



*Universidad de Los Andes*  
*Centro de Física Fundamental*  
*Area de Caos y Sistemas Complejos*

**Sociodinámica de opiniones  
discretas con umbral de interacción**

[www.bdigital.ula.ve](http://www.bdigital.ula.ve)

Trabajo de grado presentado ante la ilustre  
**Universidad de Los Andes**  
como requisito parcial para optar al Título de:  
**Licenciado en Física**

Presentado por:  
**Br. Karen P. Arias G.**

Tutor:  
**Dr. Mario Cosenza**

Mérida, Noviembre 2016

[www.bdigital.ula.ve](http://www.bdigital.ula.ve)

*A mi familia, que me llena de luz.*

[www.bdigital.ula.ve](http://www.bdigital.ula.ve)

Reconocimiento-No comercial-Compartir igual

*“Quiero decir que para mí, no hay ningún punto sobre el cual flotar. Quiero decir que para mí, eres el centro de mi compás.”*

Charliepapa y Gilberto Rebolledo

[www.bdigital.ula.ve](http://www.bdigital.ula.ve)

Reconocimiento-No comercial-Compartir igual

# Resumen

Presentamos un modelo sociodinámico de opiniones valoradas discretas con un parámetro de umbral o condición para las interacciones entre agentes. En el contexto de sistemas sociales, este parámetro de umbral puede interpretarse como el grado de tolerancia para la interacción que poseen los agentes del sistema. Investigamos el comportamiento colectivo del sistema como función del umbral de interacción y de la topología de la red de conectividad subyacente entre los agentes. En redes con interacciones locales, que incluyen redes bidimensionales, redes de pequeño mundo, redes aleatorias y redes fractales, hemos encontrado una transición de fase, desde un estado colectivo de diversidad o desorden para valores del umbral menores que un cierto valor crítico, hacia un estado colectivo con una opinión mayoritaria para valores del umbral mayores que el valor crítico. Esta transición de fase no ocurre en redes globales. Adicionalmente, investigamos el comportamiento colectivo de redes con acoplamiento local y global sujetas a un campo externo, que puede interpretarse como una propaganda o un mensaje de medios de comunicación masivos. En el caso de red local, el sistema exhibe tres fases que dependen del umbral de interacción y de la intensidad del campo externo: (i) una fase desordenada con diversidad de opiniones; (ii) una fase ordenada mayoritaria en un estado diferente del estado del campo; y (iii) una fase ordenada mayoritaria impuesta por el campo. En una red global, solamente emergen las fases (ii) y (iii).

# Agradecimientos

Al Profesor Mario Cosenza, que no sólo ha sido mi profesor favorito en la vida, sino que me dio la dicha y el honor de ser su tesista y estudiante. Gracias Profesor, por enseñarme tanto de la Física como lecciones de vida que nunca olvidaré.

Al Profesor Kay Tucci, que me presentó el maravilloso mundo de la programación, el cual se convirtió en uno de mis más grandes amores en la vida. Al Profe, que también compartió sus interesantes puntos de vista que sólo un *World Class Programmer* puede tener.

A los caóticos, que me han brindado su valioso apoyo. A Víctor Márquez, que me ha enseñado la calidez del grupo y el legado que significa pertenecer al grupo de Caos y Sistemas Complejos, donde todo logro es un fenómeno colectivo. A los muchachos Víctor Avella, Alejandro, Eyisto y Marino por brindarme su apoyo y amistad.

A mi familia, que me apoya incondicionalmente. Una victoria de uno de nosotros se convierte en una victoria colectiva. A mi Mamá, que la amo con todo mi corazón. A mi Papá, que amo tanto que la paciencia puede con todo. A mis hermanos Anthony y Rafaelito que me divierten, y con los cuales puedo hablar de cualquier cosa. A mi hermana Doly, que la amo inmensamente y a Jose David que gracias a ellos tengo a mis dos sobrinos David y Oscar, mis dos personas más favoritas en todo el mundo y de quienes he estado enamorada desde que los conocí. A Daniela, que no sólo es mi amiga sino parte de mi familia, la cual me ha acompañado en el trabajo de esta tesis en largas horas de la noche brindándome su apoyo.

A Rolando, por brindarme todo su apoyo y compañía en el desarrollo de esta tesis. *We are a team*. Su amor y cariño estarán conmigo por siempre.

A Adriana, por ser como una hermana para mí. A Reinaldo, por ser un excelente amigo. A los dos, gracias por estar conmigo siempre y brindarme su apoyo.

# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>I</b>
<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Principales modelos de formación de opinión en dinámica social</b>	<b>5</b>
1.1. Modelo cultural de Axelrod . . . . .	5
1.2. Modelo de Deffuant et al. . . . .	8
<b>2. Modelo de opinión discreta valorada</b>	<b>11</b>
2.1. Escala de Likert . . . . .	12
2.2. Presentación del modelo . . . . .	13
2.3. Formulación del modelo . . . . .	14
2.4. Caracterización del comportamiento colectivo . . . . .	15
<b>3. Dinámica de opinión valorada con interacciones locales</b>	<b>16</b>
3.1. Red bidimensional con vecindad de Von Neumann . . . . .	16
3.2. Red de pequeño mundo . . . . .	20
3.3. Red aleatoria de Erdős-Rényi . . . . .	23
3.4. Red aleatoria tipo $\delta$ . . . . .	24
3.5. Redes fractales . . . . .	25
3.6. Comparación de redes con $k = 4$ vecinos . . . . .	27
<b>4. Dinámica de opinión valorada con interacciones globales</b>	<b>29</b>
4.1. Red Global . . . . .	29
4.2. Influencia del rango de interacción y de la probabilidad de recableado	32
4.2.1. Red de pequeño mundo para $p = 0$ y $k$ variable . . . . .	32

4.2.2. Red de pequeño mundo con diferentes recableados . . . . .	33
4.3. Redes aleatorias con $k$ variable . . . . .	35
4.3.1. Red Aleatoria de Erdős-Rényi . . . . .	35
<b>5. Influencia de campos externos o medios masivos</b>	<b>37</b>
5.1. Dinámica de opiniones valoradas con campo externo . . . . .	37
5.2. Red bidimensional con vecindad de Von Neumann sujeta a campo externo . . . . .	38
5.3. Red global con influencia de un campo externo . . . . .	42
<b>Conclusiones</b>	<b>45</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>48</b>

www.bdigital.ula.ve

*“El azar no es más que la medida de la ignorancia del hombre.”*

Henri Poincaré

## Introducción

Hacia finales del siglo pasado, la Física alcanzó una comprensión técnica y experimental exitosa del fenómeno de caos: la sensibilidad extrema de la evolución de sistemas dinámicos deterministas ante perturbaciones infinitesimales de sus condiciones iniciales. El descubrimiento del caos en la Naturaleza y de las propiedades universales de este fenómeno han sentado las bases para el surgimiento de un punto de vista global, constructivista y holístico para el estudio de sistemas dinámicos extendidos, los cuales son capaces de manifestar comportamientos colectivos no triviales. La investigación de los sistemas dinámicos plantean interrogantes que provienen de problemas relacionados con disciplinas aparentemente inconexas.

Desde los comienzos del presente siglo, el estudio de la auto-organización colectiva, tanto espacial como temporal, en sistemas de elementos dinámicos no lineales interactivos ha atraído gran interés por parte de la comunidad científica. Fenómenos como la sincronización, formación de patrones, auto-organización, patrones espaciales, oscilaciones colectivas, ondas espirales, segregación y diferenciación, formación y crecimiento de dominios y de interfases, etc., son ejemplos de procesos cuyos comportamientos, en general, no son triviales. Estos presentan características universales, las cuales no pueden derivarse mediante consideraciones estadísticas. Este tipo de procesos se hacen presentes en sistemas físicos, biológicos, químicos, sociales, económicos, etc.

Los sistemas complejos [1, 2, 3] son conjuntos de elementos interactivos cuyo comportamiento colectivo no está presente en los elementos aislados; emerge de las interacciones entre ellos. Las propiedades colectivas de estos sistemas no son

susceptibles de ser derivados trivialmente a partir del análisis de sus elementos constituyentes. La no linealidad, la interdependencia, la adaptación y la emergencia componen parte de las propiedades que presentan los sistemas complejos. Sistemas tan diferentes como la World Wide Web, Internet, redes de telecomunicaciones, propagación de epidemias y de virus informáticos, dinámicas de grupos sociales, corporaciones económicas, redes de distribución de bienes y servicios, colonias de insectos, flujos metabólicos en células, neuronas en el cerebro, sistemas físicos, fisiológicos, evolutivos, etc., presentan propiedades similares como sincronización, formación de patrones, auto-organización, transición orden-desorden y redes de conectividad; que son características de un sistema complejo. El estudio de este tipo de sistemas ha revelado la existencia de redes de conexiones y de propagación de información [4, 5].

Entre las aplicaciones recientes de los conceptos de sistemas complejos encontramos el estudio del comportamiento de los sistemas sociales. Este campo de estudio se ha denominado *Sociodinámica* o *Sociofísica*. En los sistemas sociales existen estructuras colectivas que emergen de las interacciones entre los agentes del sistema. De esta forma, comportamientos emergentes como competencia y cooperación, estructura y dinámica de redes sociales, consenso, polarización, globalización, multiculturalidad, propagación de información, propagación de epidemias, influencias externas como medios masivos y formación de opinión, pueden ser estudiados mediante técnicas de Física Estadística [6], Caos, Sistemas Complejos y Redes.

En particular, la Sociofísica ha tenido mucho interés en el estudio de modelos de formación de opinión. En este contexto, el trabajo del destacado sociólogo Robert Axelrod, de la Universidad de Michigan, ha recibido mucha atención en las revistas de Física. En 1999, Axelrod presentó un modelo de diseminación cultural [7] en el cual estudia el fenómeno de homofilia y la persistencia de la diversidad a medida que los agentes sociales interactúan entre sí [4, 8, 9, 10, 11, 12]. Otro modelo de dinámica de opiniones que ha suscitado enorme interés, es el modelo de Deffuant et al. [13], el cual estudia la interacción entre agentes mediante una condición de confianza limitada. Ambos modelos han dado lugar a una gran cantidad de aplicaciones y variaciones [14, 15, 16].

El modelo que investigamos y extendemos en esta Tesis consiste en una combinación de las ideas principales de los modelos de Axelrod y de Deffuant et al. [17] La motivación de nuestro modelo proviene de la observación de los métodos de va-

loración que emplean muchas empresas que realizan encuestas de opinión, como la escala de Likert, o páginas web de comercio electrónico como Amazon, Ebay, Mercado libre, etc.. Estas empresas con frecuencia solicitan a sus clientes responder cuestionarios sobre la calidad o satisfacción de un producto o servicio, con el fin de mostrar los productos populares, relevantes, etc. Este tipo de procesos también es realizado por compañías de automóviles, compañías de telefonía móvil, cadenas de restaurantes, instituciones bancarias, etc.. A menudo también, empresas de medios masivos de comunicación transmiten mensajes o propaganda que tratan de favorecer una determinada opción en la valoración de un producto o servicio.

En esta Tesis presentamos un modelo sociodinámico de opiniones valoradas discretas con un umbral o condición para las interacciones entre agentes. Nuestro modelo es conceptual y computacionalmente simple, por cuanto su dinámica depende tan sólo de un parámetro que mide el umbral para la interacción. En el contexto de sistemas sociales, este parámetro de umbral puede interpretarse como el grado de tolerancia para la interacción que poseen los agentes del sistema.

*Nuestro objetivo es investigar el comportamiento colectivo del sistema como función del umbral de interacción y de la topología de la red de conectividad subyacente entre los agentes del sistema. Adicionalmente, investigamos el comportamiento del sistema en presencia de una influencia externa que puede interpretarse como una propaganda o un mensaje de medios de comunicación masivos.*

En el Capítulo 1 hacemos una revisión del modelo de diseminación cultural de Axelrod y del modelo de Deffuant et al.. Este capítulo provee los conceptos principales que utilizamos en la construcción de nuestro modelo.

El Capítulo 2 contiene la descripción de nuestro modelo de opinión discreta valorada y las definiciones de las cantidades estadísticas que utilizamos para caracterizar el comportamiento colectivo del sistema.

En el Capítulo 3 estudiamos el modelo definido en redes con interacciones locales, las cuales incluyen la red bidimensional con vecindad de Von Neumann, red de pequeño mundo, red aleatoria de Erdős-Rényi, red aleatoria de tipo  $\delta$  y redes fractales.

Con el fin de investigar el rol de la topología de la red en el comportamiento colectivo, en el Capítulo 4 investigamos el modelo de opinión valorada en redes con interacciones globales.

El Capítulo 5 presenta nuestra investigación de la influencia de campos externos o medios masivos en el comportamiento colectivo de un sistema con opiniones discretas valoradas.

Finalmente, los resultados e implicaciones de este trabajo se discuten en las Conclusiones.

[www.bdigital.ula.ve](http://www.bdigital.ula.ve)

*“My third try was the Journal of Conflict Resolution, known for its interdisciplinary range. This time the review was completely positive... The moral of the story, I suppose, is that persistence pays.”*  
Robert Axelrod, *The Complexity of Cooperation*.

# Capítulo 1

## Principales modelos de formación de opinión en dinámica social

www.bdigital.ula.ve

### 1.1. Modelo cultural de Axelrod

El modelo cultural de Axelrod fue presentado en un artículo publicado en 1997 [7] y ha sido aceptado de forma exitosa tanto por los científicos de ciencias sociales como por los físicos. Su gran éxito se debe a la unión que el modelo ejerce sobre dos aspectos muy relevantes en las ciencias sociales con respecto al entendimiento de la diversidad; estos dos temas son la homofilia y la influencia social [14].

Axelrod comienza ese artículo con la siguiente pregunta:

“If people tend to become more alike in their beliefs, attitudes and behavior when they interact, why do not all differences eventually disappear?” [7]

Axelrod muestra que, a pesar de la tendencia a tratar de parecernos unos a otros (homofilia), la consecuencia de ésta acción puede conducir a la segregación social,

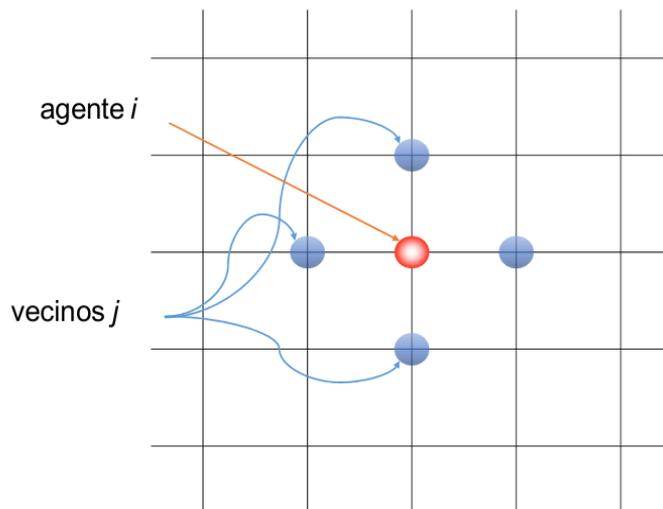
ya que a medida que una persona comienza a parecerse a su vecino, también se diferencia más de otro vecino, causando segregación [19].

Según Axelrod, cultura es todo aquello susceptible de ser modificado por interacción social. Además, Axelrod no establece juicio de valor sobre distintas opciones culturales; todos los estados culturales son equivalentes.

Consideremos un sistema que consiste en  $N$  agentes colocados en una red cuadrada con condiciones de contorno no periódicas y vecindad de Von Neumann; es decir, cada agente posee cuatro vecinos. El estado cultural  $x_i$  de un agente  $i$  es definido con un vector de  $F$  componentes  $x_i = (\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \sigma_{i3}, \dots, \sigma_{iF})$ , cada componente se denomina un atributo cultural. Cada atributo  $\sigma_{iF}$  puede tomar valores del conjunto  $\{0, 1, 2, \dots, q-1\}$ , donde  $q$  es la cantidad de opciones que puede tener un atributo, de modo que existen  $q^F$  combinaciones de vectores culturales.

La interacción ocurre entre agentes vecinos. La probabilidad de interacción entre dos agentes  $i$  y  $j$  es proporcional al número de atributos culturales que comparten sus vectores de estado. Luego, la probabilidad de interacción corresponde a

$$p_{ij} = \frac{\text{atributos compartidos } x_i \ x_j}{F} \quad (1.1)$$



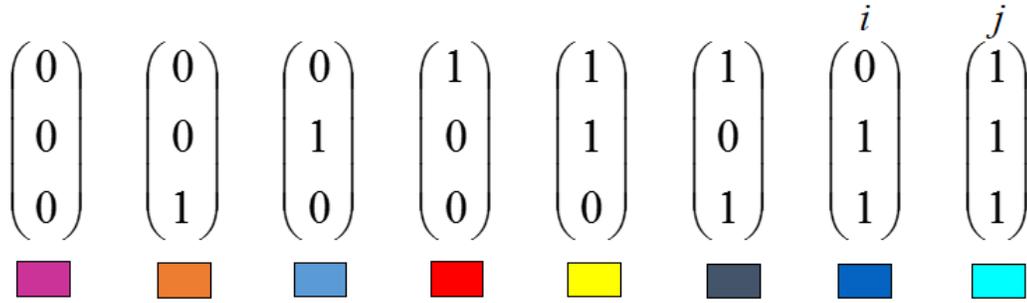
**Figura 1.1:** Red cuadrada. El agente  $i$  posee  $j=4$  vecinos.

Como condición inicial, se asigna a cada agente un vector a partir de una distribución aleatoria y uniforme de los  $q^F$  vectores de estado del sistema. La dinámica del sistema se define mediante la iteración del siguiente algoritmo:

1. Se seleccionan aleatoriamente un agente  $i$  y uno de sus vecinos  $j$ .
2. Se calcula la probabilidad de interacción o el overlap entre  $i$  y  $j$ .

$$p(i, j) = \frac{\sum_{f=1}^F \delta_{\sigma_{if}, \sigma_{jf}}}{F} \quad (1.2)$$

3. Si la probabilidad  $0 < p_{ij} < 1$ , entonces  $x_i$  adopta un atributo no compartido de  $x_j$ .



**Figura 1.2:** Estados culturales con parámetros  $F = 3$  y  $q = 2$ .

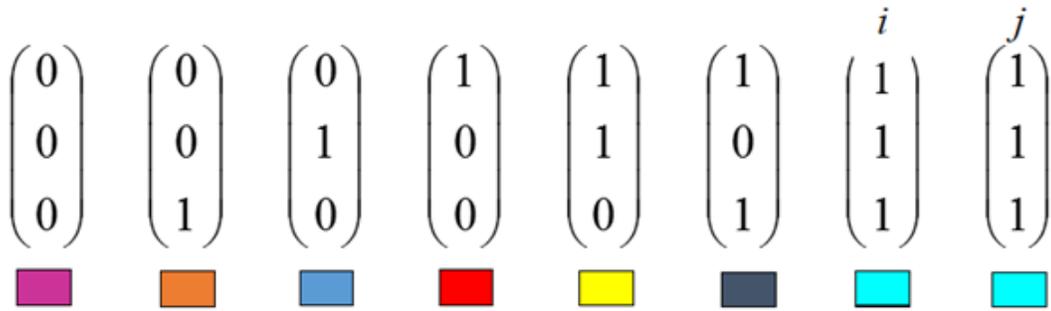
Cada vector puede ser distinguido por un código de colores.

Ahora, podemos asignarle un significado a los atributos.

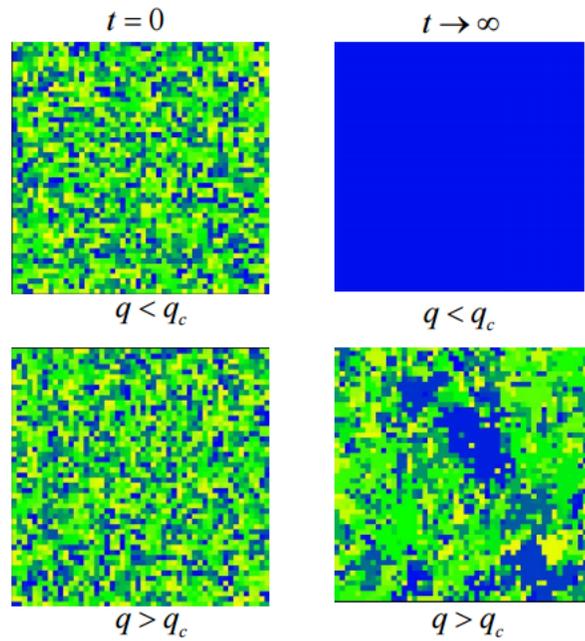
*Idioma* : (0)*Espanol* (1)*Inglés*  
*Helado* : (0)*Mantecado* (1)*Chocolate*  
*Comida* : (0)*Arepas* (1)*Pan*

De modo que, si la interacción entre los agentes  $i$  y  $j$  seleccionados ocurre, el nuevo vector cultural de  $i$  vendría dado de la siguiente manera:

La dinámica del sistema conduce a un estado estacionario donde cesan las interacciones entre los agentes. EL estado colectivo del sistema se puede caracterizar mediante el tamaño del dominio más grande. Se define como dominio un conjunto de agentes contiguos que comparten un mismo estado. Se encuentra que, para valores de  $q$  menores que un cierto valor crítico, el sistema alcanza un estado homogéneo, donde todos los agentes comparten el mismo vector cultural; mientras que para valores de  $q$  mayores que el valor crítico, el sistema se segrega en múltiples dominios [10].



**Figura 1.3:** Estados culturales con parámetros  $F = 3$  y  $q = 2$  después de haber sucedido la interacción.



**Figura 1.4:** Visualización de la dinámica de Axelrod para  $q < q_c$  y  $q > q_c$ .

La Figura (1.4) permite responder la pregunta inicial de Axelrod: la diversidad persiste si existe un número suficiente de opciones  $q$  para los atributos culturales.

## 1.2. Modelo de Deffuant et al.

El modelo de Deffuant et al. [13] explora el caso en que el estado de opinión de un agente, en lugar de tener múltiples atributos como en el modelo de Axelrod, posee uno solo. En tal sentido, se trata de un modelo escalar. Por otro lado, el

atributo puede tomar valores continuos en vez de discretos. A diferencia del modelo de Axelrod que requiere una probabilidad para que haya interacción, el modelo de Deffuant et al. establece una condición simple de umbral: si la diferencia entre las opiniones de los agentes es menor que un cierto valor umbral, entonces las opiniones de los agentes tienden a converger a un valor intermedio. Una manera de interpretar socialmente el modelo de Deffuant et al. es la siguiente: si dos agentes discuten de un tema y son razonables, entonces la discusión puede llegar a un punto de acuerdo. Los acuerdos sociales usualmente son conclusiones que contienen la conformidad de los agentes que hayan participado en la discusión. El modelo muestra que, si la condición para la interacción se cumple, entonces los agentes pueden llegar a un acuerdo.

El sistema consiste en  $N$  agentes colocados como nodos en una red. El estado  $x_i^t \in [0, 1]$  corresponde al agente  $i$  en el tiempo  $t$ . La interacción entre un agente  $i$  y uno de sus vecinos  $j$  depende del parámetro  $u$  que es el umbral para la interacción.

Inicialmente, al estado de cada agente se le asigna un valor aleatorio en el intervalo  $[0, 1]$ . El sistema evoluciona según el siguiente algoritmo iterativo:

1. Se selecciona aleatoriamente el agente  $i$  y un vecino  $j$  en la iteración  $t$ .
2. Se calcula  $|x_i^t - x_j^t|$

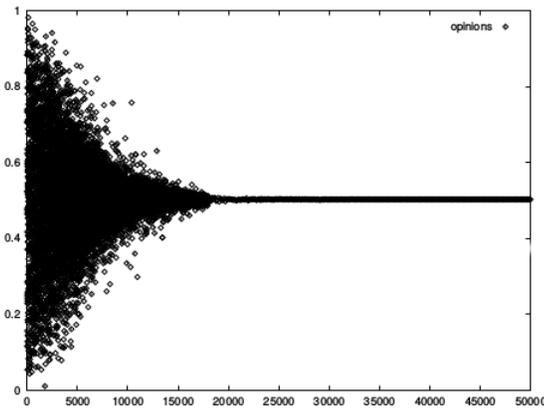
a) Si  $|x_i^t - x_j^t| \leq u$ , entonces

$$x_i^{t+1} \leftarrow x_i^t + \gamma(x_j^t - x_i^t) \quad (1.3)$$

$$x_j^{t+1} \leftarrow x_j^t + \gamma(x_i^t - x_j^t) \quad (1.4)$$

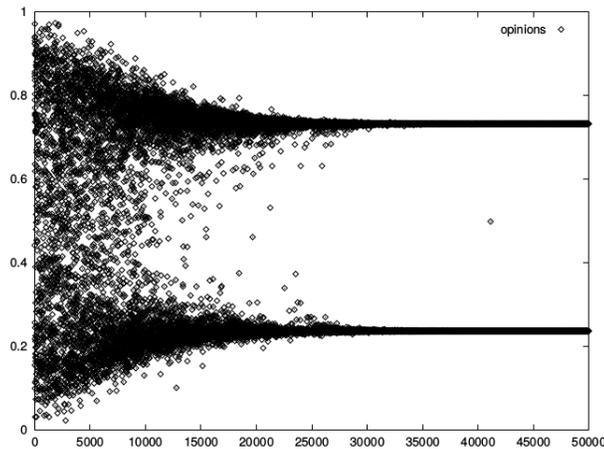
b) Si  $|x_i^t - x_j^t| > u$  no sucede nada.

En las Ecuaciones (1.3) y (1.4), aparece el parámetro  $\gamma$  que expresa la tasa de convergencia de las opiniones. El parámetro normalmente es usado con valores  $\gamma = 0$  ó  $\gamma = 0,5$ , donde este último se puede interpretar de manera que los agentes llegan a un acuerdo medio.



**Figura 1.5:** Opiniones en el transcurso del tiempo con  $d = 0,5$ ,  $u = 0,5$  y  $N = 2000$  [13].

Retomando el ejemplo social, se asume que las personas discuten y llegan a un acuerdo. Los estados de las personas corresponden a los valores  $x_i$ ; es decir, se trata de opiniones valoradas. En la Figura (1.5) se aprecia como los agentes llegan a un consenso a medida que transcurre el tiempo; es decir, las agentes llegan a compartir la misma opinión. En la Figura (1.6) los agentes se dividen en dos grupos; a diferencia de la Figura (1.5) el umbral de interacción es más pequeño, así que una vez alcanzadas éstas dos opiniones, los agentes no pueden interactuar entre sí.



**Figura 1.6:** Opiniones en el transcurso del tiempo con  $d = 0,2$ ,  $u = 0,5$  y  $N = 2000$  [13].

*“Hay dos cosas que deben ocurrir para que las nuevas tecnologías sean costeables para un uso masivo. La primera son las economías de escala. La otra es la necesidad de revisar constantemente el diseño. Es necesario tener diferentes versiones“.*

Elon Musk

## Capítulo 2

### Modelo de opinión discreta valorada

Muchas páginas web de comercio electrónico, como Amazon, Ebay, Best Buy, Mercado Libre, entre otras, solicitan al cliente que suministre su opinión del producto comprado, de esta forma los comercios electrónicos crean una base de datos. La base de datos funciona para calcular el puntaje promedio que otorgan los clientes a los productos. De esta forma, los comercios electrónicos pueden resaltar los productos preferidos y los menos populares.

Existen otros tipos de empresas que realizan pruebas de valoración con respecto a un producto o servicio, por ejemplo encontramos páginas web que muestran el puntaje promedio asignado a una película por el público. Las personas normalmente desean saber si una película es buena antes de verla; la forma eficiente de saberlo es revisando la valoración que tenga, y para conocer éste valor existen múltiples páginas webs encargadas de recaudar la opinión valorada de diferentes personas y mostrar el puntaje promedio de una película. Esto no sólo aplica para páginas de base de datos de películas como IMDB (Internet Movie Database), sino también existen compañías que realizan cuestionarios preguntando tanto el desempeño de un producto como la calidad de un servicio. Esto lo hacen compañías de automóviles,



Badgley Mischka Women's  
Jeannie Pump  
★★★★☆ 57  
\$90.00 - \$338.00

**Figura 2.1:** Producto presentado en la página de comercio electrónico Amazon.

compañías de telefonía móvil, cadenas de restaurantes, instituciones bancarias, etc. Es de esperarse que, si una compañía desea mejorar, necesita realizar pruebas de valoración para conocer las preferencias de la clientela.

Éstos cuestionarios de valoración tienden a tener respuestas discretas. Es inusual que una compañía realice una prueba valorada con un rango del 1 al 5 y permita valores como 2.1, 2.01, 2.001, 2.0001 y así sucesivamente, ya que es confuso diferenciar opiniones que tengan una distancia tan pequeña entre ellas. De forma que generalmente las pruebas de valoración son realizadas con opciones discretas para poder analizar de forma óptima los datos obtenidos.

## 2.1. Escala de Likert

El psicólogo Rensis Likert diseñó en 1932 una escala psicométrica que consiste en la suma de los valores discretos de las respuestas de un cuestionario. La escala contiene los llamados elementos de tipo Likert que están constituidos por la pregunta/declaración acompañada por una escala visual. Hoy en día el formato de la escala de Likert es utilizado para la realización de cuestionarios o encuestas por compañías y corporaciones. Los elementos de tipo Likert se construyen bajo las siguientes reglas [20]:

- Los enunciados deben ser declaraciones o preguntas que se puedan responder

como “estoy de acuerdo” o “estoy en desacuerdo”.

- Las respuestas deben poseer un número impar de opciones; usualmente varían entre 5, 7 y 9 opciones. De esta forma, la prueba es simétrica y permite al usuario tener la opción de neutralidad.
- Los valores de las respuestas deben crecer en forma jerárquica.
- Los extremos de los valores de las respuestas tienen que ser opuestos equitativos; tales como “Estoy completamente de acuerdo” y “Estoy completamente en desacuerdo”

Un ejemplo de un elemento de Likert sería el de la Figura (2.2):

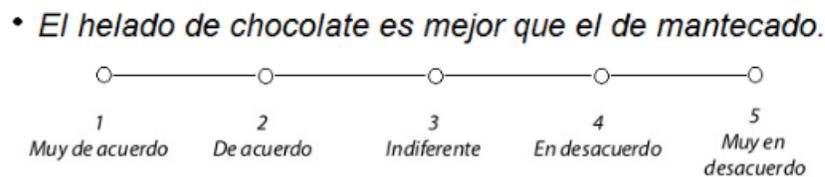


Figura 2.2: Ejemplo de un elemento de tipo Likert.

Podemos considerar la escala de Likert como un sistema de opiniones discretas valoradas que sirve de motivación para el modelo que presentamos a continuación.

## 2.2. Presentación del modelo

Proponemos un modelo de opinión basado en una combinación del modelo de Deffuant et al. y el modelo de Axelrod. Del modelo de Axelrod tomamos en cuenta que ahora  $F = 1$  y que las opciones de los atributos corresponden a números enteros consecutivos. La interacción ocurre dependiendo de un parámetro  $u$  que es el umbral de interacción, justo como en el modelo de Deffuant.

Como ejemplo, consideremos una degustación de helados en una heladería. La heladería está interesada en conocer la opinión de los participantes con respecto a un nuevo helado de mantecado. Las respuestas posibles se presentan a los clientes como un elemento de Likert. A medida que se realiza la degustación, se nota que los

participantes que encuentran el helado muy rico están en un mismo grupo, y que los participantes que no lo encuentran tan apetecible se encuentran segregados en otro grupo. Supongamos que al día siguiente se realiza la misma degustación de helados con una diferente clientela. Ahora se observa que la calificación del helado no es tan polémica como el día anterior; los grupos están mezclados, clientes que no les gusta el helado están interactuando con personas que sí les gusta. Esto indica que debe haber un grado de tolerancia diferente entre los agentes para ambos días. En nuestro modelo tratamos de medir cuantitativamente ese grado de tolerancia mediante un parámetro que denominamos umbral de interacción.

### 2.3. Formulación del modelo

El sistema consiste en  $N$  agentes colocados en una red. El estado  $x_i^t$  es la opinión valorada que corresponde al agente  $i$ . El estado de cada elemento puede tomar cualquiera de los  $Q$  valores enteros del conjunto  $\{1, 2, 3, \dots, Q\}$ , donde  $Q$  es la valoración máxima de las opiniones.

Inicialmente, al estado de cada agente se le asigna un valor aleatorio en el conjunto  $\{1, 2, 3, \dots, Q\}$ . El sistema evoluciona según el siguiente algoritmo iterativo:

1. Se selecciona aleatoriamente el agente  $i$  y uno de sus vecinos  $j$  en la iteración  $t$ .
2. Se calcula  $|x_i^t - x_j^t|$ 
  - a) Si  $|x_i^t - x_j^t| \leq u$ , entonces  $x_i^{t+1} \leftarrow x_j^t$ .
  - b) Si  $|x_i^t - x_j^t| > u$ , no sucede nada.

Introducimos el parámetro  $u$  como umbral de interacción. El umbral  $u$  puede tomar valores del conjunto  $\{1, 2, 3, 4, \dots, Q\}$ . El parámetro  $u$  se puede interpretar como el grado de tolerancia que poseen los agentes del sistema para interactuar entre sí. En este trabajo asumimos el umbral de tolerancia como homogéneo; es decir, es el mismo para todos los agentes.

## 2.4. Caracterización del comportamiento colectivo

La dinámica de opinión definida anteriormente corresponde a una dinámica absorbente; es decir, el número de estados presentes en el espacio de fase del sistema tiende a reducirse a medida que el sistema evoluciona, en otras palabras, el sistema es disipativo. La dinámica de copia implica la reducción en el número de estados del sistema en el tiempo.

En este tipo de sistemas se alcanza un estado final estacionario en un tiempo finito. Para caracterizar el comportamiento colectivo del sistema en su estado estacionario, introducimos como parámetro de orden estadístico el tamaño normalizado (dividido por  $N$ ) del dominio más grande en el sistema, que denotamos  $S$ . Definimos dominio como un conjunto de agentes conectados que poseen un mismo estado. Exploramos el comportamiento colectivo mediante el cálculo de la cantidad  $S$  a medida que se varía el parámetro de umbral  $u$ .

El parámetro de orden  $S$  caracteriza la presencia de diversidad de grupos de opinión o el consenso en el sistema. Cuando  $S \rightarrow 0$ , no existe un dominio mayoritario, sino muchos grupos pequeños, lo cual revela la existencia de diversidad de opiniones en el sistema. Por otro lado,  $S \rightarrow 1$  caracteriza la existencia de un sistema de opinión homogéneo en el sistema. La presencia de un grupo mayoritario (mayoría simple) corresponde a  $S > 0,5$ .

*“I’ll have what she’s having.”*

De la película *When Harry met Sally*.

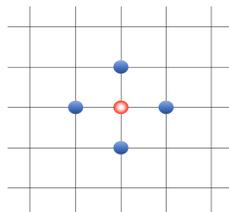
## Capítulo 3

# Dinámica de opinión valorada con interacciones locales

En este capítulo estudiaremos el comportamiento colectivo de un sistema con dinámica de opinión valorada definido sobre redes con interacciones locales; i.e., interacciones entre vecinos cercanos.

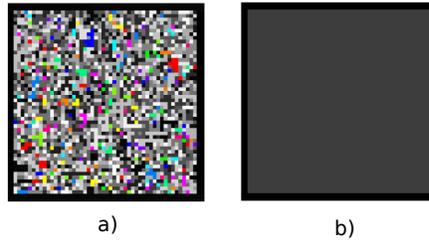
### 3.1. Red bidimensional con vecindad de Von Neumann

La Figura (3.1) muestra una red bidimensional con vecindad de Von Neumann [21]; es decir, cada agente posee cuatro vecinos.



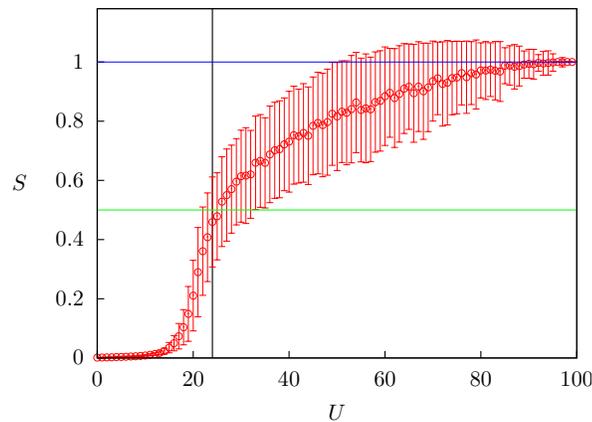
**Figura 3.1:** Red bidimensional con vecindad de Von Neumann. El nodo rojo es el agente seleccionado de la dinámica y los nodos azules son los vecinos.

Para ilustrar el comportamiento de un sistema definido en una red bidimensional con vecindad de Von Neumann con una dinámica de opiniones valoradas, la Figura (3.2) muestra los patrones espaciotemporales resultantes de la evolución de esta dinámica para diferentes valores del umbral  $U$ .



**Figura 3.2:** Visualización de la dinámica del modelo para  $t \rightarrow \infty$  a)  $U < U_c$  y b)  $U > U_c$ .

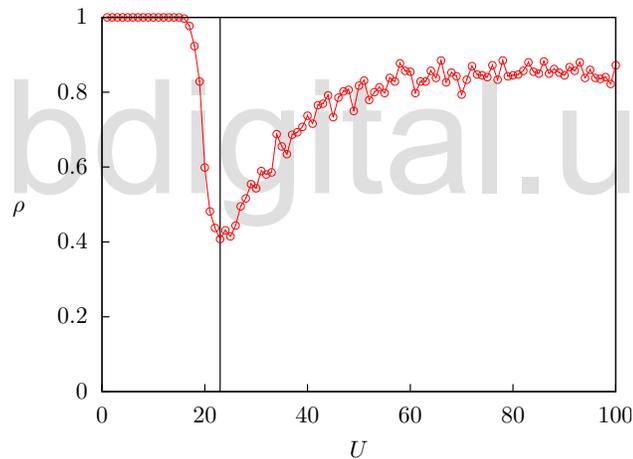
Consideramos una red de tamaño  $N = 2500$  y una dinámica de opiniones valoradas con  $Q = 100$  opciones. La Figura (3.3) muestra el parámetro de orden  $S$ , correspondiente al tamaño normalizado del dominio más grande presente en el sistema, en función del umbral de interacción  $U$ . Para cada valor de  $U$ , la cantidad  $S$  se calcula como el promedio resultante de 300 realizaciones de condiciones iniciales aleatorias. Las barras de error corresponden a la desviación estándar sobre el promedio  $S$ .



**Figura 3.3:** Parámetro de orden  $S$  como función del umbral de interacción  $U$  para una red bidimensional con vecindad de Von Neumann. Parámetros fijos son  $N = 2500$  y  $Q = 100$ . Para cada valor de  $u$ , la cantidad  $S$  se calcula como el promedio resultante de 300 realizaciones de condiciones iniciales aleatorias. Las barras de error corresponden a la desviación estándar sobre el promedio  $S$ . Las líneas corresponden a  $S = 1$  (azul),  $S = 0,5$  (verde) y  $U = 23$  (negra).

Se observa que el sistema alcanza un estado de diversidad de opiniones para valores de  $U$  menores que un cierto valor crítico  $U_c$ , caracterizado por  $S \rightarrow 0$ . Adicionalmente, para valores de  $U$  mayores que  $U_c$ , el parámetro de orden  $S$  se incrementa hasta alcanzar el valor  $S = 1$ . El valor  $U_c$  se puede interpretar como el valor crítico de una transición de fase de segundo orden, donde el valor de la función  $S$  es continua, pero su primera derivada no lo es.

Encontramos el valor crítico para esta red de  $U_c$  por medio de la Figura (3.4). En la figura, la cantidad  $\rho$  indica la probabilidad de alcanzar un estado estacionario en un número de 750 realizaciones de condiciones iniciales para cada valor de  $U$ . El valor crítico  $U_c$  asociado a una transición de fase corresponde al valor de  $U$  para el cual se presenta la mayor fluctuación en las cantidades macroscópicas del sistema. En la Figura (3.4), la mayor fluctuación implica el menor valor de la probabilidad  $\rho$ , la cual ocurre para  $U_c = 23$ .

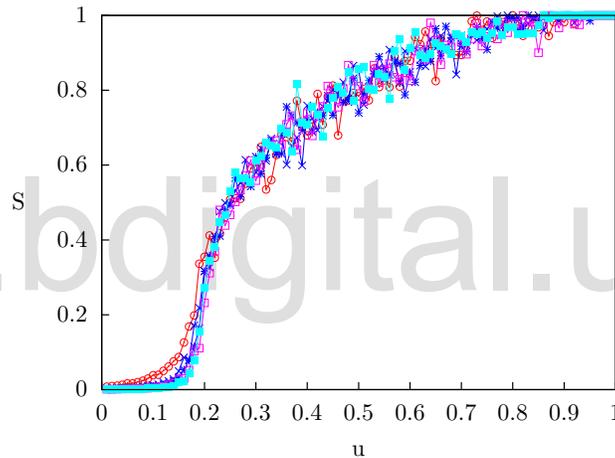


**Figura 3.4:** Probabilidad  $\rho$  de alcanzar un estado estacionario como función del umbral de interacción  $U$  para una red bidimensional con vecindad de Von Neumann. Parámetros fijos  $N = 2500$  y  $Q = 100$ .

El resultado de la Figura (3.3) se puede interpretar de la siguiente manera: el umbral de interacción para los agentes debe tener un valor cercano al 20% del tamaño de las opciones disponibles para que pueda surgir un grupo mayoritario en el sistema. En otras palabras si el grado de tolerancia entre los agentes es menor que un 23% nunca van a tener una opinión común. Nótese que la mayoría simple se alcanza para un umbral de interacción de  $U = 26$ , muy cercano al valor crítico  $U_c$ .

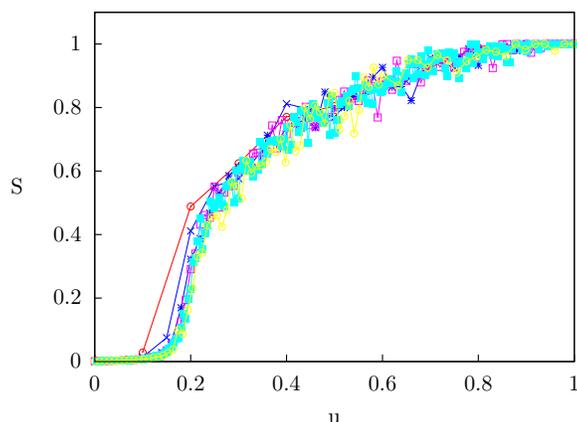
Aunque el umbral de interacción  $u$  es un número entero, es conveniente expresar esta cantidad en forma normalizada con respecto al número de opciones  $Q$ . Definimos  $u$  como el umbral de interacción normalizado sobre la cantidad de opciones posibles  $Q$ , de manera que  $u \equiv U/Q$ . Luego, el valor crítico de la transición en la Figura (3.3) puede representarse como  $u_c = 23/100 = 0,23$ .

Para investigar la influencia del tamaño del sistema en el comportamiento colectivo, en la Figura (3.5) mostramos  $S$  como función de  $u$ , para varios valores de  $N$ . Observamos que al aumentar el tamaño del sistema, la transición en el valor crítico  $u_c$  resulta mejor definido. Sin embargo, el valor de  $u_c$  no varía sustancialmente al cambiar el tamaño del sistema. Esto implica que la transición de fase en la cantidad  $S$  es robusta.



**Figura 3.5:** Parámetro de orden  $S$  como función del umbral de interacción normalizado  $u$  para una red bidimensional con vecindad de Von Neumann, para distintos tamaños del sistema.  $N = 400$  (rojo),  $N = 1600$  (azul),  $N = 2500$  (verde),  $N = 4900$  (fucsia) y  $N = 8100$  (cian). Por claridad, las barras de error han sido suprimidas.

La Figura (3.6) muestra el parámetro de orden  $S$  como función de  $u$  cuando se varía el número de opciones  $Q$  en el sistema. Se observa que el número de opciones disponibles para los agentes del sistema no tiene prácticamente influencia en el valor de tolerancia  $u_c = 0,2$  necesario para el surgimiento de un consenso en el sistema.

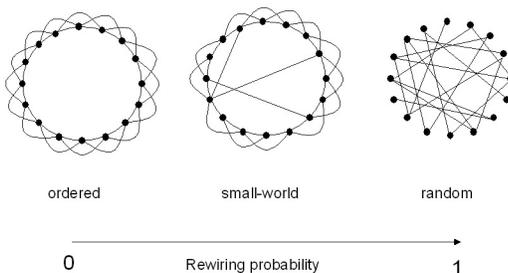


**Figura 3.6:** Parámetro de orden  $S$  como función del umbral de interacción normalizado  $u$  para una red bidimensional con vecindad de Von Neumann, para distintos números de opciones  $Q$ .  $Q=10$  (rojo),  $Q=30$  (verde),  $Q=50$  (azul),  $Q=100$  (fucsia),  $Q=200$  (cian) y  $Q=1000$  (amarillo).

### 3.2. Red de pequeño mundo

Una red de pequeño mundo (Small World) se puede construir mediante una serie de nodos con conexiones de largo alcance, ubicados sobre un anillo unidimensional, de modo que cualesquiera dos nodos de la red pueden estar separados por una pequeña cantidad de pasos [22, 5]. Este tipo de red se ilustra en la Figura (3.7). El número de vecinos de cualquier nodo se denota por  $k$ . En este caso, consideraremos que el número de vecinos se mantiene constante e igual a  $k = 4$ .

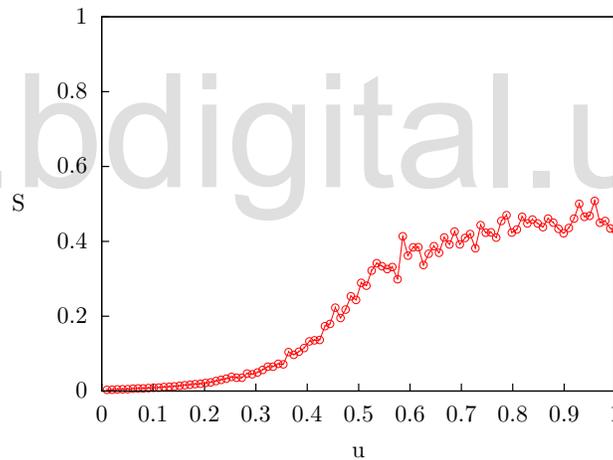
Consideraremos inicialmente un anillo donde cada nodo posee  $k = 4$  vecinos. Definimos como  $p$  la probabilidad de recableado; es decir, la probabilidad de que un enlace entre dos nodos seleccionados al azar se corte y se ubique en otro lugar. El número de vecinos  $k$  se conserva.



**Figura 3.7:** Ilustración de red de pequeño mundo.

Consideramos una red de tamaño  $N = 1000$  y una dinámica de opiniones valoradas con  $Q = 100$  opciones. Para cada valor de  $u$ , la cantidad  $S$  se calcula como el promedio resultante de 30 realizaciones de condiciones iniciales aleatorias.

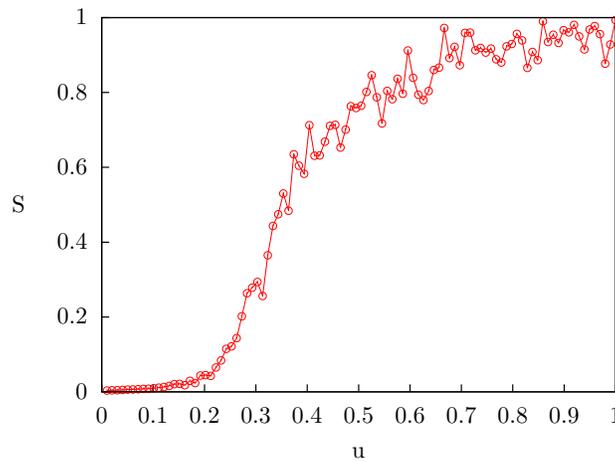
La Figura (3.8) muestra  $S$  como función de  $u$  para un valor  $p = 0$  fijo. El sistema nunca adquiere un estado de consenso completo, aunque se presenta un valor  $u_c = 0,4$  que corresponde al valor crítico de una transición de fase de segundo orden. Para  $u < u_c$  el sistema se encuentra en un estado de diversidad donde  $S \rightarrow 0$ . Para  $u > u_c$  el sistema tiende a un valor máximo  $S \rightarrow 1/2$ . En contraste con la red bidimensional de Von Neumann con  $k = 4$  vecinos, donde se puede alcanzar un estado común para  $u > u_c$ , en este caso la topología de la red impide al sistema siquiera formar un grupo que cumpla la mayoría simple  $S \geq 1/2$ . Este resultado ilustra el importante efecto que tiene la topología de la red en el comportamiento colectivo de un sistema con dinámica de opinión valorada.



**Figura 3.8:** Parámetro de orden  $S$  como función del umbral de interacción normalizado  $u$  para una red de pequeño mundo con  $p = 0$ . Parámetros fijos  $Q = 100$  y  $N = 1000$ .

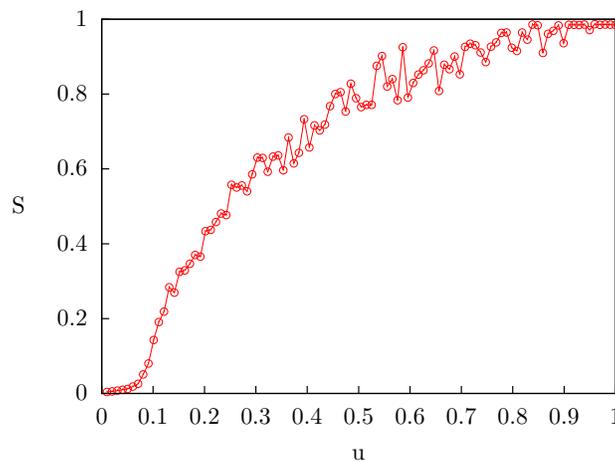
Si se aumenta la probabilidad de recableado, el valor  $u_c$  disminuye, como se aprecia en la Figura (3.9). En el rango de  $p$  correspondiente a una red de pequeño mundo se encuentra que  $u_c = 0,25$ . Para valores  $u > u_c$  el parámetro  $S \rightarrow 1$ ; es decir, los agentes comparten una opinión común, y si  $u < u_c$  entonces  $S \rightarrow 0$ , de forma que el sistema posee un estado de desorden o de diversidad de opinión. Cabe destacar que el sistema alcanza mayoría simple para el valor  $u = 0,35$  y que el comportamiento colectivo del sistema es diferente a la red regular con  $p = 0$  a pesar

de poseer los mismos 4 vecinos.



**Figura 3.9:** Parámetro de orden  $S$  como función del umbral de interacción normalizado  $u$  para una red de pequeño mundo con  $p = 0,01$ . Parámetros fijos  $Q = 100$  y  $N = 1000$ .

La Figura (3.10) fue calculada para una red con  $p = 1$ . Se puede apreciar la ocurrencia de una transición de fase en  $u_c = 0,1$ . A medida que aumenta la probabilidad de recableado, el umbral de interacción crítico  $u_c$  tiende a disminuir. El sistema alcanza mayoría simple cuando  $u = 25$ .



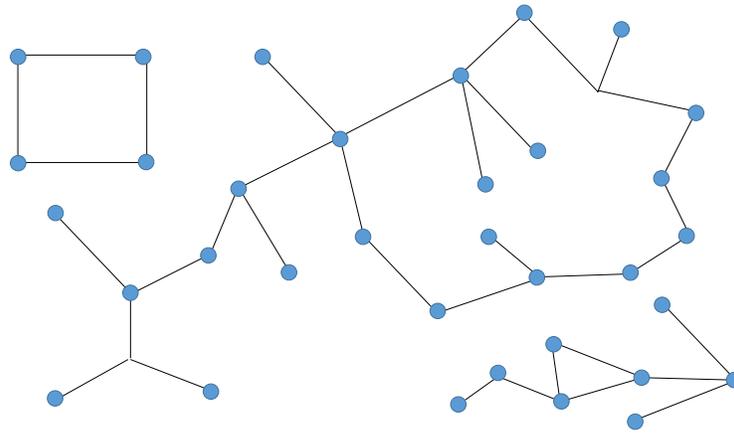
**Figura 3.10:** Parámetro de orden  $S$  como función del umbral de interacción normalizado  $u$  para una red de pequeño mundo con  $p = 1$ . Parámetros fijos  $Q = 100$  y  $N = 1000$ .

En resumen, podemos observar que el grado de tolerancia  $u_c$  requerido para que

el sistema converja a un estado homogéneo depende en mayor grado de la topología de la red y no del número de vecinos.

### 3.3. Red aleatoria de Erdős-Rényi

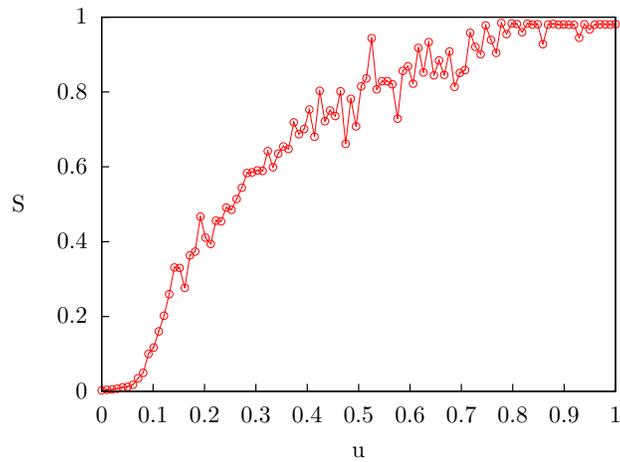
Una red de Erdős-Rényi se construye conectando un conjunto de  $N$  nodos aleatoriamente. La Figura (3.11) ilustra una red de este tipo, que se caracteriza por el número promedio de vértices por nodo denotado como  $\langle k \rangle$  [23]. En esta sección consideraremos redes aleatorias con  $\langle k \rangle = 4$ .



**Figura 3.11:** Ilustración de una red aleatoria.

Consideraremos una red de tamaño  $N = 1000$  y una dinámica de opiniones valoradas con  $Q = 100$ . La Figura (3.12) muestra el parámetro de orden  $S$  como en función de  $u$ . Para cada valor de  $u$ , la cantidad  $S$  se calcula como el promedio resultante de 30 realizaciones de condiciones iniciales aleatorias.

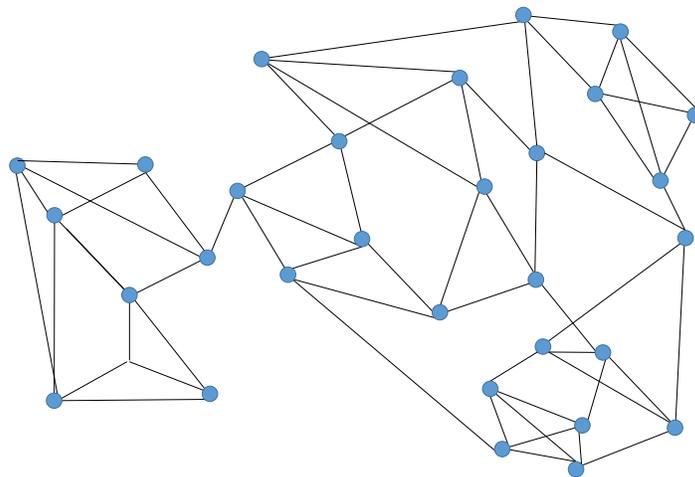
La Figura (3.12) muestra una transición de fase de segundo orden para un valor del umbral de interacción crítico situado en  $u_c = 0,1$ . Para  $u < u_c$ , el estado del sistema tiende a un estado desordenado. Para  $u > u_c$ , surge un grupo de opinión compartida, cuya mayoría simple se alcanza para  $u = 0,25$ .



**Figura 3.12:** Parámetro de orden  $S$  como función del umbral de interacción normalizado  $u$  para una red aleatoria de Erdős-Rényi con  $\langle k \rangle = 4$ . Parámetros  $Q = 100$  y  $N = 1000$ .

### 3.4. Red aleatoria tipo $\delta$

Una red aleatoria tipo  $\delta$  se construye conectando cada nodo de una red con un número  $k$  de vecinos escogidos aleatoriamente. La Figura (3.13) ilustra una red configurada de esta manera, de forma que cada nodo posee un número fijo  $k = 4$  vértices.

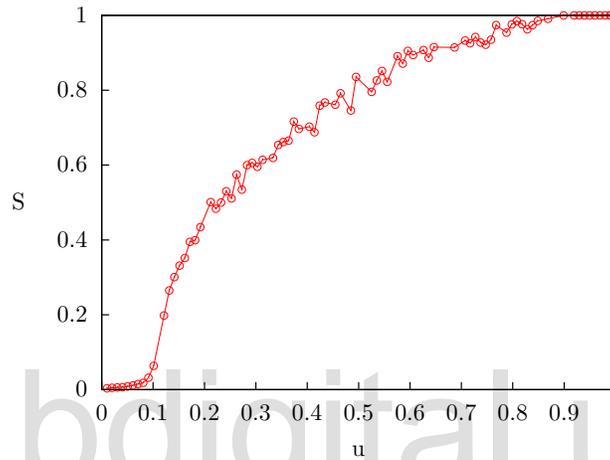


**Figura 3.13:** Ilustración de una red aleatoria con  $k = 4$  vecinos.

Consideraremos una red aleatoria tipo  $\delta$  de tamaño  $N = 1000$  y una dinámica

de opiniones valoradas con  $Q = 100$ . Para cada valor de  $u$ , la cantidad  $S$  se calcula como el promedio resultante de 30 realizaciones de condiciones iniciales aleatorias.

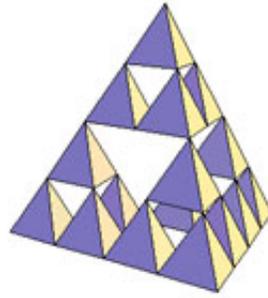
En la Figura (3.14) ocurre una transición de fase de segundo orden para un valor crítico del umbral de interacción  $u_c = 0,1$ . Para valores de  $u < u_c$ , el sistema tiende a un estado de diversidad de opiniones y, a medida que el umbral  $u$  se incrementa por encima del valor crítico, el sistema tiende a un estado homogéneo. El sistema alcanza mayoría simple en  $u = 0,25$ .



**Figura 3.14:** Parámetro de orden  $S$  como función del umbral de interacción normalizado  $u$  para una red aleatoria tipo  $\delta$  con  $k = 4$ . Parámetros  $Q = 100$  y  $N = 1000$ .

### 3.5. Redes fractales

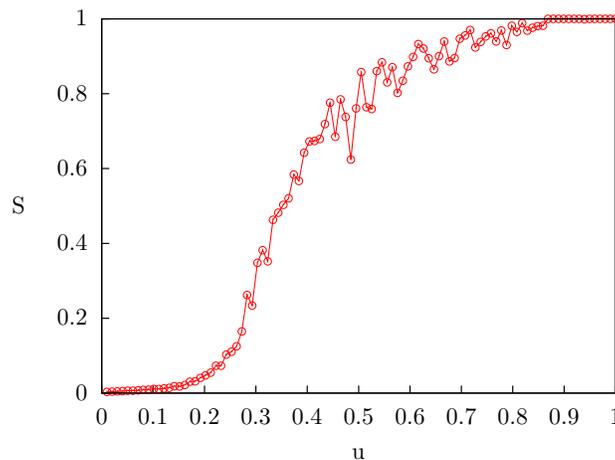
Un fractal es un objeto cuya estructura se repite en diferentes escalas. Si se toman como nodos las celdas (espacios ocupados) de un fractal, entonces podemos considerar a este tipo de estructura como una red. Denotamos por  $d$  la dimensión del espacio euclidiano que contiene al fractal [24]. Un ejemplo sencillo de una red fractal es la pirámide de Sierpinski en un espacio euclidiano tridimensional y colocar nodos en sus celdas, así como se ilustra en la Figura (3.15). El número de celdas para un nivel de construcción  $n$  es  $N = 4^n$ . En este caso, todas las celdas, a excepción de los cuatro vértices de la pirámide, poseen  $k = 4$ .



**Figura 3.15:** Ilustración del fractal pirámide de Sierpinski contenida en dimensión  $d = 3$ .

Consideraremos una pirámide de Sierpinski de tamaño  $N = 4^5 = 1024$  y una dinámica de opiniones valoradas con  $Q = 100$ . Para cada valor de  $u$ , la cantidad  $S$  se calcula como el promedio resultante de 50 realizaciones de condiciones iniciales aleatorias.

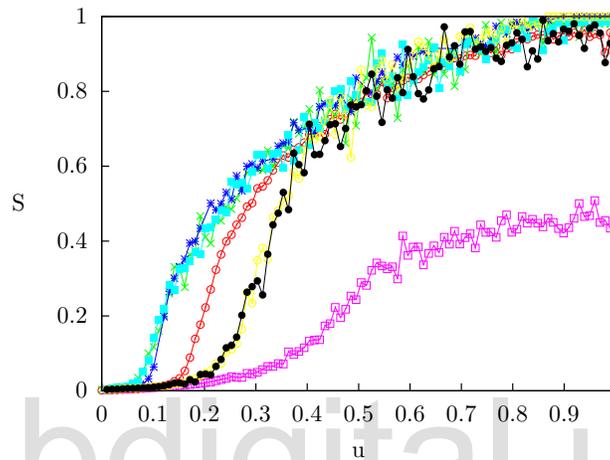
La Figura (3.16) muestra que la dinámica del sistema genera una transición de fase de segundo orden al variar  $u$ . La transición sucede en un valor crítico del umbral de interacción  $u_c = 0,30$ . El sistema posee un estado de diversidad de opiniones cuando  $u < u_c$  y logra alcanzar un estado homogéneo cuando  $u > u_c$ . El grupo mayoritario emerge para  $u = 0,35$ .



**Figura 3.16:** Parámetro de orden  $S$  como función del umbral de interacción normalizado  $u$  para una pirámide de Sierpinski. Parámetros  $Q = 100$  y  $N = 1024$ .

### 3.6. Comparación de redes con $k = 4$ vecinos

En la Figura (3.17) se pueden apreciar los comportamientos colectivos de los distintos tipos de redes, con acoplamiento local con  $k = 4$  vecinos que hemos discutido anteriormente. La figura muestra las gráficas  $S$  versus  $u$  para la red bidimensional con vecindad de Von Neumann, red de pequeño mundo, red de Erdős-Rényi, red aleatoria tipo  $\delta$  y red fractal.



**Figura 3.17:** Parámetro de orden  $S$  como función del umbral de interacción normalizado  $u$  para red de Von Neumann (rojo), red aleatoria con  $k$  fijo (verde), red aleatoria con  $\langle k \rangle$  (azul), red de pequeño mundo  $p = 0$  (fucsia), red de pequeño mundo  $p = 1$  (cian), red de pequeño mundo  $p = 0,01$  (negro) y red fractal (amarillo).

Se puede observar que, para valores del umbral  $u$  suficientemente grandes, todas las redes excepto la red unidimensional con  $k = 4$ ,  $p = 1$ , alcanzan un estado de homogeneidad. En el caso de un anillo unidimensional con cuatro vecinos no está definido una interfase entre los dominios; la interfase consiste siempre en dos nodos. Esto restringe la posibilidad de crecimiento de los dominios en la red, por lo que no se alcanza un estado colectivo con un sólo dominio.

Notamos que la red de Erdős-Rényi, la red aleatoria tipo  $\delta$  y la red de pequeño mundo con  $p = 0$  exhiben un comportamiento colectivo similar. Estas redes presentan una topología común característica de redes aleatorias, por lo que cabe esperar que sus comportamientos colectivos sean similares.

Notablemente, el comportamiento colectivo de la red de pequeño mundo es similar al comportamiento de la red fractal. Esto sugiere que la dinámica de opiniones

valoradas en la pirámide de Sierpinski forma dominios autosimilares que permiten reducir la distancia media efectiva entre dominios del sistema. En este sentido, la topología efectiva de estas dos redes pueden considerarse similares, y por tanto sus comportamientos colectivos también son similares.

La Figura (3.17) representa uno de los resultados centrales de la presente tesis: la topología de la red subyacente y no las conexiones locales influyen en el comportamiento colectivo de un sistema sujeto a una dinámica de opiniones valoradas. Adicionalmente, vemos que el grado de tolerancia o umbral crítico  $u_c$  depende de la topología de la red.

[www.bdigital.ula.ve](http://www.bdigital.ula.ve)

*“It couldn't be helped since I was no longer the me who knew him, and the same surely applied to him as well.”*

*Asano Inio, Oyasumi Punpun*

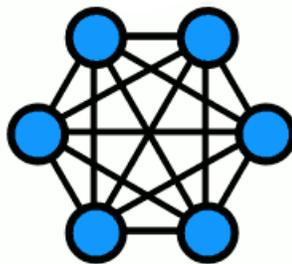
## Capítulo 4

# Dinámica de opinión valorada con interacciones globales

En este capítulo estudiaremos el comportamiento colectivo de un sistema con dinámica de opinión valorada definido sobre redes con interacciones globales.

### 4.1. Red Global

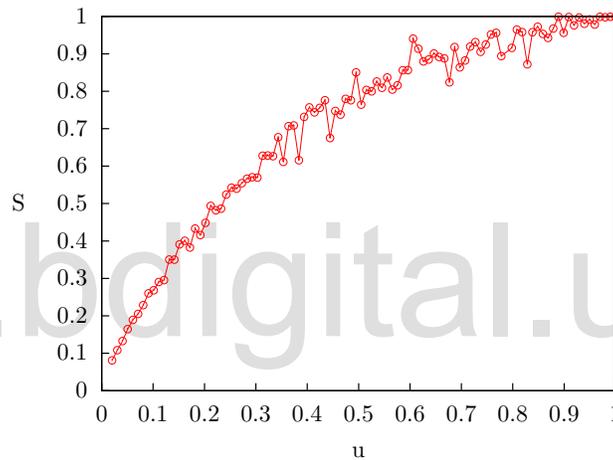
Una red global está construida de forma que cualquier nodo esté conectado con todos los otros nodos de la red. Inicialmente, consideramos un anillo de  $N$  nodos donde cada nodo posee  $k = N - 1$  vecinos.



**Figura 4.1:** Ilustración de una red global.

Consideraremos una red de tamaño  $N = 1000$  y una dinámica de opiniones valoradas con  $Q = 100$  opciones. La Figura (4.2) muestra el parámetro de orden  $S$ , correspondiente al tamaño normalizado del dominio más grande presente en el sistema, en función del umbral de interacción  $u$ . Para cada valor de  $u$ , la cantidad  $S$  se calcula como el promedio resultante de 50 realizaciones de condiciones iniciales aleatorias.

En la Figura (4.2) se observa que cuando  $u \rightarrow 0$ , el sistema posee un estado en el cual ya aparece un dominio mayoritario. A medida que aumenta el parámetro  $u$ , el grupo mayoritario en el sistema aumenta de tamaño, de forma que cuando  $u \rightarrow 1$  un estado homogéneo emerge en el sistema. La mayoría simple se alcanza para  $u = 0,2$ .



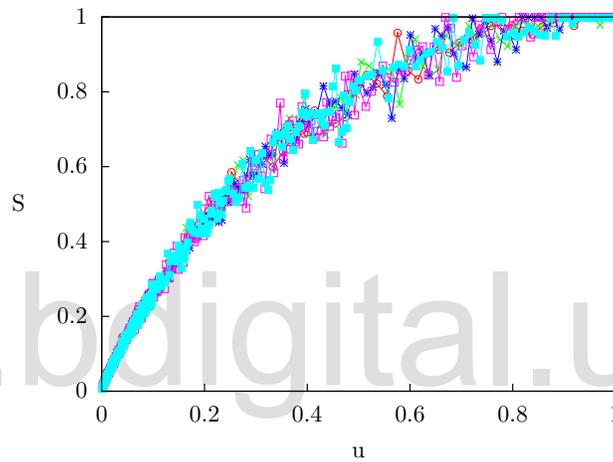
**Figura 4.2:** Parámetro de orden  $S$  como función del umbral de interacción normalizado  $u$  para una red global. Parámetros fijos  $Q = 100$  y  $N = 1000$ .

Nótese que para una red global no existe la fase desordenada; es decir,  $u_c = 0$ . En esta red, el número promedio de agentes distribuidos inicialmente en cada estado es  $N/Q$ . Dado un umbral  $U$ , el número de agentes con los que puede interactuar un agente cualquiera en el sistema es proporcional a  $U \times N/Q$ . Luego, la probabilidad que tiene un agente cualquiera de interactuar con otro agente en el sistema es proporcional a  $1/N \times U \times N/Q = u$ . Es decir, el umbral normalizado  $u$  mide la probabilidad de interacción inicial entre agentes del sistema. La probabilidad de interacción y, por lo tanto, la posibilidad de crecimiento de algún dominio, existe para todo valor  $u > 0$ .

En contraste, para una red local con  $\langle k \rangle$  vecinos por nodo, la probabilidad de

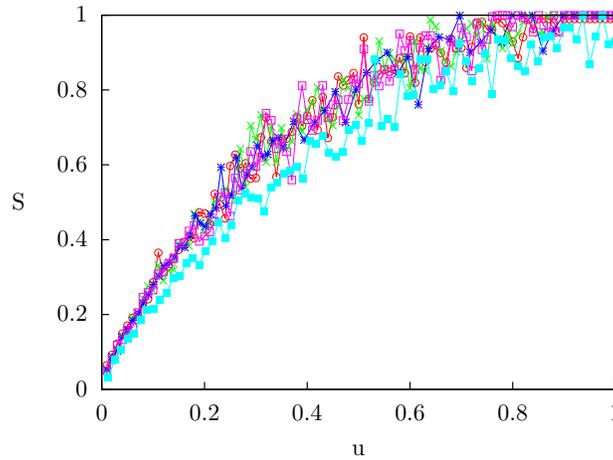
interacción inicial entre agentes del sistema es proporcional a  $\langle k \rangle / N \times u$ . Esta probabilidad puede ser muy pequeña cuando  $u$  es pequeño y, por lo tanto el sistema puede alcanzar un estado desordenado para valores de  $u$  suficientemente pequeños. Luego, para estas redes puede ocurrir en general una transición de fase en el parámetro de orden  $S$  como función de  $u$ .

Para investigar la influencia de la cantidad de opciones  $Q$  en el comportamiento colectivo, calculamos  $S$  como función de  $u$  para diversos valores de  $Q$ . La Figura (4.3) muestra que la cantidad de opciones tiene poco efecto en el comportamiento colectivo del sistema en una red global.



**Figura 4.3:** Parámetro de orden  $S$  como función de  $u$  en una red global, para distintos valores de  $Q$ .  $Q = 100$  (rojo),  $Q = 200$  (verde),  $Q = 500$  (azul),  $Q = 1000$  (fucsia) y  $Q = 2000$  (cian). Parámetro fijo  $N = 1000$ .

En la Figura (4.4) se aprecia que el tamaño del sistema tampoco tiene prácticamente influencia en el comportamiento de  $S$  en función de  $u$ , como era de esperarse.



**Figura 4.4:** Parámetro de orden  $S$  como función de  $u$  en una red global, para distintos tamaños.  $N = 100$  (rojo),  $N = 500$  (verde),  $N = 1000$  (azul) y  $N = 1500$  (fucsia). Parámetro fijo  $Q = 100$ .

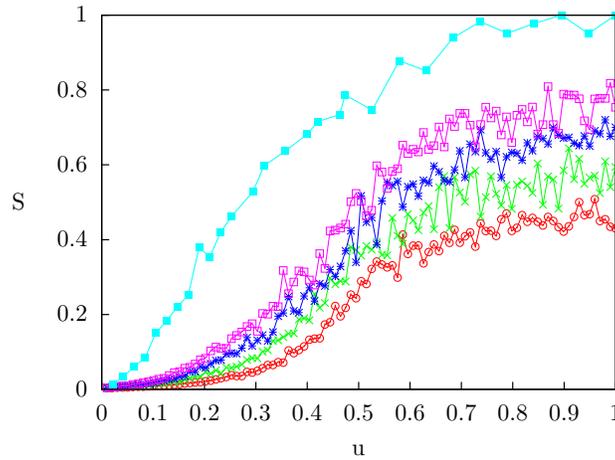
## 4.2. Influencia del rango de interacción y de la probabilidad de recableado

En esta sección estudiaremos el comportamiento del sistema al variar la cantidad de vecinos y la probabilidad de recableado en una red de pequeño mundo como una manera de aproximarnos al límite de una red global.

### 4.2.1. Red de pequeño mundo para $p = 0$ y $k$ variable

Consideremos un sistema de tamaño  $N = 1000$  y una dinámica de opiniones valoradas con  $Q = 100$  en una red de pequeño mundo tipo anillo con  $p = 0$ , donde se varía el rango de interacción  $k/2$ ; es decir, el número de vecinos de cada nodo es  $k$ . Para cada valor de  $u$ , la cantidad  $S$  se calcula como el promedio resultante de 30 realizaciones de condiciones iniciales aleatorias.

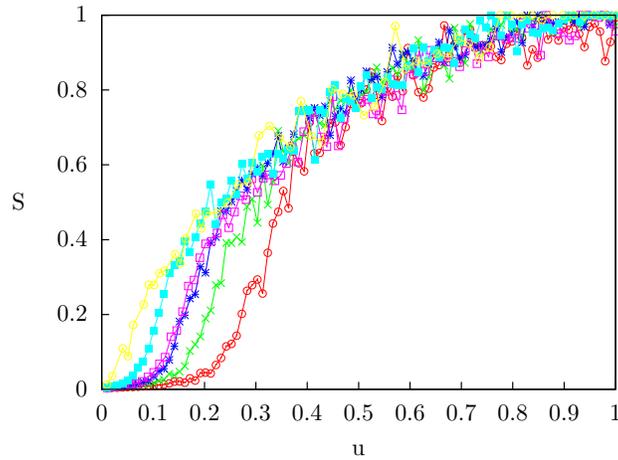
La Figura (4.5) muestra la cantidad  $S$  vs  $u$  para distintos valores de  $k$ . Cuando  $k = 4$ , el sistema nunca adquiere un estado de consenso completo, como vimos en la sección (3.2). A medida que aumenta  $k$ , el tamaño del dominio más grande se incrementa, mientras que  $u_c$  disminuye de valor. De forma que, para  $k \rightarrow N - 1$ , el sistema tiende a comportarse como una red global.



**Figura 4.5:** Parámetro de orden  $S$  como función del umbral de interacción normalizado  $u$  para una red de pequeño mundo con  $p = 0$  para  $k = 4$  (rojo),  $k = 6$  (verde),  $k = 8$  (azul),  $k = 10$  (fucsia) y  $k = 30$  (cian). Parámetro fijo  $N = 1000$  y  $Q = 100$ .

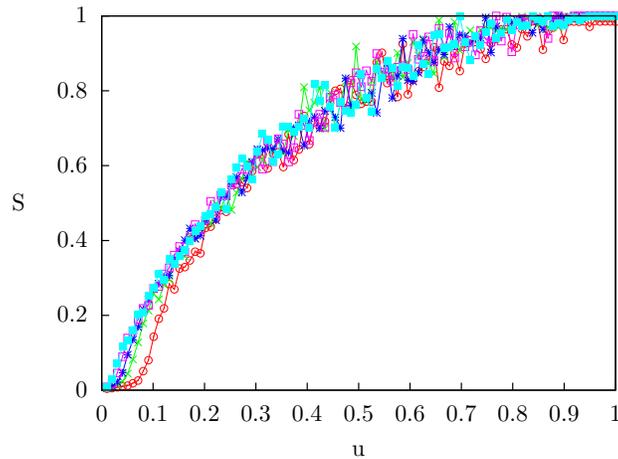
#### 4.2.2. Red de pequeño mundo con diferentes recableados

Consideraremos una red de tamaño  $N = 1000$  y una dinámica de opiniones valoradas con  $Q = 100$  en una red de pequeño mundo con  $p = 0,01$ . La Figura (4.6) muestra  $S$  vs  $u$  para esta red, con diferentes números de vecinos  $k$ . Se observa una transición de fase para un umbral de interacción crítico  $u_c$  que disminuye de valor a medida que aumenta  $k$ . Cuando  $k$  aumenta, la cantidad de nodos con los que un agente puede interactuar se incrementa, de manera que el sistema se comporta como una red global en el límite  $k \rightarrow N - 1$ . Los resultados de la Figura (4.6) concuerdan con este comportamiento.



**Figura 4.6:** Parámetro de orden  $S$  como función del umbral de interacción normalizado  $u$  para una red de pequeño mundo con  $p = 0,01$  para  $k = 4$  (rojo),  $k = 6$  (verde),  $k = 8$  (azul),  $k = 10$  (fucsia),  $k = 12$  (cian) y  $k = 14$  (amarillo). Parámetro fijo  $N = 1000$  Y  $Q = 100$ .

La Figura (4.7) muestra  $S$  vs  $u$  para esta red con  $p = 1$ , con diferentes números de vecinos  $k$ . Se observa que a medida que aumenta la cantidad de vecinos  $k$ , el umbral de interacción crítico  $u_c$  disminuye, de forma que cuando  $k \rightarrow N - 1$  no ocurre transición y el sistema tiende a un comportamiento global.



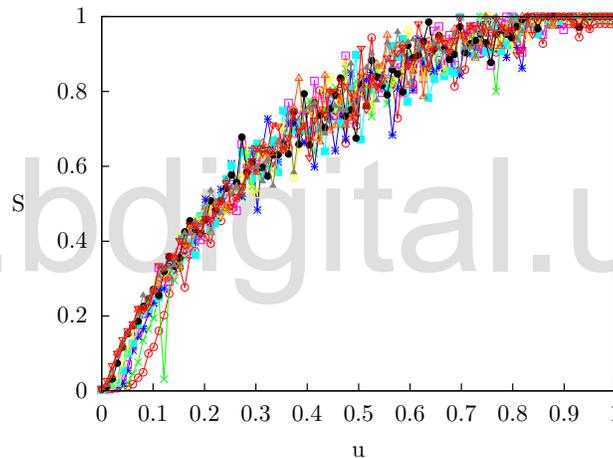
**Figura 4.7:** Parámetro de orden  $S$  como función del umbral de interacción normalizado  $u$  para una red de pequeño mundo con  $k = 4$  (rojo),  $k = 6$  (verde),  $k = 8$  (azul),  $k = 10$  (fucsia),  $k = 12$  (cian). Parámetro fijo  $L = 1000$  Y  $Q = 100$ .

## 4.3. Redes aleatorias con $k$ variable

### 4.3.1. Red Aleatoria de Erdős-Rényi

Consideraremos una red de tamaño  $N = 1000$  y una dinámica de opiniones valoradas con  $Q = 100$  en una red aleatoria de Erdős-Rényi para diferentes valores del número promedio de vecinos  $\langle k \rangle$ . Para cada valor de  $u$ , la cantidad  $S$  se calcula como el promedio resultante de 20 realizaciones de condiciones iniciales aleatorias.

La Figura (4.8) muestra  $S$  versus  $u$  para diferentes valores de  $\langle k \rangle$ . Se observa una transición de fase cuando  $\langle k \rangle = 4$  para un valor  $u_c$ , tal como vimos en el capítulo anterior. El umbral crítico  $u_c$  disminuye de valor a medida que  $k \rightarrow N - 1$  vecinos; como consecuencia, el sistema tiende a un comportamiento global.

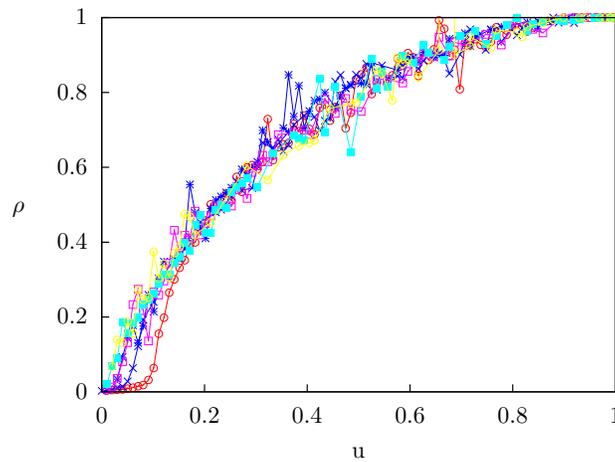


**Figura 4.8:** Parámetro de orden  $S$  como función del umbral de interacción normalizado  $u$  para una red aleatoria de Erdős-Rényi con  $\langle k \rangle$  vecinos fijos con  $k = 4$  (rojo),  $k = 5$  (verde),  $k = 6$  (azul),  $k = 7$  (fucsia),  $k = 8$  (cian),  $k = 9$  (amarillo),  $k = 13$  (negro),  $k = 16$  (rojo con triángulos mirando hacia arriba),  $k = 19$  (gris) y  $k = 23$  (rojo con triángulos mirando hacia abajo). Parámetro fijo  $N = 1000$  y  $Q = 100$ .

Consideraremos una red de tamaño  $N = 1000$  y una dinámica de opiniones valoradas con  $Q = 100$  en una red de pequeño mundo con  $p = 1$ . Para cada valor de  $u$ , la cantidad  $S$  se calcula como el promedio resultante de 20 realizaciones de condiciones iniciales aleatorias.

La Figura (4.9) muestra  $S$  versus  $u$  para diferentes valores de  $k$  en una red aleatoria de tipo  $\delta$ . Nuevamente, se observa que al aumentar  $k$ , el sistema tiende a

comportarse como una red global.



**Figura 4.9:** Parámetro de orden  $S$  como función del umbral de interacción normalizado  $u$  para una red aleatoria tipo  $\delta$  con  $\langle k \rangle$  vecinos fijos con  $k = 4$  (rojo),  $k = 6$  (verde),  $k = 8$  (azul),  $k = 10$  (fucsia),  $k = 20$  (cian) y  $k = 25$  (amarillo). Parámetro fijo  $N = 1000$  y  $Q = 100$ .

Los resultados de este capítulo muestran que cuando el número de vecinos de una red es suficientemente grande, en el límite de una red global no aparece la fase desordenada en un sistema con dinámica de opinión valorada. Podemos concluir que una transición de fase asociada a esta dinámica aparece cuando la red subyacente posee interacciones locales.

*“The world doesn’t make sense until you force it to.”*

Frank Miller, creador de *The Dark Knight*

## Capítulo 5

# Influencia de campos externos o medios masivos

En este capítulo investigamos el comportamiento colectivo de un sistema con dinámica de opiniones valoradas, sujeto a una influencia externa global que puede interpretarse como un mensaje o propaganda de un medio de comunicación masiva.

### 5.1. Dinámica de opiniones valoradas con campo externo

Consideremos un sistema que consiste en  $N$  agentes colocados como nodos en una red. El estado  $x_i^t$  es la opinión valorada que corresponde al agente  $i$  en un tiempo  $t$ . El estado de cada agente puede tomar cualquiera de los  $Q$  números enteros del conjunto  $\{1, 2, 3, 4, \dots, Q\}$ , donde  $Q$  es la valoración máxima del sistema. Adicionalmente, consideremos la presencia de un campo externo que puede afectar a todos los agentes del sistema. El campo externo  $M$  posee un valor constante  $x_M$  escogido del conjunto  $\{1, 2, 3, 4, \dots, Q\}$ . En este trabajo asumiremos que el estado del campo corresponde al valor  $x_M = Q$ . La interacción del campo  $M$  con los agentes del sistema es unidireccional; es decir, el campo puede afectar los estados de los agentes, pero los agentes no alteran el estado del campo externo. En este sentido, podemos

considerar que se trata de un sistema dinámico sujeto a un forzamiento externo.

La intensidad del campo se caracteriza por un parámetro  $B \in [0, 1]$ , que expresa la probabilidad de interacción del campo con cualquier agente del sistema. Esto significa que suponemos un campo externo espacialmente homogéneo. La interacción del campo con los agentes es similar a la dinámica de interacción entre los agentes; es decir, depende de un umbral de interacción  $u$ .

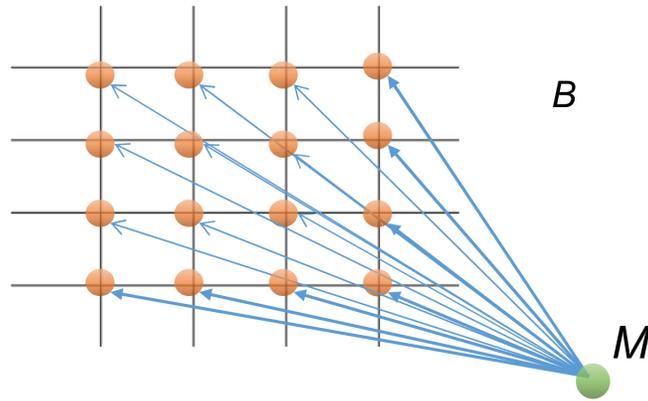
Inicialmente, al estado de cada agente se le asigna aleatoriamente y uniformemente un valor del conjunto  $\{1, 2, 3, 4, \dots, Q\}$ . La dinámica del sistema se describe mediante el siguiente algoritmo iterativo:

1. En la iteración  $t$ , se selecciona aleatoriamente un agente  $i$  y uno de sus vecinos  $j$ .
2. Si la probabilidad  $B$  permite la interacción con el campo, se calcula  $|x_i^t - x_M|$ 
  - a) Si  $|x_i^t - x_M| \leq u$ , entonces  $x_i^{t+1} \leftarrow x_M$ .
  - b) Si  $|x_i^t - x_M| > u$ , no sucede nada.
3. Si no hay interacción con el campo, se calcula  $|x_i^t - x_j^t|$ .
  - a) Si  $|x_i^t - x_j^t| \leq u$ , entonces  $x_i^{t+1} \leftarrow x_j^t$ .
  - b) Si  $|x_i^t - x_j^t| > u$  no sucede nada.

De igual manera que en el modelo sin campo,  $u$  se define como el parámetro de umbral de interacción que puede tomar valores de  $\{1, 2, 3, 4, \dots, Q\}$ .

## 5.2. Red bidimensional con vecindad de Von Neumann sujeta a campo externo

La Figura (5.1) muestra una red bidimensional con vecindad de Von Neumann en presencia de un campo externo. El parámetro  $B$  indica la probabilidad de interacción para que el campo interactue con un agente cualquiera.

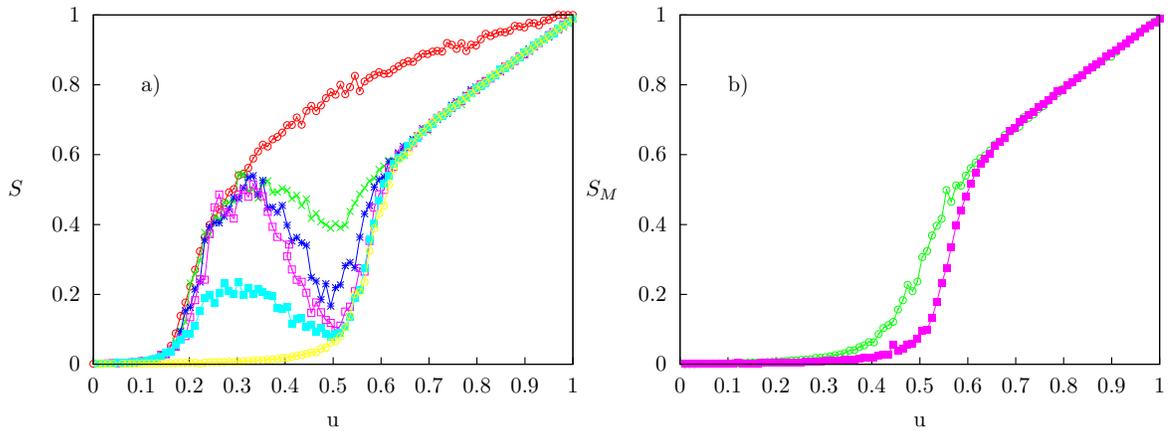


**Figura 5.1:** Red bidimensional con vecindad de Von Neumann en presencia de un campo externo  $M$  con intensidad  $B$ . Los nodos naranjas son los agentes de la red y el elemento verde es la representación del campo, que se comporta como un agente externo adicional.

Consideremos un sistema de tamaño  $N = 2500$  y una dinámica de opiniones valoradas con  $Q = 100$  opciones, definido en una red bidimensional con vecindad de Von Neumann. La Figura (5.2a) muestra el parámetro de orden  $S$  en función del umbral de interacción  $u$ , para diversos valores de la intensidad  $B$  del campo. Para cada valor de  $u$ , la cantidad  $S$  se calcula como el promedio resultante de 40 realizaciones de condiciones iniciales aleatorias.

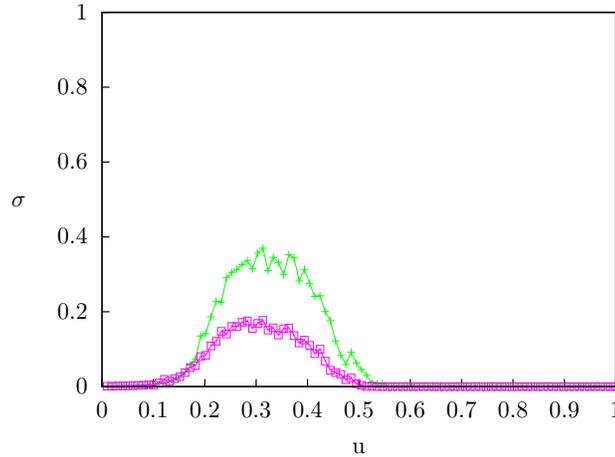
La Figura (5.2a) muestra como el sistema alcanza un estado de diversidad de opiniones (desorden) para valores de  $u$  menores que un valor crítico  $u_c$ , caracterizado por  $S \rightarrow 0$ . Para valores intermedio de  $B$ , la interacción entre agentes compite con el ordenamiento impuesto por el campo externo. Esta competencia se manifiesta en la aparición de un mínimo local en el parámetro de orden  $S$  para un valor  $u^* > u_c$ .

La Figura (5.2b) muestra el comportamiento del dominio cuyo estado es igual al estado del campo  $x_M$ , cuyo tamaño normalizado denotamos por  $S_M$ . En la figura se aprecia que para  $u < u^*$ , el tamaño  $S_M \rightarrow 0$ ; mientras que  $S_M$  aumenta a partir del valor  $u^*$ . Esto significa que el campo es efectivo para convencer a los agentes del sistema solamente para valores de umbral  $u$  suficientemente amplios. Se puede observar que para  $u \rightarrow 1$ , el dominio más grande en presencia del campo externo comienza a crecer notablemente tanto en la Figura (5.2a) como en la Figura (5.2b), de forma que  $S = S_M$  y  $S_M \propto u$ .



**Figura 5.2:** a) Parámetro de orden  $S$  como función del umbral de interacción  $u$  para una red bidimensional con vecindad de Von Neumann, para distintos valores de intensidad de un campo externo. Las curvas corresponden a  $B = 0$  (rojo),  $B = 0,1$  (verde),  $B = 0,6$  (azul),  $B = 0,8$  (fucsia),  $B = 0,9$  (cian) y  $B = 1,0$  (amarillo). b) Parámetro de orden  $S_M$  como función del umbral de interacción  $u$  para una red bidimensional con vecindad de Von Neumann, para distintos valores de intensidad de un campo externo. Las curvas corresponden a  $B = 0,1$  (rojo) y  $B = 0,8$  (verde). Parámetros fijos  $N = 2500$  y  $Q = 100$ . Para cada valor de  $u$ , la cantidad  $S$  se calcula como el promedio resultante de 50 realizaciones de condiciones iniciales aleatorias.

Para dilucidar la naturaleza del mínimo en  $S$  y el comportamiento para  $u < u^*$ , la Figura (5.3) muestra la cantidad  $\sigma$ , definida como la diferencia entre el tamaño del dominio más grande en el sistema  $S$  y el tamaño del dominio que posee el estado del campo  $S_M$ , de manera que  $\sigma = S - S_M$ . Para  $u < u_c$ , el sistema se encuentra desordenado en dominios muy pequeños y ambos  $S \rightarrow 0$  y  $S_M \rightarrow 0$ , por lo que  $\sigma = 0$ . Para  $u > u^*$ , el dominio más grande corresponde al estado del campo externo,  $S = S_M$ , luego  $\sigma = 0$ . En este rango, el campo externo logra imponer su estado a la mayoría de los agentes del sistema. Por otro lado, en el rango  $u_c < u < u^*$  el dominio más grande del sistema no corresponde al estado del campo externo, sino a algún otro estado diferente que no interactúa con el campo; i.e.,  $S > S_M$  y  $\sigma > 0$ . El valor  $u^* \approx 1/2$ .



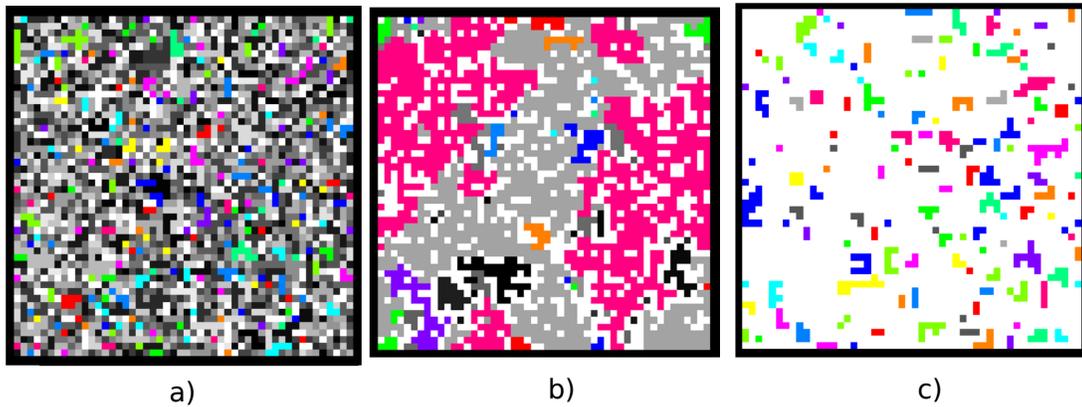
**Figura 5.3:** Parámetro de orden  $\sigma = S - S_M$  como función del umbral de interacción  $u$  para una red bidimensional con vecindad de Von Neumann para distintos valores de la intensidad del campo externo. Parámetros fijos  $N = 2500$  y  $Q = 100$ . Para cada valor de  $u$ , la cantidad  $S$  se calcula como el promedio resultante de 50 realizaciones de condiciones iniciales aleatorias. Las curvas corresponden a  $B = 0,1$  (rojo) y  $B = 0,8$  (verde).

Los resultados de esta sección revelan que el comportamiento colectivo de un sistema con dinámica de opiniones valoradas y sujetas a un campo externo puede ser caracterizado por tres fases que dependen de los parámetros  $u$  y  $B$ :

- I. Una fase desordenada para  $u < u_c$ , para la cual  $S \rightarrow 0$  y  $S_M \rightarrow 0$ , con  $\sigma = 0$ .
- II. Una fase ordenada en un estado alternativo al campo (fuera de su umbral de interacción) para  $u_c < u < u^*$ , para la cual  $S > S_M$  y  $\sigma > 0$ .
- III. Una fase ordenada inducida por el campo para  $u > u^*$ , para la cual  $S = S_M$  y  $\sigma = 0$ .

Nótese que para valores  $u > u^*$  un campo externo débil aún es capaz de imponer su estado a la mayoría del sistema (fase III). Sin embargo, para valores intermedios  $u_c < u < u^*$  si la intensidad  $B$  es suficientemente alta, el sistema espontáneamente genera una mayoría en un estado alternativo al estado del campo (fase II). La existencia de la fase II es uno de los resultados más importantes de la presente tesis, el cual tiene relevancia en el contexto de las ciencias sociales.

La Figura (5.4) ilustra los patrones espaciales correspondientes a las fases I, II y III.

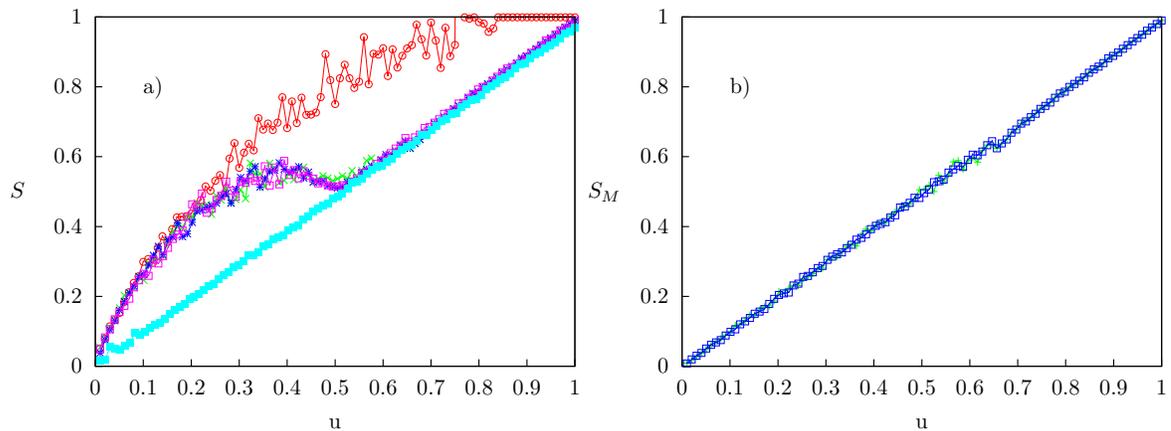


**Figura 5.4:** Visualización de las fases, para  $t \rightarrow \infty$ , a) I, b) II y c) III. El color correspondiente al estado del campo es el blanco.

### 5.3. Red global con influencia de un campo externo

Consideremos una red global de tamaño  $N = 1000$  y una dinámica de opiniones valoradas con  $Q = 100$  opciones sujeta a un campo externo. La Figura (5.3) muestra el parámetro de orden  $S$  en función del umbral de interacción  $u$ , para distintos valores de la intensidad  $B$  del campo. Para cada valor de  $u$ , la cantidad  $S$  se calcula como el promedio resultante de 20 realizaciones de condiciones iniciales aleatorias.

En la Figura (5.3) se observa que cuando  $u \rightarrow 0$ , el sistema posee un estado en el cual ya aparece un dominio mayoritario. A medida que aumenta el parámetro  $u$ , el grupo mayoritario en el sistema aumenta de tamaño hasta que presenta un mínimo relativo en  $u^* = 0,5$ . Sin embargo, al aumentar  $B$ , el tamaño del grupo mayoritario decrece para  $u < u^*$ . Para  $u > u^*$  y  $B > 0$ , el tamaño del dominio más grande aumenta como una función lineal de  $u$  de forma que  $S = u$ , independientemente de  $B$ .



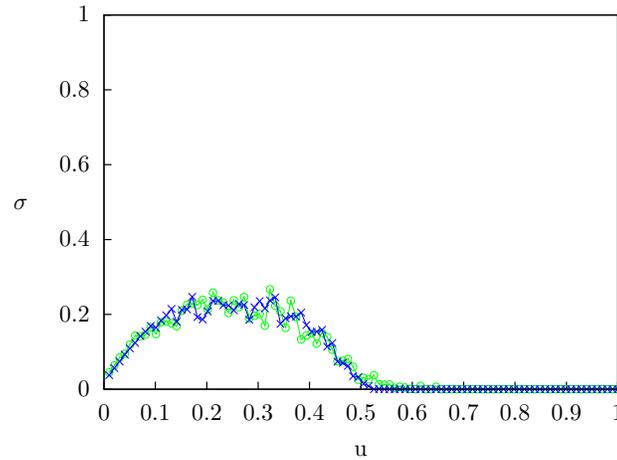
**Figura 5.5:** a) Parámetro de orden  $S$  como función del umbral de interacción  $u$  para una red global, para distintos valores de intensidad de un campo externo. Las curvas corresponden a  $B = 0$  (rojo),  $B = 0,1$  (verde),  $B = 0,8$  (azul),  $B = 0,9$  (fucsia) y  $B = 1$  (cian). b) Parámetro de orden  $S_M$  como función del umbral de interacción  $u$  para una red bidimensional con vecindad de Von Neumann, para distintos valores de intensidad de un campo externo. Las curvas corresponden a  $B = 0,1$  (verde) y  $B = 0,8$  (azul). Parámetros fijos  $N = 2500$  y  $Q = 100$ . Para cada valor de  $u$ , la cantidad  $S$  se calcula como el promedio resultante de 50 realizaciones de condiciones iniciales aleatorias.

La Figura (5.6) muestra la cantidad  $\sigma = S - S_M$  como función de  $u$ , donde  $S_M$  es el tamaño del dominio cuyo estado es igual al del campo  $M$ . Para  $u > u^*$ , el dominio más grande corresponde al estado del campo externo,  $S = S_M$ , por lo tanto  $\sigma = 0$ . Esto significa que el campo externo induce su estado a la mayoría de los agentes del sistema. En el rango  $u < u^*$  el dominio más grande del sistema no comparte el estado del campo; es decir,  $S > S_M$  y  $\sigma > 0$ .

A diferencia de una red con acoplamiento local, como la red bidimensional con vecindad de Von Neumann, en este caso no emerge un estado desordenado. Entonces una red global con dinámica de opiniones valores y sujetas a un campo externo exhibe solamente las fases II y III ennumeradas anteriormente: una fase ordenada en un estado alternativo al campo para  $u < u^*$ , caracterizada por  $S > S_M$  y  $\sigma > 0$ , y una fase ordenada impuesta por el campo para  $u > u^*$ , para la cual  $S = S_M$  y  $\sigma = 0$ .

En el contexto de sistemas sociales, el surgimiento de un grupo mayoritario en un estado diferente al que está tratando de imponer una propaganda o un mensaje de medios masivos es un fenómeno muy importante que puede tener diversas interpretaciones y aplicaciones.

Cabe resaltar que la presencia de la fase II persiste con acoplamiento local o global, por lo que este efecto es relevante y puede ser observable en redes sociales reales sujetas a dinámica de opiniones valoradas en presencia de un campo externo (medios masivos).



**Figura 5.6:** Parámetro de orden  $\sigma$  como función del umbral de interacción  $u$  para una red bidimensional con vecindad de Von Neumann. Parámetros fijos son  $N = 2500$  y  $Q = 100$ . Para cada valor de  $u$ , la cantidad  $S$  se calcula como el promedio resultante de 50 realizaciones de condiciones iniciales aleatorias para  $B = 0,1$  (verde) y  $B = 0,8$  (azul).

*“The worthwhile problems are the ones you can really solve or help solve, the ones you can really contribute something to. ...No problem is too small or too trivial if we can really do something about it.”*

Richard Feynmann

## Conclusiones

En esta Tesis hemos propuesto un modelo sociodinámico de opiniones valoradas discretas con un umbral o condición para las interacciones. Nuestro modelo es conceptual y computacionalmente simple, por cuanto su dinámica depende tan sólo del parámetro  $u$  que mide el umbral para la interacción. En el contexto de sistemas sociales, el parámetro de umbral puede interpretarse como el grado de tolerancia para la interacción entre los agentes del sistema.

El modelo presentado puede considerarse como una combinación del modelo de diseminación cultural de Axelrod y del modelo de opinión continua de Deffuant et al. Nuestro modelo permite describir en forma general la interacción de agentes en diversas situaciones sociales, donde las opiniones son discretas en ciertas escalas de valoración. Por ejemplo, la escala de Likert que se usa en muchas encuestas; la escala de satisfacción de consumidores de productos comerciales de empresas como Amazon, Ebay, IMDB, Mercado Libre; encuestas políticas o socioeconómicas, como Datanálisis, Hinterlaces o Consultores 21; etc.

Hemos investigado el comportamiento colectivo de esta dinámica sobre redes con diferentes topologías: red bidimensional con vecindad de Von Neumann, red de pequeño mundo, red aleatoria de Erdős-Rényi, red aleatoria de tipo  $\delta$ , red fractal y red global. Adicionalmente, hemos estudiado el comportamiento del sistema en redes con interacción local y global, sujetas a un campo externo que puede interpretarse como la influencia de medios masivos o de una propaganda.

En redes con interacciones locales, hemos encontrado una transición de fase, desde un estado colectivo de diversidad o desorden para valores del umbral menores que un cierto valor crítico  $u_c$ , hacia un estado colectivo con una opinión mayoritaria para valores del umbral mayores que  $u_c$ . Para valores del umbral suficientemente grandes, es posible alcanzar un estado colectivo homogéneo. En el caso de una red unidimensional regular la interfase entre dominios siempre consiste en dos nodos, de forma que la posibilidad de crecimiento de los dominios en la red se restringe. Como consecuencia, el sistema no alcanza un estado colectivo con un sólo dominio o completamente homogénea.

Las redes aleatorias de Erdős-Rényi, de tipo  $\delta$  y la red de pequeño mundo con probabilidad de recableado igual a 1, exhiben una transición de fase, pero para un valor pequeño del umbral. Cabe esperar que sus comportamientos colectivos sean similares debido a que la topología de estas redes comparten características comunes a las redes aleatorias.

El comportamiento colectivo de la red de pequeño mundo es parecido al comportamiento de la red fractal. Esta similitud sugiere que la pirámide de Sierpinski forma dominios autosimilares que permiten reducir la distancia media efectiva entre dominios del sistema. En este sentido, las topologías de estas dos redes pueden considerarse similares, por lo tanto, sus comportamientos colectivos también son parecidos.

Hemos descubierto que en una red con interacciones globales no ocurre la transición de fase, sino que existe formación de un dominio mayoritario para cualquier valor del umbral. Para explicar este comportamiento, hemos argumentado que en esta red, el umbral mide la probabilidad de interacción inicial entre agentes; por lo tanto, la posibilidad de crecimiento de algún dominio, existe para todo valor  $u > 0$ . Investigando redes de pequeño mundo a medida que se incrementa el número de vecinos o la probabilidad de recableado para llegar al límite de interacción global, hemos demostrado que el comportamiento colectivo observado de una red global está relacionado con la presencia de interacciones de largo alcance.

Nuestros resultados permiten concluir que la transición de fase asociada a esta dinámica aparece cuando la red subyacente posee interacciones locales.

Finalmente, hemos explorado el comportamiento colectivo de una red con acoplamiento local y dinámica de opiniones valoradas sujeta a un campo externo. Este

comportamiento puede ser caracterizado por la ocurrencia de tres fases que dependen del umbral de interacción y de la intensidad del campo: una fase desordenada con diversidad de opiniones; una fase ordenada mayoritaria en un estado diferente del estado del campo; y una fase ordenada mayoritaria impuesta por el campo. En una red global, hemos encontrado que solamente emergen las últimas dos fases mencionadas.

El descubrimiento de la fase 2 es una de las contribuciones más importantes del presente trabajo. En el contexto de sistemas sociales, el surgimiento de un grupo mayoritario en un estado alternativo al que está tratando de imponer una propaganda o un mensaje de medios masivos es un fenómeno relevante que puede tener importantes interpretaciones y aplicaciones. Este efecto aparece en redes locales y globales, por lo cual puede ser observable en redes sociales reales sujetas a dinámica de opiniones valoradas en presencia de un campo externo (medios masivos).

Futuras extensiones de este trabajo incluyen la consideración de umbrales de interacciones heterogéneas, la presencia de líderes de opinión localizados en la red, la investigación de estados quiméricos, y la coevolución de la topología de la red con la dinámica de opinión discreta valorada.

# Bibliografía

- [1] K. Kaneko, I. Tsuda. 2000. *Complex Systems: Chaos and Beyond*, Springer.
- [2] R. Badii, A. Politi. 1997 *Complexity*, Cambridge University Press.
- [3] M. Mikhailov, V. Calenbuhr. 2002 *From Swarms to Societies: Models of Complex Behaviour*, Springer. (2002).
- [4] A. Barabási. 2002 *Linked: The New Science of Networks*, Perseus Publishing Co.
- [5] M. Newman, A. Barabási, D.J. Watts. 2006. *The structure and Dynamics of Networks*, Princeton University Press.
- [6] L. P. Kadanoff. 2000. *Statistical Physics: Statistics, Dynamics and Renormalization* (Singapore: World Scientific).
- [7] R. Axelrod. 1997. *The dissemination of culture*, J. Conflict. Res. **41**,203.
- [8] M. San Miguel, V.M. Eguíluz, R. Toral, and K. Klemm. 2005. *Computing in Science & Engineering*, **7**, 67.
- [9] Y. Shibantai, S. Yasuno, and I. Ishiguro. 2001. *Effects of global information feedback on diversity: extensions to Axelrod's adaptive culture model*. J. Conflict Resolution **45**, 80.
- [10] C. Castellano, M. Marsili, A. Vespignani. 2000. *Nonequilibrium phase transition in a model for social influence*, Phys. Rev. Lett. 85, 3536.
- [11] K. Klemm, V. M. Eguíluz, R. Toral, and M. San Miguel. 2003. *Nonequilibrium transitions in complex networks: A model of social interaction*, Phys. Rev. E **67**, 026120.

- [12] K. Klemm, V. M. Eguíluz, R. Toral, and M. San Miguel. 2003. *Global culture: A noise-induced transition in finite systems*, Phys. Rev. E **67**, 045101.
- [13] G. Deffuant, D. Neau, F. Amblard and G. Weisbuch. 2000. *Mixing beliefs among interacting agents*. Advances in Complex Systems 3 (01n04), 87-98.
- [14] C. Castellano, S. Fortunato, V. Loreto. 2009. *Statistical physics of social dynamics*. Reviews of modern physics 81 (2), 591.
- [15] J. C. González-Avella, M. G. Cosenza, V. M. Eguíluz and M. San Miguel. 2010. *Spontaneous ordering against an external field in non-equilibrium systems*. New Journal of Physics. New Journal of Physics 12 (1), 013010.
- [16] J. C. González-Avella, M. G. Cosenza, K. Klemm, V. M. Eguíluz and M. San Miguel. 2007. *Information Feedback and Mass Media Effects in Cultural Dynamics*. Journal of Artificial Societies and Social Simulation vol. 10, no. 3 9.
- [17] J.C. González-Avella, M.G. Cosenza c, M. San Miguel. 2014. *Localized coherence in two interacting populations of social agents*. Physica A 399, 24-30.
- [18] R. Likert. 1932. *A Tecnich for the Measurement of Attitudes*. Archives of Psychology 140.
- [19] P. Ball. 2004. *The Physical Modelling of Human Social Systems*. ComPlexUs Review 2003;1;190-206.
- [20] Escala de Likert. Tomado en Octubre del 2016: [https://es.wikipedia.org/wiki/Escala\\_Likert](https://es.wikipedia.org/wiki/Escala_Likert)
- [21] T. Toffoli, N. Margolus. 1987. *Cellular Automata Machines: A New Environment for Modeling*, MIT Press, p. 60.
- [22] M. E. J. Newman. 1999. *Small Worlds: The structure of Social Networks*. Santa Fe Institute. 99-12-080.
- [23] P. Erdős and A. Rényi. 1960. *On the Evolution of Random Graphs*. Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci. 5, 17-61.
- [24] M. G. Cosenza, R Kapral. 1992. *Coupled maps on fractal lattices*. Physical Review A 46 (4) 1850.