



Universidad de Los Andes
Centro de Física Fundamental
Área de Caos y Sistemas Complejos

**Sistemas Caóticos con Coexistencia
de Interacciones Globales Autónomas y Forzadas**

www.bdigital.ula.ve

Trabajo de grado presentado ante la ilustre
Universidad de Los Andes
como requisito parcial para optar al Título de:
Licenciado en Física

Presentado por:
Br. Victor Emmanuel Camargo Molina

Tutor:
Dr. Mario Cosenza

Mérida, Mayo del 2018

*A mis Padres, Victor y Roraima.
A mis Hermanas, Victoria y Valeria.*

www.bdigital.ula.ve

“Cuando todo vuelva a retirarse a la matriz del tiempo, reinará el caos de nuevo, y el caos es la partitura en la que está escrita la realidad.”

Henry Miller

Resumen

En la presente Tesis consideramos sistemas dinámicos sujetos simultáneamente a dos formas de influencias o campos globales: externo y autónomo. Estudios previos han considerado sistemas con interacciones globales externas o autónomas por separado. Proponemos un modelo de una red de mapas caóticos globalmente acoplados a través del campo medio del sistema y acoplados con un campo externo, donde ambos campos globales coexisten. Investigamos los estados colectivos de sincronización del sistema mediante el análisis de estabilidad de los exponentes de Lyapunov. Caracterizamos numéricamente diversos estados de sincronización en el espacio de parámetros del sistema: sincronización completa, sincronización generalizada, y estados desincronizados. Comparamos los resultados numéricos con las predicciones teóricas de estabilidad. En particular encontramos el surgimiento de sincronización generalizada aún cuando la forma funcional del campo externo es idéntica a la dinámica local de los mapas.

“La raíz de todo bien reposa en la tierra de la gratitud.”

Dalai Lama.

Agradecimientos

Durante toda esta maravillosa aventura que ha sido estudiar una carrera tan hermosa como es la Física, he vivido innumerables momentos y circunstancias que me han formado no sólo como investigador y profesional, sino también como persona. Quisiera poder encontrar las palabras para agradecer a mi familia lo que ha hecho por mí.

Al Glorioso Padre Creador, abscondita causa de lo conocido y por conocer.

A el Prof. Mario Cosenza, un faro de luz... Gracias por ser mi tutor y guiarme en el extraordinario viaje que ha sido este trabajo de investigación.

A mis Padres, Victor Hugo y Roraima, que todos los días infundieron en mí, amor, sabiduría, ánimo, paciencia, fuerza, dedicación, valentía...y un sin fin. Han sido y serán mis héroes!

A mis hermanitas Valeria y Victoria, que me enseñan tanto y me llenan de alegría!

A el Prof. Orlado Alvarez Llamaza, actualmente en Ecuador, por sus sugerencias y correcciones.

A todos mis compañeros caóticos, sin los cuales tampoco habria podido realizar este trabajo.

... y a todos aquellos que directa o indirectamente aportaron su granito de arena para que lograra alcanzar este momento, GRACIAS!

Índice general

Resumen	I
Agradecimientos	II
1. Introducción	1
2. Sistemas Dinámicos con Interacciones Globales Coexistentes	4
2.1. Campo Global Externo	4
2.2. Campo Global Autónomo	5
2.3. Interacciones Globales Coexistentes	6
2.4. Autovalores y Autovectores de la Matriz de Acoplamiento M	7
2.5. Análisis de estabilidad de estados sincronizados: Exponentes de Lyapunov	9
2.6. Caracterización Estadística de Estados Sincronizados	11
3. Estados de Sincronización en Redes de Mapas con Interacciones Globales Coexistentes	13
3.1. Mapa Local Logaritmico	13
3.2. Mapa Local Tienda	18
3.3. Mapa Local Aguirregabiria	21
3.4. Mapa Local Ulam	24
3.5. Mapa Local Potapov y Ali	27
4. Conclusiones	30
Bibliografía	32

“Hacer grandes cosas es difícil, pero ordenar grandes cosas lo es aún más.”

Friedrich Nietzsche.

Capítulo 1

Introducción

Los sistemas complejos son sistemas de elementos interactivos cuyos comportamientos colectivos no son susceptibles de ser derivados trivialmente a partir del análisis reduccionista de las propiedades de sus elementos constituyentes [1–5]. El estudio de dichos sistemas ha evolucionado en los últimos años como una convergencia de la Teoría del Caos, la Física Estadística y técnicas de simulación computacional de vanguardia. Se ha encontrado en los múltiples estudios realizados que estos sistemas poseen características de naturaleza universal, las cuales son independientes de su contexto. El estudio de sistemas complejos se ha mostrado como un campo de interés común entre científicos y profesionales de diversas especialidades, que ha llevado en la actualidad a plantearse interrogantes de sumo interés, que ha permitido revelar conexiones y relaciones entre múltiples disciplinas, dando lugar a un amplio y extenso proceso de interdisciplinariedad y colaboración que era muy poco usual en épocas anteriores, el cual ha logrado acortar e intersectar las fronteras que separaban estas ciencias. El estudio de los sistemas complejos se ha convertido en una de las áreas de investigación que ha mostrado un crecimiento sorprendente en los últimos años, y que está a la vanguardia en técnicas que permiten resolver problemas que antes parecían imposibles por su complejidad.

Muchos de estos sistemas exhiben interacciones globales, donde cada elemento puede interactuar con cualquier otro en el sistema; o equivalentemente todos los elementos están sujetos a una influencia común, que puede ser externa o endógena. La Figura 1.1 ilustra un sistema con interacciones globales entre sus elementos.

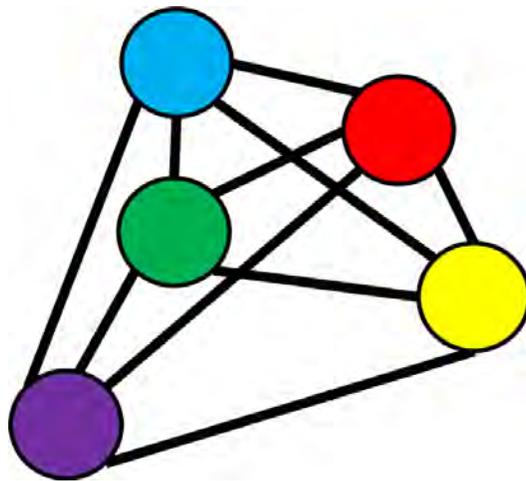


Figura 1.1: Esquema del acoplamiento global entre N elementos de un sistema,

Muchos sistemas físicos, químicos, biológicos, sociales y económicos poseen interacciones globales. Algunos de los ejemplos de sistemas con interacciones globales que han sido estudiados tenemos, osciladores acoplados [6,7], matrices de unión Josephson [8], ondas de densidad de carga [9], láseres multimodo [10], circuitos eléctricos paralelos, dinámica neuronal, sistemas ecológicos, modelos de evolución [11], intercambio económico [12], redes sociales [13], modelos de medios masivos [14], interacciones interculturales [15], etc.

Muchos de los estudios realizados en este contexto consideran influencias o campos globales externos, donde todos los elementos de un sistema están sujetos a un forzamiento común. Estos sistemas corresponden a sistemas dinámicos forzados, y existe una extensa literatura sobre el tema. Se han estudiado fenómenos como sincronización completa y sincronización generalizada en estos sistemas.

Por otro lado existe una gran cantidad de estudios sobre sistemas globalmente acoplados donde los elementos están sujetos a una función de acoplamiento autónoma; es decir que depende de los estados de sus elementos. Este tipo de sistemas son sistemas dinámicos autónomos, donde no hay influencia externa.

En particular, el estudio de sistemas con interacciones globales tiene mucho interés en el contexto de sistemas sociales. Por ejemplo, un campo externo actuando sobre un conjunto de agentes sociales se ha interpretado como una propaganda o un medio de comunicación masivo que influye sobre el sistema [16]. Un campo global autónomo se ha interpretado como la moda o la tendencia cultural dominante en un sistema social [15].

Se ha mostrado que el comportamiento colectivo de ambos tipos de sistemas dinámicos con interacciones globales son equivalentes. Fenómenos como sincronización, cluster, sincronización generalizada, estados quiméricos, han sido encontrados en sistemas sujetos a un campo global externo como un campo global autónomo [17–19].

En la presente Tesis consideramos sistemas dinámicos sujetos simultáneamente a ambos tipos de influencias o campos globales: externo y autónomo. Proponemos un modelo de una red de mapas caóticos globalmente acoplados a través del campo medio del sistema y acoplados con un campo externo, donde ambos campos globales coexisten. Investigamos los estados colectivos de sincronización del sistema mediante el análisis de estabilidad de los exponentes de Lyapunov. Hemos caracterizado diversos estados de sincronización en el espacio de parámetros del sistema: sincronización completa, sincronización generalizada, y estados desincronizados. En particular encontramos el surgimiento de sincronización generalizada cuando la forma funcional del campo externo es idéntica a la dinámica local de los mapas.

La presente Tesis está organizada de la siguiente manera.

En el Capítulo 2 presentamos nuestro modelo de una red de mapas acoplados con interacciones globales externa y autónoma coexistentes. Presentamos el análisis de estabilidad de los estados sincronizados, considerando los autovalores de la matriz de acoplamiento y los correspondientes exponentes de Lyapunov del sistema. Obtenemos expresiones analíticas para las fronteras de estabilidad de los estados de sincronización completa y sincronización generalizada. Introducimos dos cantidades estadísticas que permiten caracterizar los estados de sincronización completa y sincronización generalizada en el sistema.

En el Capítulo 3 procedemos a estudiar los estados de sincronización del modelo propuesto, para diferentes mapas caóticos como dinámica local. Nos enfocamos en mapas que presentan caos robusto, como también mapas caóticos unimodales. Caracterizamos los estados de sincronización de estos sistemas en el espacio de parámetros (ϵ_1, ϵ_2) , donde ϵ_1 es el parámetro de acoplamiento con el campo medio del sistema y ϵ_2 representa la intensidad del acoplamiento con el campo externo. Comparamos las fronteras de estabilidad para los distintos estados de sincronización obtenidas mediante simulaciones numéricas con aquellas obtenidas teóricamente.

El Capítulo 4 contiene las Conclusiones del presente trabajo y sugiere algunas ideas para extensiones futuras.

“La Física no es nada más que la búsqueda de la simplicidad, pero hasta ahora, todo lo que tenemos es una especie de elegante desorden.”

Bill Bryson.

Capítulo 2

Sistemas Dinámicos con Interacciones Globales Coexistentes

Una interacción global se puede describir como un campo que influye sobre todos los elementos constituyentes de un sistema. Como un modelo simple de un sistema sujeto a una interacción global, consideraremos un sistema de N mapas acoplados de la forma

$$\begin{cases} x_{t+1}^i = \omega(x_t^i, y_t), \\ y_{t+1} = \phi(y_t, x_t^j), \end{cases} \quad (2.1)$$

donde x_t^i es el estado del elemento i ($i = 1, 2, \dots, N$) en un paso discreto de tiempo t , y_t es un campo de interacción global que puede afectar cada mapa en un tiempo t , $j \in Q$ donde Q es un subconjunto de elementos en el sistema. La Ecuación 2.1 describe un sistema de elementos interactuando con un ambiente dinámico que puede recibir realimentación del sistema [17].

2.1. Campo Global Externo

Un campo global externo y_t posee su propia dinámica, independiente de la dinámica de los elementos, el cual viene dado por

$$\phi(y_t, x_t^j) = g(y_t). \quad (2.2)$$

Considerando el acoplamiento de los mapas con el campo externo en su forma difusiva, tenemos que

$$x_{t+1}^i = (1 - \epsilon)f(x_t^i) + \epsilon g(y_t), \quad (2.3)$$

donde f describe la dinámica local de los mapas, y ϵ es el parámetro de acoplamiento con el campo externo [17].

Es posible representar esquemáticamente el sistema Ec. 2.3, tal y como se muestra en la Figura 2.1, donde es fácil distinguir como actúa el campo externo $g(y_t)$ sobre todos los elementos constituyentes del sistema de mapas acoplados Ec. 2.3.

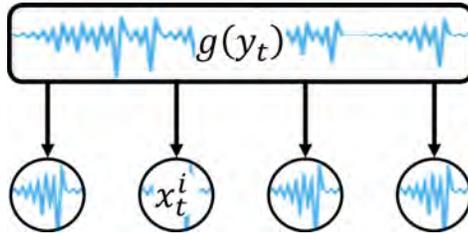


Figura 2.1: Campo externo $g(y_t)$ actuando sobre todos los elementos globalmente acoplados (x_t^i).

2.2. Campo Global Autónomo

Un campo global autónomo y_t puede ser representado por

$$\phi(y_t, x_t^j) = h(x_t^j | j \in Q_t), \quad (2.4)$$

donde h es una función de los estados de algún subconjunto Q_t de elementos en el sistema en un tiempo t . La función de acoplamiento h puede representar una restricción o una ley de conservación en el sistema [17].

Es posible representar esquemáticamente el sistema Ec. 2.4, tal y como se muestra en la Figura 2.2, donde podemos distinguir como actúa el campo autónomo $h_t(x_t^j)$ sobre todos los elementos constituyentes del sistema de mapas acoplados Ec. 2.4.

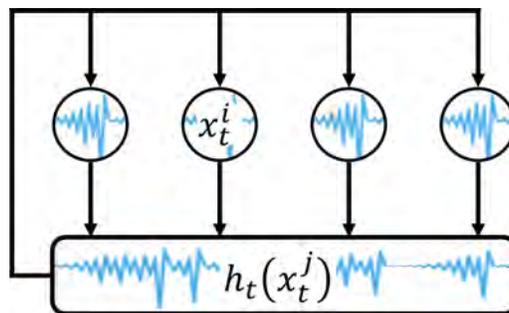


Figura 2.2: Campo global autónomo $h_t(x_t^j)$ actuando sobre todos los elementos globalmente acoplados (x_t^i).

2.3. Interacciones Globales Coexistentes

Como hemos descrito en la Introducción, la mayoría de los estudios realizados en sistemas con interacciones globales se han enfocado en campos externos o en funciones de acoplamiento global autónomo, tales como el campo medio del sistema.

En la presente Tesis consideramos un sistema sujeto simultáneamente a ambas formas de interacción global; es decir, un sistema donde coexisten un campo externo junto a un campo autónomo.

Como un modelo general de un sistema con interacciones globales coexistentes, introducimos una red de mapas caóticos con un acoplamiento global tanto autónomo como externo, en la forma siguiente

$$\begin{cases} x_{t+1}^i = (1 - \epsilon_1 - \epsilon_2)f(x_t^i) + \epsilon_1 h_t + \epsilon_2 g(y_t), \\ h_t = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f(x_t^j), \\ y_{t+1} = g(y_t), \end{cases} \quad (2.5)$$

donde x_t^i representa la variable de estado del elemento i ($i = 1, 2, \dots, N$) en un paso discreto de tiempo t , N es el tamaño de la red, $f(x_t^i)$ describe la dinámica caótica local de los mapas, $h_t(x_t^j)$ es el campo interno o autónomo del sistema que actúa homogéneamente sobre todos los elementos y que corresponde al campo medio del sistema en este caso, $g(y_t)$ es el campo externo que influye simultáneamente sobre dichos elementos, ϵ_1 es el parámetro de acoplamiento difusivo con el campo autónomo h , ϵ_2 expresa el acoplamiento con el forzamiento externo. En este trabajo asumiremos que $\epsilon_1 + \epsilon_2 = \epsilon = \text{cte}$.

En la Figura 2.3 se muestra una representación esquemática del sistema. Se puede observar que la señal del campo forzador actúa de manera unidireccional y simultáneamente con el campo medio sobre todos los elementos del sistema.

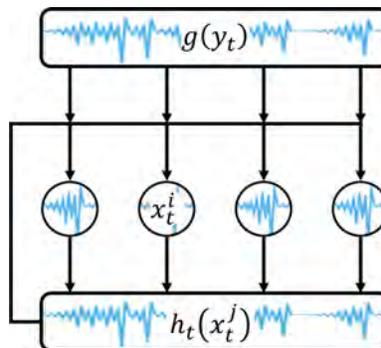


Figura 2.3: Representación esquemática del sistema Ec. 2.5, campo autónomo $h_t(x_t^j)$ y campo externo $g(y_t)$ actuando simultáneamente sobre todos los elementos globalmente acoplados (x_t^i).

La red de mapas Ec. 2.5, puede ser expresada de forma vectorial como

$$\mathbf{x}_{t+1} = (1 - \epsilon)\mathbf{I}\mathbf{f}(\mathbf{x}_t) + \frac{1}{N}\mathbf{C}\mathbf{f}(\mathbf{x}_t), \quad (2.6)$$

donde \mathbf{I} es la matriz identidad de $(N + 1) \times (N + 1)$ componentes, \mathbf{x}_t y $\mathbf{f}(\mathbf{x}_t)$ son vectores de la forma

$$\mathbf{x}_t = \begin{pmatrix} x_t^1 \\ x_t^2 \\ \vdots \\ x_t^N \\ y_t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}_t) = \begin{pmatrix} f(x_t^1) \\ f(x_t^2) \\ \vdots \\ f(x_t^N) \\ g(y_t) \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

y \mathbf{C} es la matriz de $(N + 1) \times (N + 1)$ componentes, que viene dada por

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & \cdots & \epsilon_1 & \epsilon_2 N \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \epsilon_1 & \cdots & \epsilon_1 & \epsilon_2 N \\ 0 & \cdots & 0 & \epsilon N \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Podemos simplificar la Ec. 2.6, escribiendola como sigue a continuación

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{M}\mathbf{f}(\mathbf{x}_t), \quad (2.9)$$

en donde \mathbf{M} es la matriz

$$\mathbf{M} = (1 - \epsilon)\mathbf{I} + \frac{1}{N}\mathbf{C}, \quad (2.10)$$

la cual expresa el acoplamiento difusivo entre todos los elementos de la red.

2.4. Autovalores y Autovectores de la Matriz de Acoplamiento \mathbf{M}

Para analizar la estabilidad de los estados de sincronización del sistema Ec. 2.9, es necesario obtener los exponentes de Lyapunov del sistema. Estos a su vez requieren del conocimiento de los autovalores de la matriz de acoplamiento \mathbf{M} .

Entonces, consideremos los autovalores y autovectores de \mathbf{M} , que satisfacen

$$\mathbf{M}\mathbf{u} = \mu_k \mathbf{u}. \quad (2.11)$$

Podemos observar que encontrar los $N + 1$ autovalores μ_k de \mathbf{M} implica hallar los $N + 1$ autovalores de \mathbf{I} y \mathbf{C} . Por lo tanto tenemos que

$$\mu_k = (1 - \epsilon)I_k + \frac{1}{N}c_k. \quad (2.12)$$

Los autovalores de la matriz identidad son triviales, siendo todos iguales a uno ($I_k = 1$), entonces tenemos que hallar sólo los autovalores c_k asociados a \mathbf{C} , dados por

$$\mathbf{C}\mathbf{u} = c_k\mathbf{u}. \quad (2.13)$$

Procediendo, resolvemos la ecuación característica

$$|\mathbf{C} - c_k\mathbf{I}| = 0, \quad (2.14)$$

la cual tiene las siguientes soluciones

$$\begin{cases} c_1 = \epsilon N & \text{para } k = 1, \\ c_2 = \epsilon_1 N & \text{para } k = 2, \\ c_k = 0 & \text{para } k > 2 \quad (N - 1) - \text{ veces degenerado.} \end{cases} \quad (2.15)$$

Para el autovalor $c_1 = \epsilon N$, se tiene un autovector asociado \mathbf{u}_1 donde todas sus componentes son iguales a uno, para $c_2 = \epsilon_1 N$ un autovector \mathbf{u}_2 cuyas componentes son todas iguales a uno excluyendo la componente $(N + 1)$ que tiene un valor igual a cero, entonces se tiene que

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Para el autovalor $c_k = 0$ corresponde un conjunto de autovectores \mathbf{u}_k de la forma

$$\mathbf{u}_k = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

donde todas las componentes a_k satisfacen la condición

$$\sum_{k=1}^N a_k = 0, \quad (2.18)$$

de manera que el autovector \mathbf{u}_k sea ortogonal a los autovectores \mathbf{u}_1 y \mathbf{u}_2 .

Entonces, los autovectores de la matriz \mathbf{M} están dados por

$$\begin{cases} \mu_1 = 1, \\ \mu_2 = 1 - \epsilon_2, \\ \mu_k = 1 - \epsilon \quad \forall k > 2, \quad (N - 1) - \text{ veces degenerado.} \end{cases} \quad (2.19)$$

2.5. Análisis de estabilidad de estados sincronizados: Exponentes de Lyapunov

Los exponentes de Lyapunov están relacionados con los autovalores de la matriz Jacobiana \mathbf{J} del sistema Ec. 2.9. Las componentes de la matriz Jacobiana están dadas por

$$J_{ij} = m_{ij} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \quad (2.20)$$

donde

$$m_{ij} = (1 - \epsilon)\delta_{ij} + \frac{1}{N}c_{ij}. \quad (2.21)$$

Por tanto, podemos escribir

$$J_{ij} = \left[(1 - \epsilon)\delta_{ij} + \frac{1}{N}c_{ij} \right] \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \quad (2.22)$$

donde J_{ij} es una matriz $(N + 1) \times (N + 1)$, $[\mathbf{f}(\mathbf{x}_t)]_i = f_i$ son las i - componentes vectoriales de $\mathbf{f}(\mathbf{x}_t)$, y c_{ij} son las ij - componentes de \mathbf{C} .

Como ejemplo, consideremos el caso $N = 2$, donde las matrices \mathbf{C} y \mathbf{M} corresponden a

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & \epsilon_1 & \epsilon_2 N \\ \epsilon_1 & \epsilon_1 & \epsilon_2 N \\ 0 & 0 & \epsilon N \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 - \epsilon_2 - \frac{\epsilon_1}{2} & \frac{\epsilon_1}{2} & \epsilon_2 \\ \frac{\epsilon_1}{2} & 1 - \epsilon_2 - \frac{\epsilon_1}{2} & \epsilon_2 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix}, \quad (2.23)$$

y la matriz Jacobiana \mathbf{J} está dada por

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} (1 - \epsilon_2 - \frac{\epsilon_1}{2})f'(x_t^1) & \frac{\epsilon_1}{2}f'(x_t^2) & \epsilon_2 g'(y_t) \\ \frac{\epsilon_1}{2}f'(x_t^1) & (1 - \epsilon_2 - \frac{\epsilon_1}{2})f'(x_t^2) & \epsilon_2 g'(y_t) \\ 0 & 0 & g'(y_t) \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

Los $(N + 1)$ exponentes de Lyapunov $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{N+1})$ del sistema Ec. 2.9 están dados, por definición, como

$$(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \dots, e^{\lambda_{N+1}}) = \text{magnitud de autovalores de } \lim_{T \rightarrow \infty} \left| \prod_{t=0}^{T-1} \mathbf{J}(\mathbf{x}_t) \right|^{\frac{1}{T}}, \quad (2.25)$$

donde

$$\prod_{t=0}^{T-1} \mathbf{J}(\mathbf{x}_t) = \mathbf{J}(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}_1) \cdots \mathbf{J}(\mathbf{x}_{T-1}). \quad (2.26)$$

Los autovalores γ_k de la matriz Jacobiana \mathbf{J} satisfacen

$$\mathbf{J}\mathbf{u}_k = \gamma_k \mathbf{u}_k \quad (2.27)$$

y corresponden a

$$\gamma_k(t) = \mu_k f'(x_t^i) = \begin{cases} \mu_1 g'(y_t), \\ \mu_2 f'(x_t^i), \\ \mu_3 f'(x_t^i), \end{cases} \quad (2.28)$$

los cuales dependen de t .

Observemos que

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}_t) [\mathbf{J}(\mathbf{x}_{t+1}) \mathbf{u}_k] = \gamma_k(t) [\mathbf{J}(\mathbf{x}_{t+1}) \mathbf{u}_k] = \gamma_k(t) \gamma_k(t+1) \mathbf{u}_k, \quad (2.29)$$

luego,

$$\begin{aligned} \prod_{t=0}^{T-1} \mathbf{J}(\mathbf{x}_t) \mathbf{u}_k &= \gamma_k(0) \gamma_k(1) \cdots \gamma_k(T-1) \mathbf{u}_k \\ &= \left(\mu_k^T \prod_{t=0}^{T-1} f'(x_t^i) \right) \mathbf{u}_k. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Comparando la Ec. 2.30 con la definición para los exponentes de Lyapunov 2.25, nos damos cuenta que

$$\begin{aligned} e^{\lambda_k} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left| \mu_k^T \prod_{t=0}^{T-1} f'(x_t^i) \right|^{\frac{1}{T}} \\ &= |\mu_k| \lim_{T \rightarrow \infty} \left| \prod_{t=0}^{T-1} f'(x_t^i) \right|^{\frac{1}{T}}, \end{aligned} \quad (2.31)$$

luego,

$$\lambda_k = \ln |\mu_k| + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \ln |f'(x_t^i)|,$$

y por lo tanto los exponentes de Lyapunov λ_k vienen dados por

$$\lambda_k = \ln |\mu_k| + \lambda_f, \quad (2.32)$$

donde λ_f es el exponente de Lyapunov del mapa f , calculado con los iterados de un elemento x_t^i del sistema Ec. 2.9.

Sustituyendo los respectivos autovalores μ_k , los exponentes de Lyapunov λ_k del sistema Ec. 2.9 son

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_g, \\ \lambda_2 = \ln(1 - \epsilon_2) + \lambda_f, \\ \lambda_3 = \ln(1 - \epsilon_1 - \epsilon_2) + \lambda_f, \end{cases} \quad (2.33)$$

donde λ_g es el exponente de Lyapunov del mapa forzador $g(y_t)$, el cual es positivo por cuanto $g(y_t)$ es asumido caótico.

El estado sincronizado ocurre cuando $x_t^i = x_t^j \forall i, j$ en un tiempo t . El análisis de estabilidad lineal de este estado corresponde a la condición

$$|\mu_k e^{\lambda_f}| < 1, \quad (2.34)$$

la cual es equivalente a $\lambda_k < 0$. Esta condición sólo puede ser satisfecha con los exponentes de Lyapunov λ_2 y λ_3 .

El exponente de Lyapunov λ_3 está relacionado con el autovalor $\mu_3 = 1 - \epsilon = 1 - \epsilon_1 - \epsilon_2$. Luego la condición para la estabilidad del estado asociado al autovector $\mathbf{u}_2 = (1, 1, \dots, 0)$ es

$$(1 - \epsilon_1 - \epsilon_2)e^{\lambda_f} < 1. \quad (2.35)$$

Esta es la condición de estabilidad de un estado donde los elementos están sincronizados entre sí pero no con el forzador y_t , denominado *sincronización generalizada*. Esta condición se puede escribir como

$$\epsilon_1 > A - \epsilon_2 \quad \text{donde} \quad A = 1 - \frac{1}{e^{\lambda_f}}. \quad (2.36)$$

Por otro lado, el exponente de Lyapunov λ_2 está asociado con el autovalor $\mu_2 = 1 - \epsilon_2$. Luego, la condición para la estabilidad del estado correspondiente al autovector $\mathbf{u}_1 = (1, 1, \dots, 1)$ es

$$(1 - \epsilon_2)e^{\lambda_f} < 1, \quad (2.37)$$

y corresponde a la condición de estabilidad de un estado donde los elementos están sincronizados entre sí y con el forzador y_t , denotado como *sincronización completa*. Esta condición se puede escribir como

$$\epsilon_2 > A. \quad (2.38)$$

Las ecuaciones 2.36 y 2.38 proveen las fronteras teóricas en el espacio de parámetros (ϵ_1, ϵ_2) que dividen las regiones donde ocurren los fenómenos de sincronización generalizada y sincronización completa, respectivamente para nuestro sistema Ec. 2.5.

2.6. Caracterización Estadística de Estados Sincronizados

La sincronización en el sistema Ec. 2.5 corresponde a un estado $x_t^i = x_t^j \forall i, j$ en un tiempo t , el cual puede ser descrito por la condición $x_t^i = \bar{x}_t \forall i$, donde \bar{x}_t es el campo medio instantáneo del sistema

$$\bar{x}_t = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_t^i. \quad (2.39)$$

Con el objetivo de caracterizar los estados posibles de sincronización en el sistema, consideramos la desviación estándar asintótica $\langle \sigma \rangle$ (después de descartar un número de transientes) de la desviación estándar instantánea σ_t de la distribución de variables de estado x_t^i , definida como

$$\sigma_t = \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_t^i - \bar{x}_t)^2 \right]^{1/2}, \quad (2.40)$$

$$\langle \sigma \rangle = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \sigma_t. \quad (2.41)$$

Un estado sincronizado corresponde a $\langle \sigma \rangle = 0$. También usamos la diferencia

$$\delta_t = |\bar{x}_t - y_t|, \quad (2.42)$$

de la cual tomamos en cuenta la diferencia promedio asintótica

$$\langle \delta \rangle = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \delta_t. \quad (2.43)$$

Dos formas de sincronización son posibles en el sistema. La primera es *sincronización completa*, dada por la condición $x_t^i = \bar{x}_t = y_t$, en la cual todos los elementos están sincronizados entre sí y con el campo externo. Se caracteriza por $\langle \sigma \rangle = 0$ y $\langle \delta \rangle = 0$. Para nuestro sistema Ec. 2.5, la sincronización completa corresponde al estado

$$\mathbf{x}(t) = a_t \mathbf{u}_1, \quad (2.44)$$

donde \mathbf{u}_1 es el autovector homogéneo de la matriz \mathbf{M} .

El segundo tipo de sincronización es la *sincronización generalizada*, donde los elementos están sincronizados entre sí pero no con el campo externo; es decir, cumplen con la condición $x_t^i = \bar{x}_t \neq y_t$, y se caracterizan por $\langle \sigma \rangle = 0$ y $\langle \delta \rangle \neq 0$. Este estado se relaciona con el autovector \mathbf{u}_2 ,

$$\mathbf{x}(t) = a_t \mathbf{u}_2. \quad (2.45)$$

En la práctica consideramos el criterio numérico $\langle \sigma \rangle < 10^{-7}$ y $\langle \delta \rangle < 10^{-7}$ para caracterizar los valores cero de estas dos cantidades estadísticas.

“Lo importante en la ciencia no es tanto obtener nuevos datos, sino descubrir nuevas formas de pensar sobre ellos.”

William Lawrence Bragg.

Capítulo 3

Estados de Sincronización en Redes de Mapas con Interacciones Globales

Coexistentes

En este Capítulo estudiaremos los estados colectivos de sincronización de redes de mapas acoplados sujetos a las influencias simultáneas de un campo global externo y de un campo global autónomo correspondiente al campo medio del sistema. Las ecuaciones que rigen la dinámica del sistema fueron presentadas en el Capítulo 2, y son las siguientes:

$$x_{t+1}^i = (1 - \epsilon_1 - \epsilon_2)f(x_t^i) + \frac{\epsilon_1}{N} \sum_{j=1}^N f(x_t^j) + \epsilon_2 g(y_t), \quad (3.1)$$

$$y_{t+1} = g(y_t), \quad (3.2)$$

Tendremos en cuenta varias funciones f para la dinámica local de los elementos y funciones g para el mapa forzador.

3.1. Mapa Local Logaritmico

Consideremos el sistema globalmente acoplado Ec. 3.1, donde la dinámica local está dada por el mapa Logaritmico

$$f(x) = b + \ln |x|. \quad (3.3)$$

Este mapa fue introducido por Takeshi Kawabe y Yoshiro Kondo [20], y se caracteriza por no poseer ventanas de periodicidad ni bandas caóticas en todo el intervalo de parámetros $b \in [-1, 1]$, tal como se muestra en la Figura 3.1 correspondiente a su diagrama de bifurcación en función del parámetro b . Este mapa presenta caos robusto en el intervalo $b \in [-1, 1]$.

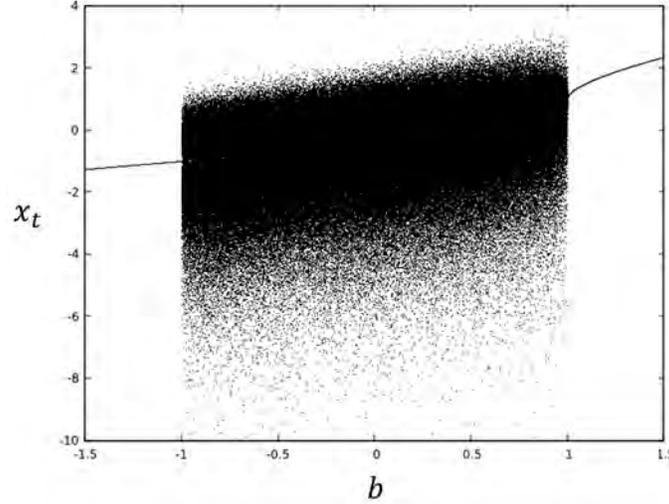


Figura 3.1: Diagrama de bifurcación del mapa 3.3 en función del parámetro local b .

Los exponentes de Lyapunov del sistema Ec. 3.1 pueden calcularse a partir de un sistema con tamaño mínimo $N = 2$, debido a la degeneración del exponente de Lyapunov λ_3 . Entonces, consideramos el sistema reducido siguiente,

$$x_{t+1}^1 = (1 - \epsilon_1 - \epsilon_2)f(x_t^1) + \frac{\epsilon_1}{2}[f(x_t^1) + f(x_t^2)] + \epsilon_2g(y_t), \quad (3.4)$$

$$x_{t+1}^2 = (1 - \epsilon_1 - \epsilon_2)f(x_t^2) + \frac{\epsilon_1}{2}[f(x_t^1) + f(x_t^2)] + \epsilon_2g(y_t), \quad (3.5)$$

$$y_{t+1} = g(y_t), \quad (3.6)$$

Consideraremos el caso $g = f = -0.7 + \ln|x|$; es decir, el forzamiento es idéntico a la dinámica local. Los exponentes de Lyapunov Ec. 2.33 están dados por

$$\lambda_1 = \lambda_g = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \ln |g'(y_t)|, \quad (3.7)$$

$$\lambda_2 = \ln(1 - \epsilon_2) + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \ln |f'(x_t^i)|, \quad (3.8)$$

$$\lambda_3 = \ln(1 - \epsilon_1 - \epsilon_2) + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \ln |f'(x_t^i)|. \quad (3.9)$$

En la Figura 3.2 se muestran los exponentes de Lyapunov del sistema Ec. 3.6 en función del parámetro de acoplamiento ϵ_2 para un valor fijo $\epsilon_1 = 0.2$. Podemos observar las transiciones

de valores positivos a negativos en los exponentes de Lyapunov λ_3 y λ_2 que señalan cambios en el atractor del sistema. La condición $\lambda_3 < 0$ implica estabilidad del estado de sincronización generalizada, donde $x_t^i = \bar{x}_t \neq y_t$; mientras que la condición $\lambda_3 < 0$ y $\lambda_2 < 0$ implica estabilidad de la sincronización completa, donde $x_t^i = \bar{x}_t = y_t$.

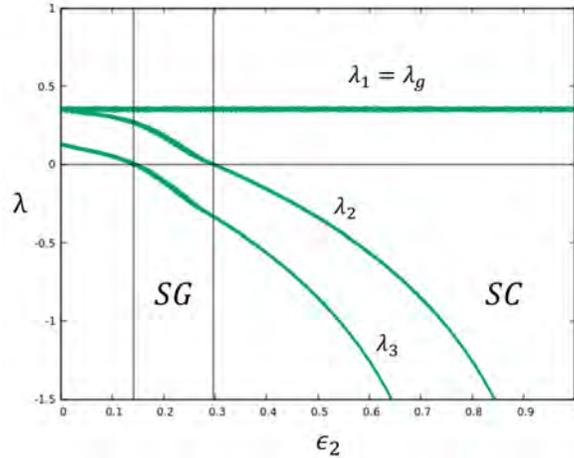


Figura 3.2: Exponentes de Lyapunov del sistema Ec. 3.6 con $g = f = -0.7 + \ln|x|$ en función del parámetro de acoplamiento ϵ_2 , con $\epsilon_1 = 0.2$. Las etiquetas indican SG: sincronización generalizada; SC: sincronización completa.

Los estados de sincronización también pueden ser caracterizados mediante las cantidades estadísticas $\langle \sigma \rangle$ y $\langle \delta \rangle$. La Figura 3.3 muestra estas cantidades en función del parámetro ϵ_2 con $\epsilon_1 = 0.2$ fijo, para el sistema Ec. 3.1 con $N = 5000$ y $g = f = -0.7 + \ln|x|$. La región de sincronización generalizada corresponde a $\langle \sigma \rangle = 0$ y $\langle \delta \rangle \neq 0$; la región de sincronización completa ocurre para $\langle \sigma \rangle = 0$ y $\langle \delta \rangle = 0$

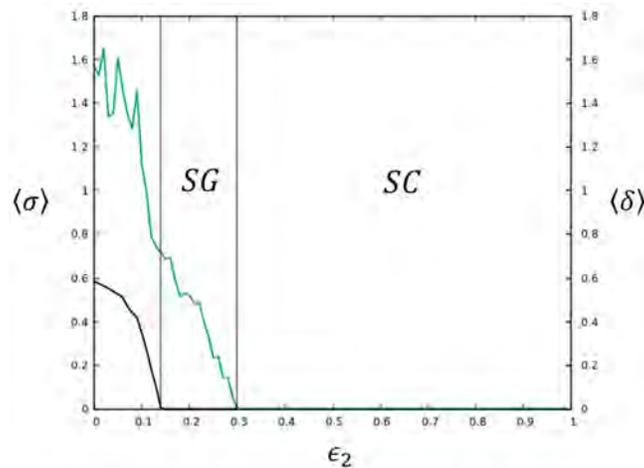


Figura 3.3: Cantidades $\langle \sigma \rangle$ (línea negra) y $\langle \delta \rangle$ (eje vertical derecho, línea verde) para el sistema Ec. 3.1 en función de ϵ_2 , con $\epsilon_1 = 0.2$, $N = 5000$, $g = f = -0.7 + \ln|x|$. Estas cantidades fueron calculadas con 5000 iteraciones, despreciando 2000 transientes, y por lo tanto $T = 3000$ iterados después de los transientes. Las etiquetas indican SG: sincronización generalizada; SC: sincronización completa.

La Figura 3.4 muestra los estados colectivos de sincronización del sistema Ec. 3.1 en el espacio de parámetros (ϵ_1, ϵ_2) con $g = f = -0.7 + \ln|x|$. La frontera que separa la región desincronizada de la región de sincronización generalizada corresponde a la condición $\langle\sigma\rangle = 0$, mientras que la frontera que separa la región desincronizada de la región de sincronización completa corresponde a la condición $\langle\delta\rangle = 0$. La Figura 3.4 muestra también las curvas teóricas $\epsilon_1 = A - \epsilon_2$ y $\epsilon_2 = A$, que separan estas regiones, donde $A = 1 - e^{-\lambda_f}$. Observamos que las fronteras determinadas numéricamente (línea verde) concuerdan muy bien con las curvas teóricas (línea negra).

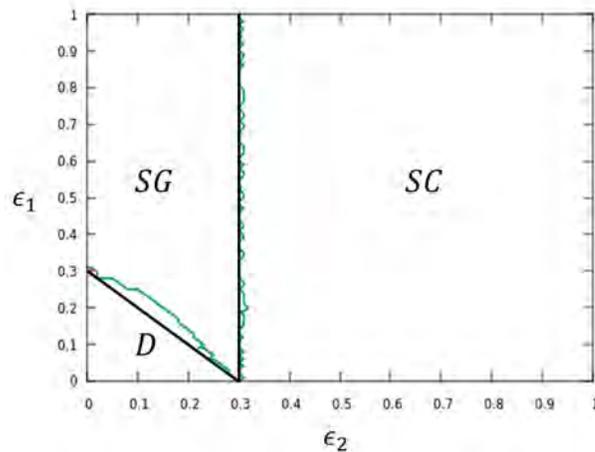


Figura 3.4: Estados de sincronización para el sistema Ec. 3.1, en el espacio de parámetros (ϵ_1, ϵ_2) , con $g = f = -0.7 + \ln|x|$ y $N = 5000$. También se indican las fronteras teóricas (línea negra) que separan las regiones. Las etiquetas indican D: desincronización; SG: sincronización generalizada; SC: sincronización completa.

La observación de sincronización generalizada en un sistema sujeto a interacciones globales interna y externa coexistentes, con la función de forzamiento igual a la dinámica de los elementos ($g = f$), constituye uno de los resultados más relevantes de la presente Tesis. Cabe destacar que sincronización generalizada ocurre en sistemas forzados donde $g \neq f$ [21]; o en la forma de sincronización débil en sistemas forzados con $g = f$ [22]. Por otro lado, sincronización generalizada en sistemas con acoplamiento global autónomo ha sido encontrada cuando la función de acoplamiento h_t es distinta del campo medio [18]. En nuestro caso, la coexistencia de las dos formas de acoplamiento global permiten el surgimiento de sincronización generalizada aún cuando $g = f$ y h_t es igual al campo medio.

La Figura 3.4 revela que sincronización generalizada, ausente en un sistema autónomo ($\epsilon_1 = 0$), puede ser inducida por la adición de un forzamiento $g = f$ en un rango de parámetros (ϵ_1, ϵ_2) .

Para entender la naturaleza de la sincronización generalizada cuando $g = f$ en el sistema Ec. 3.1, en la Figura 3.5 mostramos el atractor obtenido con las series de tiempo de las variables y_t y \bar{x}_t , para valores de parámetros en la región SG. Existe una relación funcional no trivial entre y_t

y \bar{x}_t distinta de la identidad. Esta es la característica fundamental de un estado de sincronización generalizada entre dos variables acopladas.

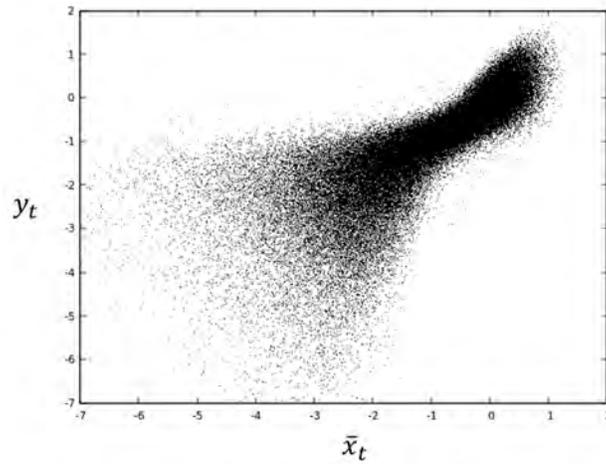


Figura 3.5: Atractor de las variables (\bar{x}_t, y_t) asociado al sistema Ec. 3.1 con $\epsilon_1 = 0.4$, $\epsilon_2 = 0.2$, $g = f = -0.7 + \ln|x|$, $N = 5000$.

Por ultimo la Figura 3.6 muestra los estados de sincronización del sistema Ec. 3.1 para $g \neq f$, con $g(y_t) = 0.5 + \ln|y_t|$ y $f(x_t) = -0.7 + \ln|x_t|$. En este caso, no es posible la sincronización completa $x_t^i = \bar{x}_t = y_t$; sólo ocurre sincronización generalizada.

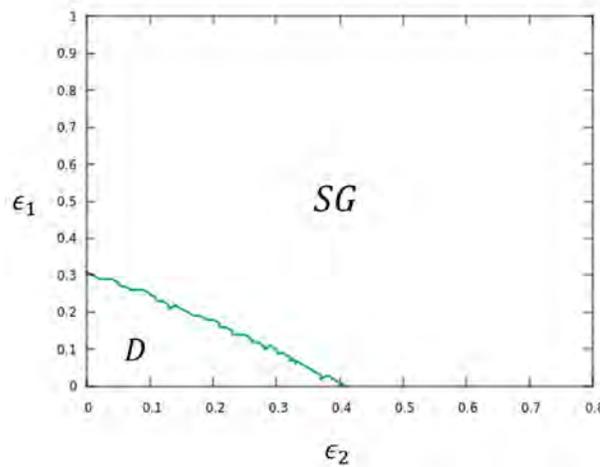


Figura 3.6: Región donde ocurre sincronización generalizada, caracterizada por $\langle \sigma \rangle = 0$ y $\langle \delta \rangle \neq 0$, para el sistema Ec. 3.1 con $N = 5000$, $g(y_t) = 0.5 + \ln|y_t|$ y $f(x_t) = -0.7 + \ln|x_t|$.

La Figura 3.7 muestra el atractor obtenido con las series de tiempo de las variables y_t y \bar{x}_t , para valores de parámetros en la región SG. La sincronización generalizada en el mapa bidimensional resultante se manifiesta mediante la aparición de un atractor extraño. Esto indica que existe una relación funcional no trivial entre y_t y \bar{x}_t distinta de la identidad, característica fundamental de un estado de sincronización generalizada entre dos variables acopladas.

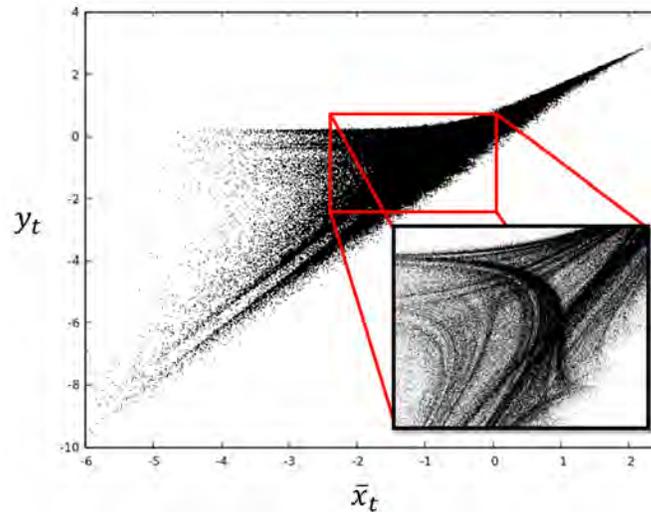


Figura 3.7: Atractor de las variables (\bar{x}_t, y_t) asociado al sistema Ec. 3.1 con $\epsilon_1 = 0.2$, $\epsilon_2 = 0.6$, $g(y_t) = 0.5 + \ln |y_t|$, $f(x_t) = -0.7 + \ln |x_t|$ y $N = 5000$. El recuadro muestra una magnificación del área encerrada en el rectángulo rojo, evidenciando la naturaleza fractal del atractor.

3.2. Mapa Local Tienda

Consideremos el sistema globalmente acoplado Ec. 3.1, donde la dinámica local está dada por el mapa Tienda

$$f(x) = \left(\frac{r}{2}\right) |1 - (2x)|. \quad (3.10)$$

La Figura 3.8 corresponde a su diagrama de bifurcación en función del parámetro r . Este mapa presenta caos robusto para $r > 1$.

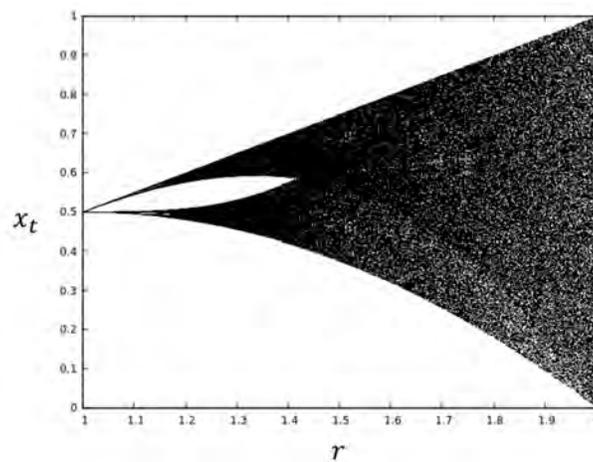


Figura 3.8: Diagrama de bifurcación del mapa 3.10 en función del parámetro local r .

En la Figura 3.9 se muestran los exponentes de Lyapunov del sistema Ec. 3.6 en función del parámetro de acoplamiento ϵ_2 para un valor fijo $\epsilon_1 = 0.2$. Podemos observar las transiciones

de valores positivos a negativos en los exponentes de Lyapunov λ_3 y λ_2 que señalan cambios en el atractor del sistema. La condición $\lambda_3 < 0$ implica estabilidad del estado de sincronización generalizada, donde $x_t^i = \bar{x}_t \neq y_t$; mientras que la condición $\lambda_3 < 0$ y $\lambda_2 < 0$ implica estabilidad de la sincronización completa, donde $x_t^i = \bar{x}_t = y_t$.

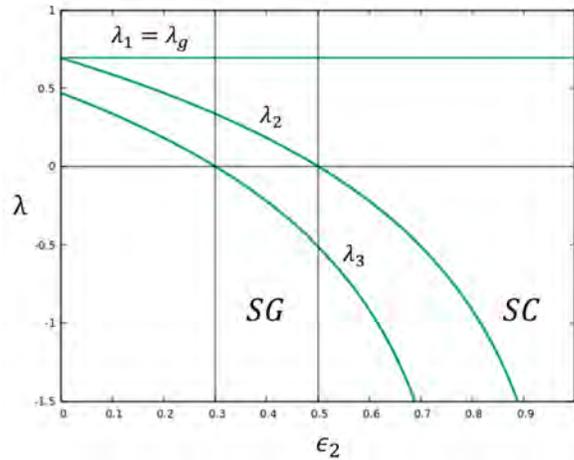


Figura 3.9: Exponentes de Lyapunov del mapa 3.10 con $r = 2$ para el sistema Ec. 3.1 en función del parámetro de acoplamiento ϵ_2 con $\epsilon_1 = 0.2$. Las etiquetas indican SG: sincronización generalizada; SC: sincronización completa.

Caracterizamos los estados de sincronización mediante las cantidades estadísticas $\langle \sigma \rangle$ y $\langle \delta \rangle$. La Figura 3.10 muestra estas cantidades en función del parámetro ϵ_2 con $\epsilon_1 = 0.2$ fijo, para el sistema Ec. 3.1 un tamaño $N = 5000$ y $g = f$ con $r = 2$. La región de sincronización generalizada corresponde a $\langle \sigma \rangle = 0$ y $\langle \delta \rangle \neq 0$; la región de sincronización completa ocurre para $\langle \sigma \rangle = 0$ y $\langle \delta \rangle = 0$

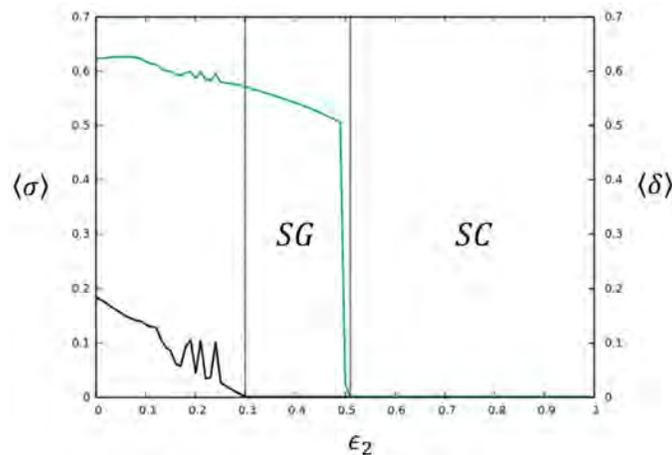


Figura 3.10: Cantidades $\langle \sigma \rangle$ (línea negra) y $\langle \delta \rangle$ (eje vertical derecho, línea verde) para el sistema Ec. 3.1 en función de ϵ_2 , con $\epsilon_1 = 0.2$, $N = 5000$, $g = f$ con $r = 2$. Estas cantidades fueron calculadas con 5000 iteraciones, despreciando 2000 transientes, y por lo tanto $T = 3000$ iterados después de los transientes. Las etiquetas indican SG: sincronización generalizada; SC: sincronización completa.

La Figura 3.11 muestra los estados colectivos de sincronización del sistema Ec. 3.1 en el espacio de parámetros (ϵ_1, ϵ_2) para $g = f$ con $r = 2$. La frontera que separa la región desincronizada de la región de sincronización generalizada corresponde a la condición $\langle \sigma \rangle = 0$, mientras que la frontera que separa la región desincronizada de la región de sincronización completa corresponde a la condición $\langle \delta \rangle = 0$. La Figura 3.11 muestra también las curvas teóricas $\epsilon_1 = A - \epsilon_2$ y $\epsilon_2 = A$, que separan estas regiones, donde $A = 1 - e^{-\lambda_f}$. Observamos que las fronteras determinadas numéricamente (línea azul) concuerdan muy bien con las curvas teóricas (línea negra).

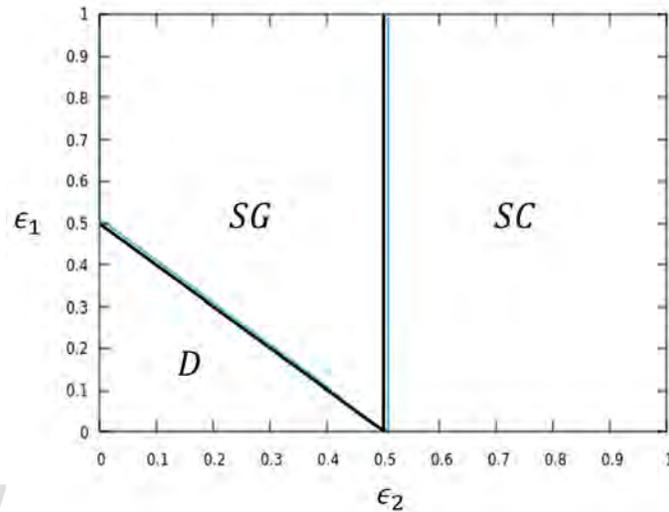


Figura 3.11: Estados de sincronización para el sistema Ec. 3.1, en el espacio de parámetros (ϵ_1, ϵ_2) , para $g = f$ con $r = 2$ y $N = 5000$. También se indican las fronteras teóricas (línea negra) que separan las regiones. Las etiquetas indican D: desincronización; SG: sincronización generalizada; SC: sincronización completa.

La Figura 3.11 nos revela nuevamente que sincronización generalizada, ausente en un sistema autónomo ($\epsilon_1 = 0$), puede ser inducida por la adición de un forzamiento $g = f$ en un rango de parámetros (ϵ_1, ϵ_2) .

Para entender la naturaleza de la sincronización generalizada cuando $g = f$ en el sistema Ec. 3.1, en la Figura 3.12 mostramos el atractor obtenido con las series de tiempo de las variables y_t y \bar{x}_t , para valores de parámetros en la región SG. La sincronización generalizada en el mapa bidimensional resultante es manifestada mediante la aparición de un atractor extraño. Esto indica que existe una relación funcional no trivial entre y_t y \bar{x}_t distinta de la identidad. Esta es la característica fundamental de un estado de sincronización generalizada entre dos variables acopladas.

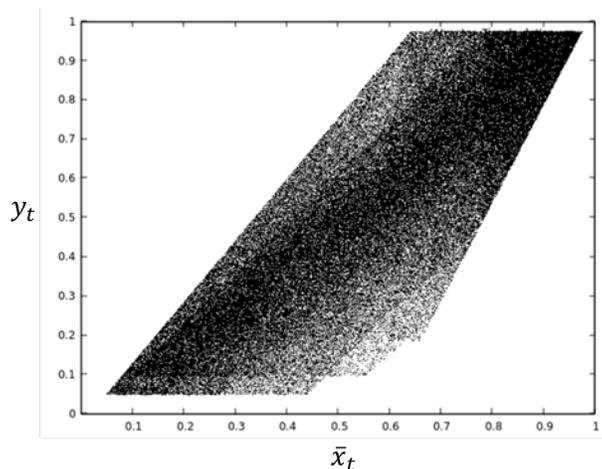


Figura 3.12: Atractor de las variables (\bar{x}_t, y_t) asociado al sistema Ec. 3.1 con $\epsilon_1 = 0.9$, $\epsilon_2 = 0.4$, $g = f$ con $r = 2$ y $N = 5000$.

3.3. Mapa Local Aguirregabiria

Consideremos el sistema globalmente acoplado Ec. 3.1, donde la dinámica local está dada por el mapa de Aguirregabiria

$$f(x) = \sin^2(r \arcsin(\sqrt{x})). \quad (3.11)$$

Este mapa fue introducido por Juan M. Aguirregabiria [23], y se caracteriza por no poseer ventanas de periodicidad ni bandas caóticas, tal como se muestra en la Figura 3.13 correspondiente a su diagrama de bifurcación en función del parámetro r . Este mapa presenta caos robusto en casi todo el intervalo $r > 1$.

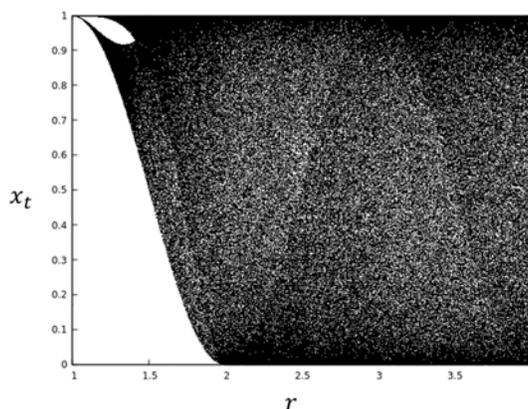


Figura 3.13: Diagrama de bifurcación del mapa 3.11 en función del parámetro local r .

En la Figura 3.14 se muestran los exponentes de Lyapunov del sistema Ec. 3.6 en función del parámetro de acoplamiento ϵ_2 para un valor fijo $\epsilon_1 = 0.2$. Podemos observar las transiciones de valores positivos a negativos en los exponentes de Lyapunov λ_3 y λ_2 que señalan cambios

en el atractor del sistema. La condición $\lambda_3 < 0$ implica estabilidad del estado de sincronización generalizada, donde $x_t^i = \bar{x}_t \neq y_t$; mientras que la condición $\lambda_3 < 0$ y $\lambda_2 < 0$ implica estabilidad de la sincronización completa, donde $x_t^i = \bar{x}_t = y_t$.

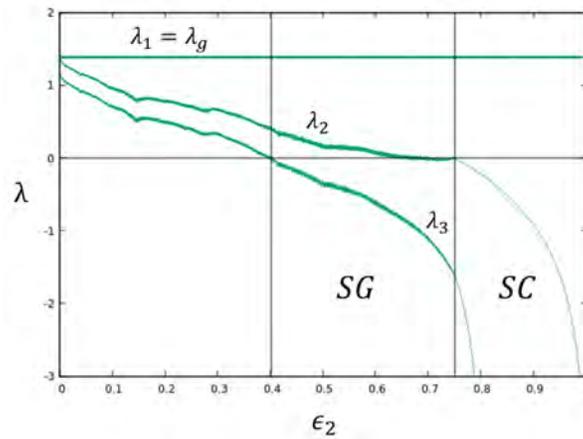


Figura 3.14: Exponentes de Lyapunov del mapa 3.11 con $r = 4$ para el sistema Ec. 3.6 en función del parámetro de acoplamiento ϵ_2 con $\epsilon_1 = 0.2$. Las etiquetas indican SG: sincronización generalizada; SC: sincronización completa.

Notemos que el exponente λ_2 tiende a cero tangencialmente antes de la región de sincronización completa, donde $\lambda_2 < 0$. La tangencia de λ_2 señala una sincronización marginal, o sincronización generalizada débil [24].

Caracterizamos los estados de sincronización mediante las cantidades estadísticas $\langle \sigma \rangle$ y $\langle \delta \rangle$. La Figura 3.15 muestra estas cantidades en función del parámetro ϵ_2 con $\epsilon_1 = 0.2$ fijo, para el sistema Ec. 3.1 para $N = 5000$ y $g = f$ con $r = 2$. La región de sincronización generalizada corresponde a $\langle \sigma \rangle = 0$ y $\langle \delta \rangle \neq 0$; la región de sincronización completa ocurre para $\langle \sigma \rangle = 0$ y $\langle \delta \rangle = 0$

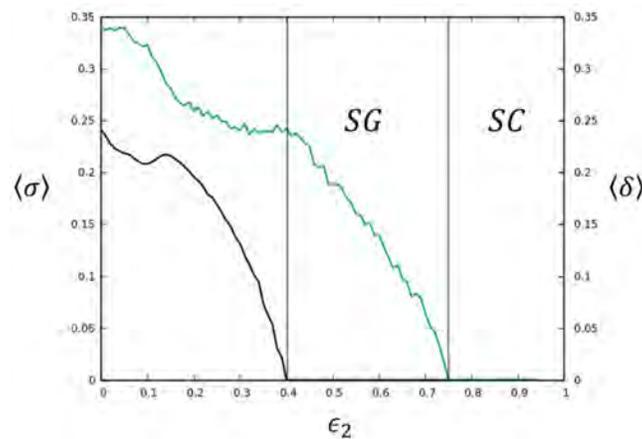


Figura 3.15: Cantidades $\langle \sigma \rangle$ (línea negra) y $\langle \delta \rangle$ (eje vertical derecho, línea verde) para el sistema Ec. 3.1 en función de ϵ_2 , con $\epsilon_1 = 0.2$, $N = 5000$, $g = f$ con $r = 4$. Estas cantidades fueron calculadas con 5000 iteraciones, despreciando 2000 transientes, y por lo tanto $T = 3000$ iterados después de los transientes. Las etiquetas indican SG: sincronización generalizada; SC: sincronización completa.

La Figura 3.16 muestra los estados colectivos de sincronización del sistema Ec. 3.1 en el espacio de parámetros (ϵ_1, ϵ_2) para $g = f$ con $r = 2$. La frontera que separa la región desincronizada de la región de sincronización generalizada corresponde a la condición $\langle \sigma \rangle = 0$, mientras que la frontera que separa la región desincronizada de la región de sincronización completa corresponde a la condición $\langle \delta \rangle = 0$. La Figura 3.16 muestra también las curvas teóricas $\epsilon_1 = A - \epsilon_2$ y $\epsilon_2 = A$, que separan estas regiones, donde $A = 1 - e^{-\lambda_f}$. Observamos que las fronteras determinadas numéricamente (línea azul) concuerdan cualitativamente con las curvas teóricas (línea negra).

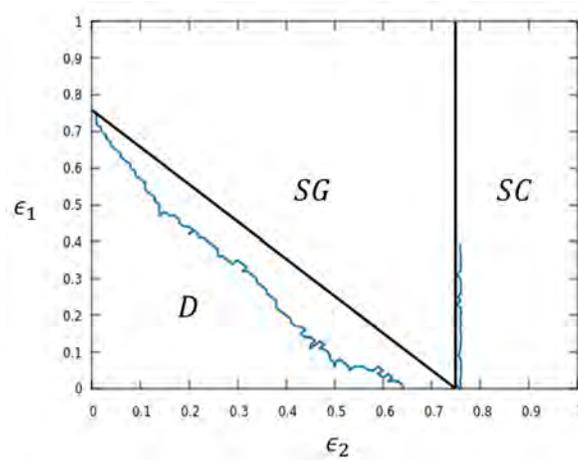


Figura 3.16: Estados de sincronización para el sistema Ec. 3.1, en el espacio de parámetros (ϵ_1, ϵ_2) , para $g = f$ con $r = 4$ y $N = 5000$. También se indican las fronteras teóricas (línea negra) que separan las regiones. Las etiquetas indican D: desincronización; SG: sincronización generalizada; SC: sincronización completa. La zona de sincronización generalizada débil se detecta con la tangencia del exponente de Lyapunov λ_2 .

Para entender la naturaleza de la sincronización generalizada cuando $g = f$ en el sistema Ec. 3.1, en la Figura 3.17 mostramos el atractor obtenido con las series de tiempo de las variables y_t y \bar{x}_t , para valores de parámetros en la región SG.

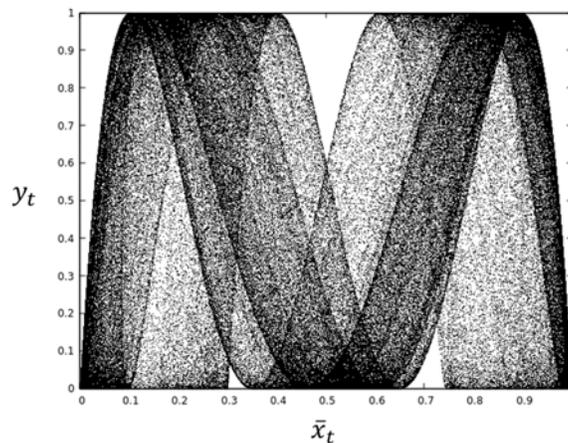


Figura 3.17: Atractor de las variables (\bar{x}_t, y_t) asociado al sistema Ec. 3.1 con $\epsilon_1 = 0.5$, $\epsilon_2 = 0.7$, $g = f$ con $r = 4$ y $N = 5000$.

La sincronización generalizada en el mapa bidimensional resultante se manifiesta mediante la aparición de un atractor extraño. Esto indica que existe una relación funcional no trivial entre y_t y \bar{x}_t distinta de la identidad. Esta es la característica fundamental de un estado de sincronización generalizada entre dos variables acopladas.

Por último la Figura 3.18 muestra los estados de sincronización del sistema Ec. 3.1 para $g \neq f$, con $g(y_t) = \sin^2(2 \arcsin(\sqrt{x}))$ y $f(x_t) = \sin^2(3.5 \arcsin(\sqrt{x}))$. En este caso, no es posible la sincronización completa $x_t^i = \bar{x}_t = y_t$; sólo ocurre sincronización generalizada.

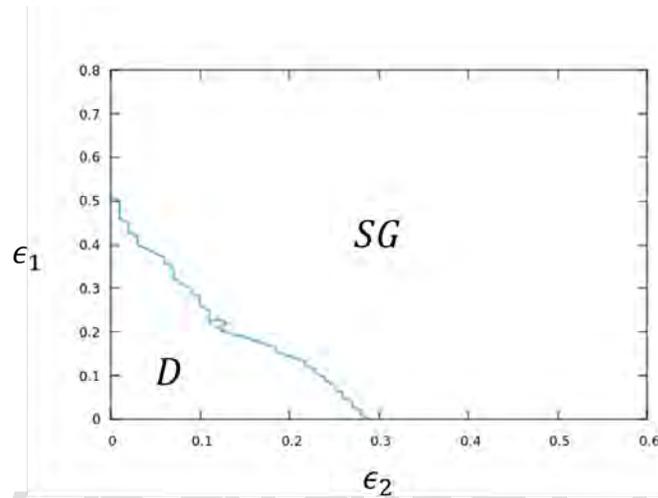


Figura 3.18: Región donde ocurre sincronización generalizada, caracterizada por $\langle \sigma \rangle = 0$ y $\langle \delta \rangle \neq 0$, para el sistema Ec. 3.1 con $N = 5000$, $g(y_t) = \sin^2(2 \arcsin(\sqrt{x}))$ y $f(x_t) = \sin^2(3.5 \arcsin(\sqrt{x}))$. La zona de sincronización generalizada débil se detecta con la tangencia del exponente de Lyapunov λ_2 .

3.4. Mapa Local Ulam

Consideremos el sistema globalmente acoplado Ec. 3.1, donde la dinámica local está dada por el mapa de Ulam

$$f(x) = 1 + ax^2. \tag{3.12}$$

Este mapa es una variación del famoso Mapa Logístico $f(x) = rx(1 - x)$ por medio del cual se dieron grandes descubrimientos que permitieron el avance en la Teoría del Caos. La Figura 3.19 correspondiente a su diagrama de bifurcación en función del parámetro a .

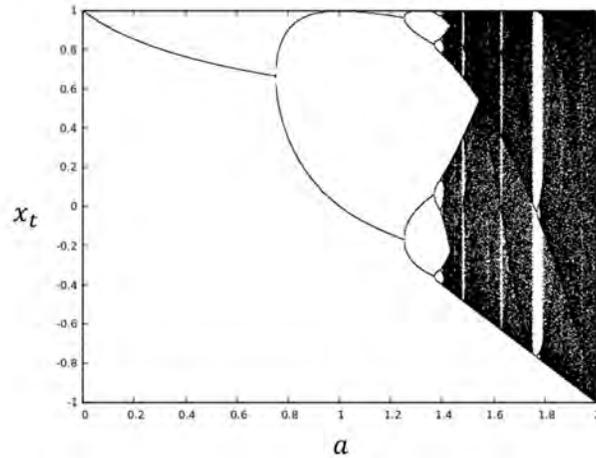


Figura 3.19: Diagrama de bifurcación del mapa 3.12 en función del parámetro local a .

En la Figura 3.20 se muestran los exponentes de Lyapunov del sistema Ec. 3.6 en función del parámetro de acoplamiento ϵ_2 para un valor fijo $\epsilon_1 = 0.2$. Podemos observar las transiciones de valores positivos a negativos en los exponentes de Lyapunov λ_3 y λ_2 que señalan cambios en el atractor del sistema. La condición $\lambda_3 < 0$ implica estabilidad del estado de sincronización generalizada, donde $x_t^i = \bar{x}_t \neq y_t$; mientras que la condición $\lambda_3 < 0$ y $\lambda_2 < 0$ implica estabilidad de la sincronización completa, donde $x_t^i = \bar{x}_t = y_t$.

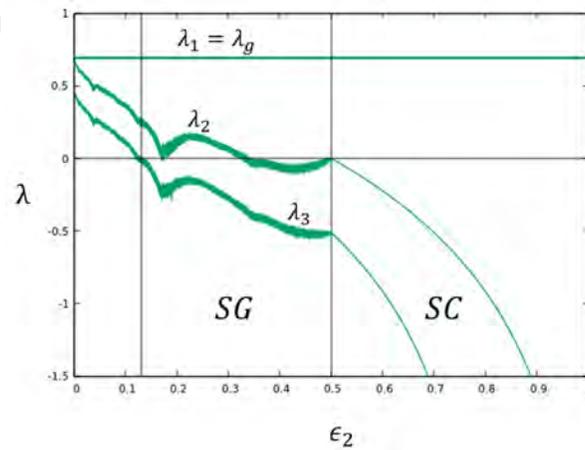


Figura 3.20: Exponentes de Lyapunov del sistema Ec. 3.6 para $g = f$ con $a = 2$ en función del parámetro de acoplamiento ϵ_2 , con $\epsilon_1 = 0.2$. Las etiquetas indican SG: sincronización generalizada; SC: sincronización completa.

Al igual que el sistema con el mapa de Aguirregabiria, el exponente λ_2 cruza tangencialmente el valor cero antes de la región de sincronización completa, donde $\lambda_2 < 0$. La tangencia de λ_2 señala una sincronización generalizada débil.

Caracterizamos los estados de sincronización mediante las cantidades estadísticas $\langle \sigma \rangle$ y $\langle \delta \rangle$. La Figura 3.21 muestra estas cantidades en función del parámetro ϵ_2 con $\epsilon_1 = 0.2$ fijo, para el sistema

Ec. 3.1 para $N = 5000$ y $g = f$ con $r = 2$. La región de sincronización generalizada corresponde a $\langle \sigma \rangle = 0$ y $\langle \delta \rangle \neq 0$; la región de sincronización completa ocurre para $\langle \sigma \rangle = 0$ y $\langle \delta \rangle = 0$

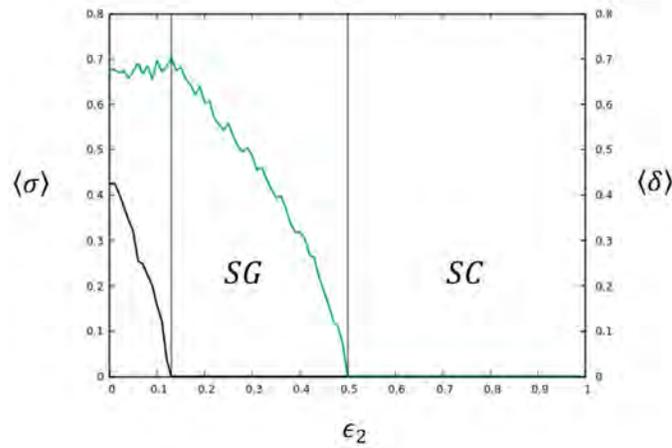


Figura 3.21: Cantidades $\langle \sigma \rangle$ (línea negra) y $\langle \delta \rangle$ (eje vertical derecho, línea verde) para el sistema Ec. 3.1 en función de ϵ_2 , con $\epsilon_1 = 0.2$, $N = 5000$, $g = f$ con $a = 2$. Estas cantidades fueron calculadas con 5000 iteraciones, despreciando 2000 transientes, y por lo tanto $T = 3000$ iterados después de los transientes. Las etiquetas indican SG: sincronización generalizada; SC: sincronización completa.

La Figura 3.22 muestra los estados colectivos de sincronización del sistema Ec. 3.1 en el espacio de parámetros (ϵ_1, ϵ_2) para $g = f$ con $r = 2$. La frontera que separa la región desincronizada de la región de sincronización generalizada corresponde a la condición $\langle \sigma \rangle = 0$, mientras que la frontera que separa la región desincronizada de la región de sincronización completa corresponde a la condición $\langle \delta \rangle = 0$. La Figura 3.22 muestra también las curvas teóricas $\epsilon_1 = A - \epsilon_2$ y $\epsilon_2 = A$, que separan estas regiones, donde $A = 1 - e^{-\lambda f}$. Observamos que las fronteras determinadas numéricamente (línea azul) concuerdan aproximadamente con las curvas teóricas (línea negra).

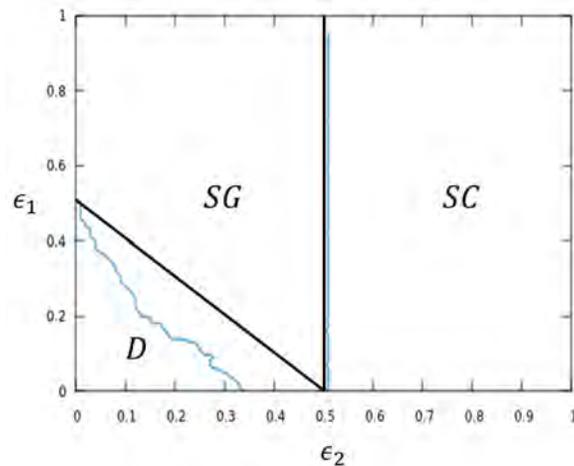


Figura 3.22: Estados de sincronización para el sistema Ec. 3.1, en el espacio de parámetros (ϵ_1, ϵ_2) , para $g = f$ con $a = 2$ y $N = 5000$. También se indican las fronteras teóricas (línea negra) que separan las regiones. Las etiquetas indican D: desincronización; SG: sincronización generalizada; SC: sincronización completa.

Para entender la naturaleza de la sincronización generalizada cuando $g = f$ en el sistema Ec. 3.1, en la Figura 3.23 mostramos el atractor obtenido con las series de tiempo de las variables y_t y \bar{x}_t , para valores de parámetros en la región SG. La sincronización generalizada en el mapa bidimensional resultante se manifiesta mediante la aparición de un atractor extraño. Esto indica que existe una relación funcional no trivial entre y_t y \bar{x}_t distinta de la identidad. Esta es la característica fundamental de un estado de sincronización generalizada entre dos variables acopladas.

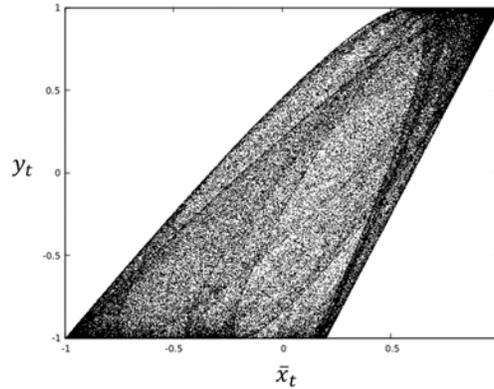


Figura 3.23: Atractor de las variables (\bar{x}_t, y_t) asociado al sistema Ec. 3.1 con $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0.4$, $g = f$ con $a = 2$ y $N = 5000$.

3.5. Mapa Local Potapov y Ali

Consideremos el sistema globalmente acoplado Ec. 3.1, donde la dinámica local está dada por el mapa de Potapov y Ali

$$f(x) = |\tanh(s(x - c))|. \tag{3.13}$$

Este mapa fue desarrollado por Potapov y Ali [25], como un modelo para dinámica neuronal. En la Figura 3.24 correspondiente a su diagrama de bifurcación en función de su parámetro local c , para un valor fijo $s = 2.7$, valor para el cual exhibe ventanas de periodicidad.

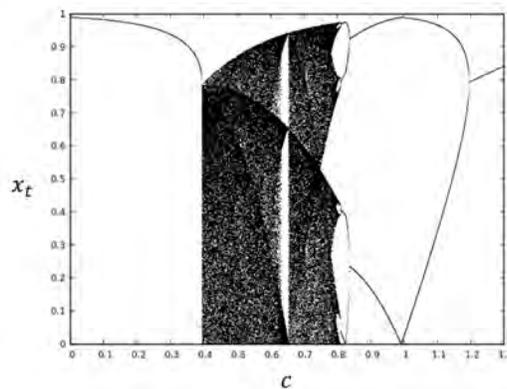


Figura 3.24: Diagrama de bifurcación del mapa 3.13 en función del parámetro local c con $s = 2.7$.

Caracterizamos los estados de sincronización mediante las cantidades estadísticas $\langle \sigma \rangle$ y $\langle \delta \rangle$. La Figura 3.25 muestra estas cantidades en función del parámetro ϵ_2 con $\epsilon_1 = 0.2$ fijo, para el sistema Ec. 3.1 para $N = 5000$ y $g = f$ con $s = 2.7$ y $c = 0.5$. La región de sincronización generalizada corresponde a $\langle \sigma \rangle = 0$ y $\langle \delta \rangle \neq 0$; la región de sincronización completa ocurre para $\langle \sigma \rangle = 0$ y $\langle \delta \rangle = 0$

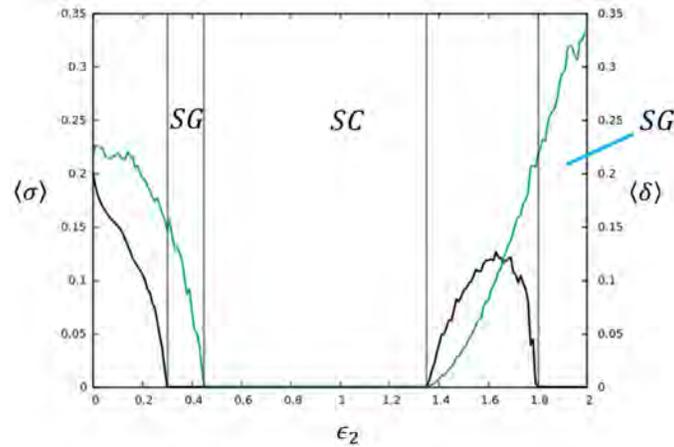


Figura 3.25: Cantidades $\langle \sigma \rangle$ (línea negra) y $\langle \delta \rangle$ (eje vertical derecho, línea verde) para el sistema Ec. 3.1 en función de ϵ_2 , con $\epsilon_1 = 0.2$, $N = 5000$, $g = f$ con $s = 2.7$ y $c = 0.5$. Estas cantidades fueron calculadas con 5000 iteraciones, despreciando 2000 transientes, y por lo tanto $T = 3000$ iterados después de los transientes. Las etiquetas indican SG: sincronización generalizada; SC: sincronización completa.

La Figura 3.26 muestra los estados colectivos de sincronización del sistema Ec. 3.1 en el espacio de parámetros (ϵ_1, ϵ_2) para $g = f$ con $s = 2.7$ y $c = 0.5$. La frontera que separa la región desincronizada de la región de sincronización generalizada corresponde a la condición $\langle \sigma \rangle = 0$, mientras que la frontera que separa la región desincronizada de la región de sincronización completa corresponde a la condición $\langle \delta \rangle = 0$.

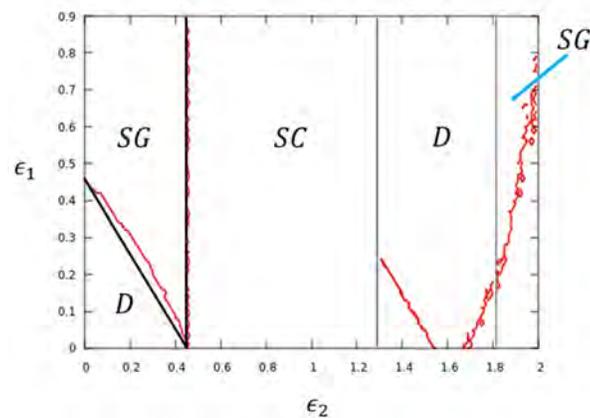


Figura 3.26: Estados de sincronización para el sistema Ec. 3.1, en el espacio de parámetros (ϵ_1, ϵ_2) , $N = 5000$, para $g = f$ con $s = 2.7$ y $c = 0.5$. También se indican las fronteras teóricas (línea negra) que separan las regiones. Las etiquetas indican D: desincronización; SG: sincronización generalizada; SC: sincronización completa.

La Figura 3.22 muestra también las curvas teóricas $\epsilon_1 = A - \epsilon_2$ y $\epsilon_2 = A$, que separan estas regiones, donde $A = 1 - e^{-\lambda f}$. Observamos que las fronteras determinadas numéricamente (línea roja) concuerdan cualitativamente con las curvas teóricas (línea negra).

La Figura 3.26 nos muestra que sincronización generalizada, ausente en un sistema autónomo ($\epsilon_1 = 0$), es inducida por la adición de un forzamiento $g = f$ en un rango de parámetros (ϵ_1, ϵ_2) .

Para entender la naturaleza de la sincronización generalizada cuando $g = f$ en el sistema Ec. 3.1, en la Figura 3.27 mostramos el atractor obtenido con las series de tiempo de las variables y_t y \bar{x}_t , para valores de parámetros en la región SG. La sincronización generalizada en el mapa bidimensional resultante se manifiesta mediante la aparición de un atractor extraño. Esto indica que existe una relación funcional no trivial entre y_t y \bar{x}_t distinta de la identidad. Esta es la característica fundamental de un estado de sincronización generalizada entre dos variables acopladas.

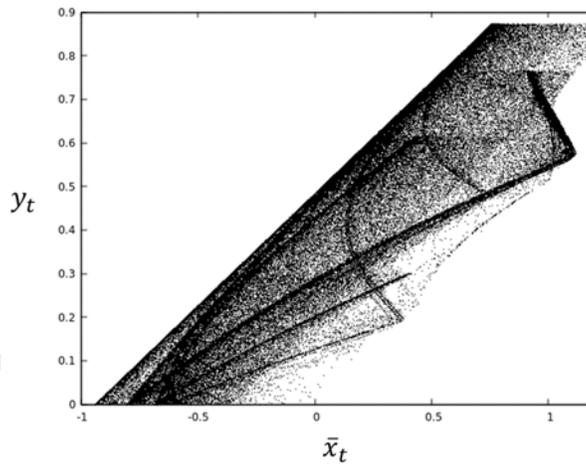


Figura 3.27: Atractor de las variables (\bar{x}_t, y_t) asociado al sistema Ec. 3.1 con $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0.4$, $N = 5000$, $g = f$ con $s = 2.7$ y $c = 0.5$.

“Siempre parece imposible hasta que se hace.”

Nelson Mandela.

Capítulo 4

Conclusiones

Sistemas dinámicos con interacciones globales han sido estudiados previamente, pero generalmente se ha considerado por separado la presencia de una interacción global autónoma, o de un campo global externo. En esta Tesis hemos propuesto un modelo de redes de mapas caóticos con acoplamientos globales coexistentes, donde los elementos del sistema están sujetos tanto a la influencia de su campo medio como a la acción de un forzamiento externo.

Hemos realizado el análisis de estabilidad de los estados sincronizados basado en el cálculo de los exponentes de Lyapunov del sistema, considerando los autovalores de la matriz de acoplamiento. La simetría de la forma de acoplamiento permite determinar expresiones analíticas para los exponentes de Lyapunov. De este modo, hemos podido obtener las fronteras de estabilidad de los estados de sincronización completa y sincronización generalizada en el espacio de parámetros (ϵ_1, ϵ_2) , donde ϵ_1 es el parámetro de acoplamiento con el campo medio y ϵ_2 mide el acoplamiento con el campo externo.

Igualmente hemos caracterizado numéricamente los estados de sincronización del sistema mediante dos cantidades estadísticas: $\langle \sigma \rangle$, el promedio asintótico de la desviación estandar de los estados de los elementos, y $\langle \delta \rangle$, el promedio asintótico de la diferencia entre la media del sistema y el estado del mapa forzador. Estas cantidades han sido calculadas en el espacio de parámetros (ϵ_1, ϵ_2) para identificar las regiones de los estados de sincronización completa y generalizada. En general, hemos encontrado una coincidencia satisfactoria entre los resultados numéricos y las curvas derivadas teóricamente.

En particular, la observación de sincronización generalizada en un sistema sujeto a interacciones globales interna y externa coexistentes, con la función de forzamiento igual a la dinámica de los elementos ($g = f$), constituye uno de los resultados más relevantes de la presente Tesis. Cabe destacar que sincronización generalizada ocurre en sistemas forzados donde $g \neq f$ [21]; o en la

forma de sincronización débil en sistemas forzados con $g = f$ [22, 24]. Por otro lado, sincronización generalizada en sistemas con acoplamiento global autónomo ha sido previamente encontrada cuando la función de acoplamiento h_t es distinta del campo medio [18]. En nuestro caso, la coexistencia de las dos formas de acoplamiento global permiten el surgimiento de sincronización generalizada aún cuando $g = f$ y h_t es igual al campo medio.

Por otro lado, hemos encontrado que el fenómeno de sincronización generalizada, ausente en un sistema autónomo ($\epsilon_1 = 0$), puede ser inducida por la adición de un forzamiento $g = f$ en un rango de parámetros (ϵ_1, ϵ_2).

Nuestros resultados son relevantes en una variedad de sistemas donde pueden coexistir interacciones globales autónomas y externas. Especialmente, en dinámica social se han estudiado estas formas de acoplamiento de manera independiente; un campo global externo se ha interpretado como una propaganda o un mensaje de un medio de comunicación masivo impuesto [16], mientras que un campo global autónomo, como la moda, representa un medio de comunicación masivo endógeno [14]. El presente trabajo ilustra lo que se puede esperar en un sistema social sujeto a ambas formas de medios de comunicación masiva simultáneamente.

Finalmente, consideramos que existen diversas extensiones posibles para este trabajo de investigación: (i) la consideración de dinámicas locales continuas, como osciladores de Lorenz o Rössler, los cuales son susceptibles de ser realizados experimentalmente; (ii) la búsqueda de estados quiméricos, donde un subconjunto de los elementos alcanza un estado sincronizado mientras otro subconjunto se mantiene incoherente; (iii) estudiar la información transferida y la información mutua entre la escala global y la escala local del sistema; (iv) estudiar otros estados colectivos, como la emergencia de comportamiento colectivo no trivial en mapas con caos robusto, que ha sido observada en sistemas con acoplamiento global autónomo solamente.

Bibliografía

- [1] Kunihiko Kaneko and Ichiro Tsuda. *Complex systems: chaos and beyond: a constructive approach with applications in life sciences*. Springer Science & Business Media, 2011.
- [2] Nino Boccara. *Modeling complex systems*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [3] HG Schuster. *Complex adaptive systems*, 2002.
- [4] Ricard V Solé and Susanna C Manrubia. *Orden y caos en sistemas complejos*, volume 2. Univ. Politèc. de Catalunya, 2001.
- [5] Massimo Cencini, Fabio Cecconi, and Angelo Vulpiani. *Chaos: from simple models to complex systems*. World Scientific, 2010.
- [6] Y. Kuramoto. *Chemical Oscillations, Waves and Turbulence*. Springer, Berlin, 1984.
- [7] N. Nakagawa and Y. Kuramoto. *Physica D*, 75(74), 1994.
- [8] K. Wiesenfeld and P. Hadley. *Physical Review Letters*, 62(1335), 1989.
- [9] G. Grüner. *Physical Review Letters*, 60(1129), 1988.
- [10] G. James K. Wiesenfeld, C. Bracikowski and R. Roy. *Physical Review Letters*, 65(1749), 1990.
- [11] K. Kaneko and I. Tsuda. *Complex Systems: Chaos and Beyond*. Springer, Berlin, 2001.
- [12] V. M. Yakovenko. *Encyclopedia of Complexity and System Science*. Springer, New York, 2009.
- [13] A. Barabási M. Newman and D. J. Watts. *The Structure and Dynamics of Networks*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2006.
- [14] M. G. Cosenza K. Klemm J. L. Herrera J. C. González-Avella, V. M. Eguiluz and M. San Miguel. Local versus global interactions in nonequilibrium transitions: A model of social dynamics. *Physical Review E*, 73(046119), 2006.

- [15] M. G. Cosenza J. C. González-Avella and M. San Miguel. Localized coherence in two interacting populations of social agents. *PLoS ONE*, 7(e51035), 2012.
- [16] J. C. GonzálezAvella M. G. Cosenza and K. Tucci. Nonequilibrium transition induced by mass media in a model for social influence. *Physical Review E*, 72(065102), 2005.
- [17] O. Alvarez Llamaza G. Paredes and M. G. Cosenza. Global interactions, information flow, and chaos synchronization. *Physical Review E*, 88(042920):1, 2013.
- [18] O. Alvarez Llamaza and M. G. Cosenza. Generalized synchronization of chaos in autonomous systems. *Physical Review E*, 78(046216), 2008.
- [19] M. G. Cosenza and A. Parravano. Dynamics of coupling functions in globally coupled maps: Size, periodicity, and stability of clusters. *Physical Review E*, 64(036224), 2001.
- [20] Takeshi Kawabe and Yoshiro Kondo. Intermittent chaos generated by logarithmic map. *Prog. Theor. Phys.*, 86(3):1–6, 1991.
- [21] N. F. Rulkov H. D. I. Abarbanel and M. M. Sushchik. Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems. *Physical Review E*, 53(4528), 1996.
- [22] K. Pyragas. Properties of generalized synchronization of chaos. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control, Vilnius, IMI*, (3), 1998.
- [23] Juan M. Aguirregabiria. Robust chaos with prescribed natural invariant measure and lyapunov exponent. *Theoretical Physics, The University of the Basque Country, Bilbao, Spain*, 2009.
- [24] A. V. Cano. Transiciones de sincronización en sistemas caóticos. *Tesis de Licenciatura, Universidad de los Andes. Mérida-Venezuela*, 2015.
- [25] A. Potapov and M. K. Ali. Robust chaos in neural networks. *Physics Letters A*, 277:310, 2000.