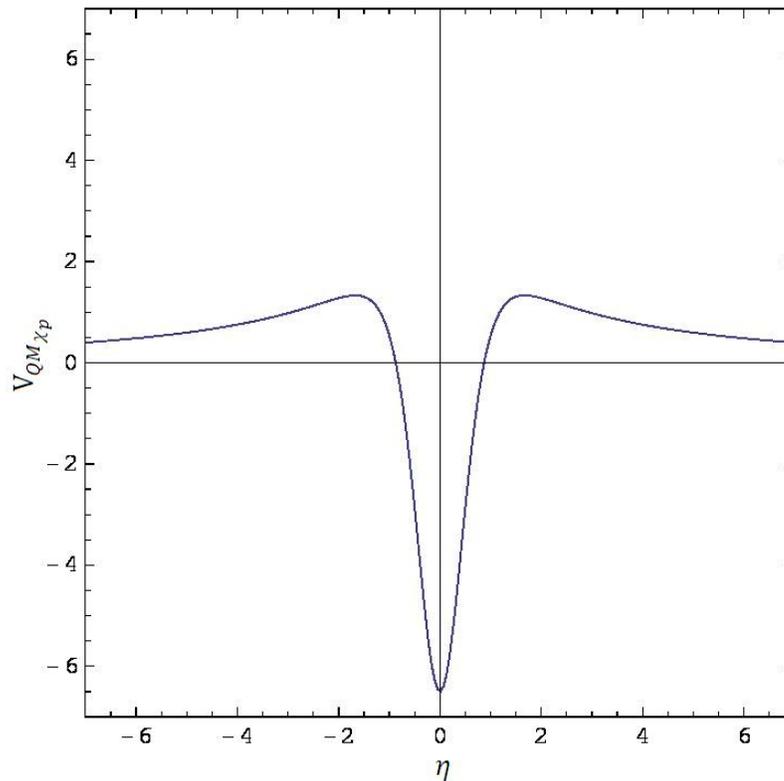
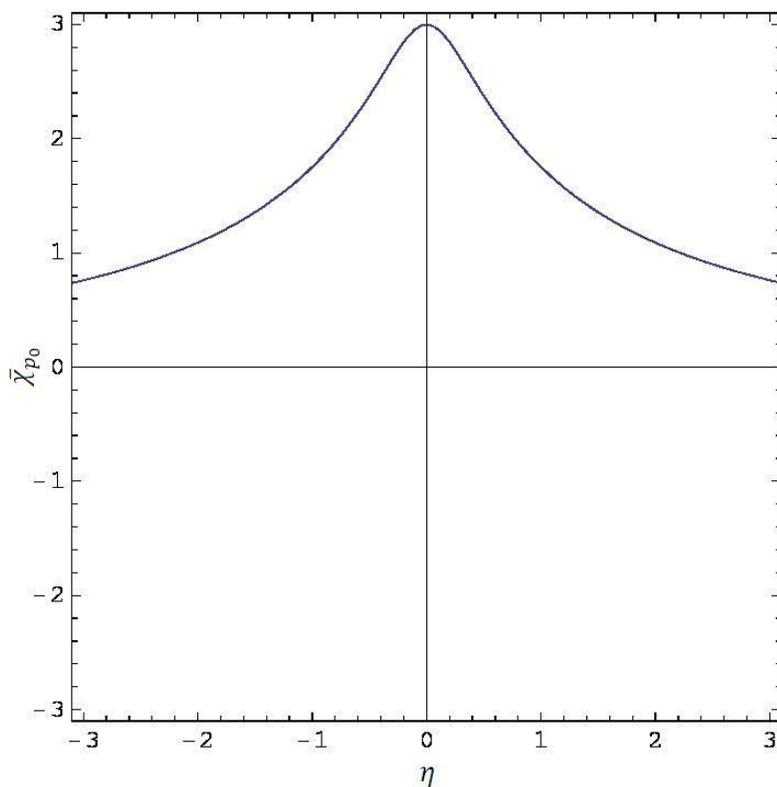


Figura 5.5: Potencial $V_{QM_{\chi_p}}$

Análogamente a lo expuesto para el caso de las fluctuaciones del sector tensorial de la métrica, la perturbación del campo constante ϕ_p , $\overline{\chi_p}$, tiene un modo 0 que permite establecer que dicha perturbación se localiza sobre la pared de dominio:

Figura 5.6: Modo 0 de la fluctuación $\overline{\chi_p}$

Es claro que la localización de esta fluctuación sobre la pared en realidad implica la localización de un campo escalar no abeliano. La presencia de este campo tiene efectos importantes sobre la fenomenología de la pared considerada como mundo brana.

www.bdigital.ula.ve

Capítulo 6

Conclusiones

Con miras a completar el estudio de las soluciones tipo pared de dominio a un sistema acoplado Einstein-campo de $SU(5)$ con un potencial de sexto orden [18] se ha hecho el análisis perturbativo de dicho sistema tomando como punto de partida las ecuaciones linealizadas de las fluctuaciones que se obtienen del sistema Einstein-campo escalar, con simetría abeliana y a primer orden. Pese que ambos sistemas son muy distintos, pueden usarse el hecho de que las ecuaciones linealizadas de las fluctuaciones son muy generales, y se pueden aplicar en la simetría no abeliana porque se impone que el potencial se desacople. Además, en ambos se utiliza el mismo tensor métrico g_{ab} y se propone el mismo tensor de perturbación h_{ab} . Por consiguiente, en la simetría $SU(5) \times Z_2$ se proponen esencialmente las mismas variables invariantes de calibre para proseguir con el estudio de localización de las fluctuaciones, después de haber especificado cuál es la escogencia de calibre adecuada y que en efecto elimina los grados de libertad no físicos.

Como se ha podido observar, la forma de las ecuaciones de los modos tienen básicamente la misma forma en el sistema escalar y en el sistema no abeliano, salvo por el hecho de que en este último existe un índice de simetría interno asociado a los dos campos escalares ϕ_m y ϕ_p , que bien denota suma sobre ambos campos, o etiqueta dos ecuaciones independientes, una para cada campo, como las que se derivan de la ecuación de Einstein para el potencial perturbado. Estas dos ecuaciones separadas son el resultado de imponer que el potencial debe desacoplarse, y de que sólo las fluctuaciones a lo largo de M y P son relevantes.

Igualmente, pudieron escribirse los distintos modos como ecuaciones tipo onda,

utilizando los cambios de variable propuestos en el caso de un campo escalar. De la forma de los potenciales mecánico cuánticos se pudo deducir si los campos asociados a las fluctuaciones se localizan o no sobre la brana, adjudicándole a dichos campos las propiedades de una partícula en mecánica cuántica para facilitar los análisis de los gráficos.

Como resultado principal de este trabajo, se demostró que una de las fluctuaciones escalares, específicamente la que está relacionada con la fluctuación del campo constante ϕ_p , llamado χ_p , se localiza sobre la pared, tal como se muestra en la figura (5.6) donde se observa el modo cero de dicha fluctuación con un máximo donde está ubicada la brana. Este resultado está en contraposición a lo que se deriva del estudio de perturbaciones donde el campo que genera la pared tiene simetría abeliana, donde ninguno de los modos escalares está confinado.

Sin embargo, hay que aclarar que la localización de un modo escalar sobre la pared no abeliana no implica necesariamente su inestabilidad. Este hecho sólo implica que el modelo, interpretado como mundo brana, puede tener una fenomenología interesante, toda vez que el campo escalar confinado debe dar lugar a una partícula compuesta sin color bajo $SU(5)$. La imposibilidad de observar estas partículas no indica necesariamente que no existan, sino que sus masas podrían estar fuera del alcance de medición de los aceleradores modernos, aunque esto no representa ninguna certeza.

Una forma mucho más precisa de definir la estabilidad o inestabilidad de la brana es conseguir una carga topológica asociada, pero esto no ha sido posible hasta ahora.

Una posible extensión a este trabajo consiste en justamente estudiar la posibilidad de asociarle al campo de $SU(5)$ una carga conservada. Otra posibilidad interesante es la de considerar una simetría de calibre distinta, tomando por ejemplo un campo de $SU(7)$, para realizar el análisis perturbativo correspondiente, o inclusive intentar un análisis similar para un grupo $SU(N)$ cualquiera.

Bibliografía

- [1] L. Randall, "Warped Passages", HarperCollins (2005).
- [2] V. Rubakov and M. Shaposhnikov, "Do we live inside a domain wall?", Phys. Lett. B 125, 136 (1983)
- [3] L. Randall and R. Sundrum, "A large mass hierarchy from a small extra dimension," Phys. Rev. Lett. 83, 3370 (1999) [arXiv:hep-ph/9905221].
- [4] L. Randall and R. Sundrum, "An alternative to compactification," Phys. Rev. Lett. 83 4690 (1999) [arXiv:hep-th/9906064]
- [5] R. Guerrero, A. Melfo and N. Pantoja, "Self-gravitating domain walls and the thin-wall limit," Phys. Rev. D 65, 125010 (2002) [arXiv:grqc/0202011].
- [6] N. Pantoja, A. Ramirez "New BPS Domain Wall Solutions," Rev. Mex. Fis. S52(3):85-87 (2006).
- [7] O.Castillo-Felisola,A. Melfo, N. .Pantoja and A. Ramirez, "Localizing gravity on exotic thick 3-branes," Phys.Rev.D 70,104029 (2004)[arXiv:hep-th/0404083].
- [8] C. Ringeval, P. Peter and J. P. Uzan, "Localization of massive fermions on the brane," Phys. Rev. D 65, 044016 (2002) [arXiv:hep-th/0109194].
- [9] R. Koley and S. Kar, "Scalar kinks and fermion localization in warped spacetimes," Class. Quant. Grav. 22, 753 (2005) [arXiv:hep-th/0407158].
- [10] A. Melfo, N. Pantoja and J. D. Tempo, "Fermion localization on thick branes," Phys. Rev. D 73, 044033 (2006) [arXiv:hep-th/0601161].
- [11] G. R. Dvali, G. Gabadadze and M. A. Shifman, "(Quasi)localized gauge fields on a brane: Dissipating cosmic radiation to extra dimensions?," Phys. Lett. B 497, 271 (2001) [arXiv:hep-th/0010071].

- [12] G. R. Dvali, G. Gabadadze and M. Porrati, "4-D gravity on a brane on 5-D Minkowski space," *Phys. Lett. B* 485, 208 (2000) [arXiv:hep-th/0005016].
- [13] A. Sampson, "Fluctuaciones de branas autogravitantes," Tesis de grado para obtener el Título de Licenciado en Física. Universidad de los Andes (2007)
- [14] M. Gremm, "Four-dimensional gravity on a thick domain wall," *Phys. Lett. B* 478, 434 (2000) [arXiv:hep-th/9912060].
- [15] O. DeWolfe, D. Z. Freedman, S. S. Gubser and A. Karch, "Modeling the fifth dimension with scalars and gravity," *Phys. Rev. D* 62, 046008 (2000) [arXiv:hep-th/9909134].
- [16] R. Wald. "General Relativity," The University of Chicago Press (1984)
- [17] T. Vachaspati, "A class of kinks in $SU(N) \times Z(2)$," *Phys. Rev. D* 63 (2001) 105010 [arXiv:hep-th/0102047].
- [18] J. Vázquez, "Pared de dominio autogravitante en $SU(5) \times Z_2$," Tesis de grado para obtener el Título de Licenciado en Física. Universidad de los Andes (2010)
- [19] M. Giovannini, "Localization of metric fluctuations on scalar branes," (2001) [arXiv:hep-th/010613]
- [20] M. Giovannini, "Gauge - invariant fluctuations of scalar branes," *Phys. Rev D* 64: 064023 (2001) [arXiv:hep-th/0106041]
- [21] N. Cheng, T. Rytov and R. Shrock, "Patterns of dynamical gauge symmetry breaking," (2010) [arXiv: hep-ph/1010.3736]
- [22] A. Melfo, R. Naranjo, N. Pantoja, A. Skirzewski and J. Vázquez, "Self-gravitating non-abelian kinks as brane worlds," *Phys.Rev. D* 84 (2011) 025015 [arXiv:hep-th /1104.4857]