



*Universidad de los Andes*  
*Centro de Física Fundamental*  
*Área de Caos y Sistemas Complejos*

**Efecto del Forzamiento Heterogéneo  
sobre Sistemas Multiestables**

[www.bdigital.ula.ve](http://www.bdigital.ula.ve)

Trabajo de grado presentado ante la ilustre  
**Universidad de Los Andes**  
como requisito parcial para optar al Título de:  
**Licenciado en Física**

Presentado por:  
**Br. Samuel A. Contreras G.**

Tutor:  
**Dr. Kay Tucci**

Mérida, Noviembre 2017

[www.bdigital.ula.ve](http://www.bdigital.ula.ve)

# Resumen

Se propone un modelo para estudiar el efecto del forzamiento heterogéneo en un sistema multi-estable. Para ello se modifica el modelo de diseminación cultural de Axelrod, introduciendo dos tipos de elementos forzadores, que dentro del contexto social actúan como líderes o *influencers*, ubicados con una distribución espacial específica en una malla rectangular con vecindad de von Neumann. Se estudia el efecto de la densidad de forzadores y de la similitud que existe entre ellos. Además se determina el efecto que tienen distintas condiciones iniciales en la evolución del sistema. Los resultados obtenidos muestran la aparición de cuatro comportamientos diferentes dependiendo de la densidad de forzadores en el sistema independientemente de la similitud entre los dos tipos de forzadores. También se encontró que existen algunas diferencias en el comportamiento del sistema dependiendo de las condiciones iniciales.

# Índice general

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Introducción</b>                                       | <b>3</b>  |
| <b>1. Marco Teórico</b>                                   | <b>5</b>  |
| 1.1. Multiestabilidad . . . . .                           | 5         |
| 1.2. Algunos Modelos Multiestables . . . . .              | 7         |
| 1.3. Modelo de diseminación cultural de Axelrod . . . . . | 9         |
| <b>2. El Modelo</b>                                       | <b>12</b> |
| <b>Conclusión</b>   | <b>23</b> |

[www.bdigital.ula.ve](http://www.bdigital.ula.ve)

*“Se puede tener por compañera la fantasía, pero se debe tener como guía a la razón.”*

Samuel Johnson.

# Introducción

A medida que la ciencia avanza a través de los años es más común encontrar colaboraciones multidisciplinarias con el fin de generar nuevo conocimiento. De este tipo de cooperación han surgido diferentes enfoques para el estudio de fenómenos que habían sido difíciles de explicar. El estudio de sistemas complejos no fue la excepción, extendiéndose hacia las ciencias sociales ha comenzado a explicar los comportamientos colectivos como pueden ser la auto-organización [1], el surgimiento de opiniones [2], la transmisión de información [3], el esparcimiento de epidemias [4], los cambios en la economía [5], las tendencias políticas [6] y la evolución de las sociedades [7] empleando herramientas matemáticas. Entre los modelos más destacados en este ámbito se encuentra el modelo de diseminación cultural propuesto por Robert Axelrod [8], el cual permite explicar el fenómeno de la multiculturalidad en las sociedades, mediante una dinámica basada en principios sociológicos bien fundamentados.

El modelo de Axelrod ha sido usado con el fin de estudiar los efectos causados por diferentes tipos de perturbaciones introducidas a un sistema social, por ejemplo, el efecto de los grandes medios de comunicación [9, 10] en la formación de sociedades mono o multiculturales. Otro ejemplo de perturbaciones introducidas al modelo propuesto por Axelrod es el cambio espontáneo de rasgos culturales, esto causa que sociedades multiculturales estables pasen a ser sociedades monoculturales o bajo ciertas condiciones, a comportarse de forma oscilatoria entre ambos estados [11].

En particular, nuestro objetivo en este trabajo es el de *estudiar el efecto del forzamiento heterogéneo sobre sistemas multiestables utilizando una modificación al modelo propuesto por Axelrod [8] en la que se agregan elementos forzadores que hagan que el sistema permanezca en su fase multicultural.*

Este documento que presenta los resultados del trabajo, está organizado de la siguiente manera:

Como el modelo de diseminación cultural de Axelrod [8] es multiestable en el Capítulo 1 se presenta brevemente el fenómeno de multiestabilidad. Mencionando fenómenos naturales que presentan multiestabilidad afirmando la importancia de la investigación para el futuro entendimiento de fenómenos parecidos. También, en este capítulo se hace una breve reseña de otros modelos multiestables y se expone una explicación del funcionamiento del modelo de diseminación cultural propuesto por Axelrod.

En el Capítulo 2 se presenta el modelo propuesto en este trabajo, que consiste en una malla de elementos que interactúan según la dinámica de diseminación cultural de Axelrod modificada para que haya algunos elementos que no sean susceptibles a ser modificados por su entorno, pero que ellos sí puedan modificarlo. A estos elementos que llamaremos *influencers* o líderes, los distribuimos en columnas separadas por cierta distancia. Se exponen los esquemas gráficos de nuestro modelo para un mejor entendimiento y se muestran los resultados obtenidos para los diferentes experimentos realizados donde se mide la similitud que existe entre los *influencers* y el resto de elementos de la malla. Por último tenemos las conclusiones obtenidas de esta investigación.

www.bdigital.ula.ve

*“We’re all traveling through time together, every day of our lives. All we can do is do our best to relish this remarkable ride.”*

About Time.

# Capítulo 1

## Marco Teórico

Como el modelo de diseminación cultural de Axelrod[8] es multiestable y bajo ciertas condiciones presenta formación de dominios, lo que implica formación de interfases, hemos considerado exponer brevemente estos conceptos para que un lector, no familiarizado con el tema, adquiriera rápidamente algunas nociones que pensamos le puedan ser de interés.

### 1.1. Multiestabilidad

En sistemas dinámicos se entiende por multiestabilidad la posible coexistencia de estados estables finales diferentes, para un conjunto de valores iniciales dados [12]. También se puede definir como la capacidad de lograr múltiples estados internos de reposo para un solo conjunto de entradas externas [13]. La coexistencia de varios estados del sistema se puede entender como estados diferenciados en un mismo tiempo ocupando espacios distintos y también como varios estados ocupando un mismo espacio pero en diferente tiempo.

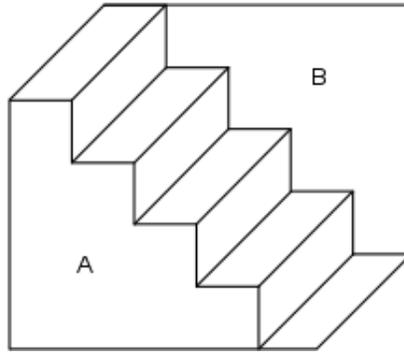
Algo comúnmente presente en los sistemas multiestables es la formación de dominios que consiste en que dos o más estados o fases convivan al mismo tiempo, donde además los elementos semejantes entre sí se agrupan, creando zonas diferenciadas unas de otras, con fronteras entre ellas, llamadas dominios. A estas fronteras se les llama como interfases. Un ejemplo cotidiano de este fenómeno se observa cuando el agua se separa del aceite luego de haberlos mezclado.

También se puede observar el efecto de formación de dominios en los procesos de segregación que ocurren en algunos fenómenos sociales, como lo es la separación étnica entre sectores en algunas ciudades [14]. Otro proceso que conduce a la formación de dominio además de la segregación son los “peer effects” o efectos de pares, en los que elementos de un sistema se ven afectados por su entorno sin modificar su ubicación dentro del sistema. El estudio de estos efectos se relaciona por ejemplo con el estudio del comportamiento de los alumnos en las escuelas [15] y el desarrollo de su aprendizaje [16].

La presencia de varios dominios en un sistema está acompañada por la aparición de interfases. Se puede entender como interfase a la superficie bien definida de separación que existe entre partes homogéneas y físicamente diferenciadas de un sistema. Mientras que en termodinámica se define como fase a una región con propiedades intensivas constantes, en este trabajo las fases corresponden a los dominios. Si se tienen dos fases distintas en contacto estas deben diferenciarse en una o varias propiedades y por lo tanto debe existir un zona de transición donde las propiedades cambien desde su valor en una fase hasta el valor que adquieren en otra, esta región se conoce como interfase [17].

El fenómeno de la multiestabilidad puede ser encontrado en sistemas naturales como en sistemas artificiales creados por la ciencia. En biología la existencia de múltiples estados es esencial, estos surgen como consecuencia de la flexibilidad funcional de los sistemas ante diversos estímulos. Fue dentro de una investigación sobre sistemas metabólicos [18] que la multiestabilidad fue discutida por primera vez en esta área. La morfogénesis, entendida como el surgimiento espontáneo de formas o patrones en el desarrollo biológico, es comprendida como un ejemplo de inestabilidad que rompe la simetría, es decir, como un proceso en el que se produce el paso de un estado homogéneo a otro heterogéneo, causado por perturbaciones o fluctuaciones [19]. En el artículo *The Chemical Basis of Morphogenesis*, escrito en 1952, A. Turing señala: “Se sugiere que un sistema de sustancias químicas, llamadas morfogenes, en reacción entre ellas, y difundiendo a través de un tejido, es adecuado para dar cuenta del importante problema de la morfogénesis. Tal sistema a pesar de que pueda ser originalmente bastante homogéneo, puede luego desarrollar un patrón o estructuras debido a una inestabilidad del equilibrio homogéneo que es detonado por perturbaciones aleatorias” [20]. La comprensión completa de estas perturbaciones en los organismos actuales requirió del descubrimiento del ADN y el desarrollo de la biología molecular y de la bioquímica.

Otro ejemplo de multiestabilidad dentro de la naturaleza se puede observar en el clima, que está regulado por numerosos parámetros, el carácter multiestable de la dinámica del clima se apoya en diversos estudios [21]. La coexistencia de varios estados se observa en fenómenos como en la variabilidad atmosférica, la dinámica de las capas de hielo, entre otros [22]. La estabilidad de los



**Figura 1.1:** Figura ambigua que cambian de sentido según la cara que se observe por mas tiempo

diferentes estados en estos sistemas pueden variar drásticamente. Alcanzar un estado en particular depende de las condiciones iniciales, y debido a su sensibilidad a las perturbaciones, puede sufrir cambios importantes por estar en un ambiente ruidoso como fluctuaciones aleatorias en la dirección del viento [23], cambios atmosféricos [24] y fluctuaciones de la temperatura oceánica [25].

En 1971 se acuñó por primera vez el término multi-estabilidad en un trabajo dedicado a la percepción visual [26]. La multiestabilidad en percepción puede ser observada en imágenes que son demasiado ambiguas para el sistema visual humano, como la presentada figura 1.1. Cuando estas son observadas por algún tiempo, la forma en la que se percibe cambia espontáneamente.

También la multiestabilidad ha sido observada en sistemas sociales [27], cuyas dinámicas pueden ser representadas mediante modelos basados en redes que explican cómo un individuo adopta un nuevo estado en comportamiento, opinión o consumo debido a la influencia de su entorno. En estos modelos los agentes son representados por los nodos de la red que tienen diversas características que son actualizadas por la dinámica en cuestión. De esta forma la red evoluciona a un estado o a varios dependiendo de diversos factores.

## 1.2. Algunos Modelos Multiestables

En física uno de los modelos multiestables más utilizados es el modelo de Ising propuesto para estudiar el comportamiento de materiales ferromagnéticos [28]. Consiste en un sistema de  $N$  partículas colocadas en una matriz cuadrada, donde cada partícula sólo puede estar orientada hacia arriba o hacia abajo, a esta orientación se le conoce como espín y queda determinada por la interacción de la partícula con sus vecinas y las fluctuaciones térmicas del sistema [29].

Actualmente es común en modelos multiestables encontrar el término quimera, el cual es acuñado para representar sistemas donde coexisten estados sincronizados y desincronizados de elementos.

Algunos modelos utilizados para explicar este fenómeno se basan en osciladores acoplados, en ellos se muestran diferentes estados quiméricos, donde se diferencian subconjuntos de elementos dinámicos sincronizados y desincronizados [30, 31, 32].

De igual forma podemos encontrar multiestabilidad en modelos de flujo, donde se pueden diferenciar dos estados estables, el flujo laminar correspondiente a un estado ordenado, donde el fluido se mueve de forma suave, estratificada, en forma de laminas sin mezclarse y siguiendo una trayectoria suave que se conoce como línea de corriente, mientras el flujo turbulento es un estado caótico, donde el movimiento del fluido es desordenado y se observa la presencia de remolinos no sincronizados [33]. Este fenómeno turbulento-laminar también se encuentra presente en modelos de mapas caóticos acoplados [34] donde se usa la dinámica del mapa de Hénon-Mandelbrot para estudiar la intermitencia del orden de la red.

Otro modelo de red de mapas acoplados que presenta multiestabilidad es el de Miller-Huse [35] el cual consiste en una red acoplada a mapas caóticos, usado con la finalidad de explicar la transición de un estado paramagnético a uno ferromagnético. El mapa caótico del modelo de Miller-Huse es usado en otros modelos con la finalidad de explicar otro tipo de fenómenos como en modelos de movilidad social [36].

También tenemos multiestabilidad en modelos de dinámica de fluidos como lo puede ser un modelo con dos especies de fluidos que siguen una dinámica de colisión multipartículas con reglas de repulsión para distancias cortas [37]. Esto genera la segregación de las especies a pesar de estar inicialmente mezcladas y evita la mezcla de las mismas al ser agregadas una en la otra.

En dinámica social un modelo clásico es el de segregación propuesto por Shelling que explica de una forma simple los procesos por los cuales existe separación social en las ciudades debido a factores como la raza y la religión [14]. Otros modelos como el de Deffuant, se proponen para estudiar la diversidad de opiniones. Las opiniones se pueden considerar como las diferentes perspectivas que tiene un individuo sobre un tema en general, de esta forma si la opinión de una cierta persona se asemeja dentro de un rango de similitud a la opinión de otra persona estas interactúan, acercando ambas opiniones [2].

Siguiendo en el ámbito de la dinámica social tenemos el modelo de diseminación cultural de Axelrod [8], en el cual, mediante una serie de mecanismos, se representan las interacciones humanas y como éstas hacen que nos parezcamos o nos diferenciamos entre nosotros, todo esto con el fin de entender por qué la sociedad es multicultural.

### 1.3. Modelo de diseminación cultural de Axelrod

La dinámica de interacción entre los elementos en el modelo diseminación cultural propuesto por Axelrod [8] será de base para la construcción de nuestro modelo. El modelo intenta explicar el origen de las sociedades multiculturales basándose en dos premisas derivadas de observaciones sociológicas empíricas. La primera es que la probabilidad de interacción entre individuos es proporcional al número de atributos culturales que tengan en común y la segunda afirma que la interacción aumenta la similitud entre individuos.

El modelo recrea el estado cultural de un individuo o agente  $i$  a partir de un vector de  $F$  componentes que representan sus atributos culturales,

$$\mathbf{C}_i = (\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \sigma_{i3}, \dots, \sigma_{iF-1}, \sigma_{iF}), \quad (1.1)$$

donde cada atributo  $\sigma_{if}$  puede tener uno de los  $q$  rasgos culturales esto es

$$\sigma_{if} \in \{0, \dots, q-1\}. \quad (1.2)$$

Este modelo presenta dos fases dependiendo de los parámetros  $F$  y  $q$ , una homogénea donde la red evoluciona a una sociedad monocultural y otra heterogénea es decir multicultural con muchos grupos pequeños y diferentes entre sí.

El número que toma cada uno de los atributos  $\sigma_{if}$  no tiene ningún valor o significado en particular, solo sirve para diferenciar a cada atributo. Por simplicidad también se considera los parámetros  $F$  y  $q$  iguales para todos los elementos, donde el total de estados diferentes que puede tener cada agente es igual a  $q^F$ . La figura 1.2 muestra todos los posibles estados de un sistema con  $F = 3$  y  $q = 2$  que podría representar a un agente con vector cultural  $C_i = (Deporte, Comida, SO)$  favoritos.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

|                         |                    |                          |
|-------------------------|--------------------|--------------------------|
| <i>Deporte favorito</i> | (0) <i>Futbol</i>  | (1) <i>Beisbol</i>       |
| <i>Comida favorita</i>  | (0) <i>Pizza</i>   | (1) <i>Hamburguesa</i>   |
| <i>SO favorito</i>      | (0) <i>Android</i> | (1) <i>Windows Phone</i> |

**Figura 1.2:** Todos los posibles estados de un agente en un sistema con  $F=3$  y  $q=2$

Los agentes del modelo, ubicados en los nodos de una red, interactúan con sus vecinos siguiendo la siguiente serie de pasos, los cuales se entienden como la dinámica del modelo:

- 1) Seleccionar al azar un agente activo  $i$  en el sistema.

- 2) Seleccionar al azar un agente  $j$  que pertenezca al entorno inmediato del agente activo.
- 3) Calcular la similitud entre ambos agentes dada por

$$\lambda(i, j) = \sum_{f=1}^F \delta\sigma_{if}\sigma_{jf} , \quad (1.3)$$

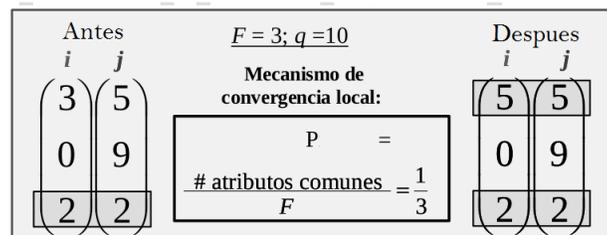
donde,  $\delta\sigma_{if}\sigma_{jf}$  es la delta de Kronecker y puede tomar valores de 0 si el atributo  $f$ -esimo del agente activo,  $\sigma_{if}$ , es diferente del atributo  $f$ -esimo del agente  $j$ ,  $\sigma_{jf}$ , o 1 si ambos atributos son iguales. De esta forma  $\lambda(i, j) \in \{0, 1, \dots, F\}$ .

- 4) Si  $0 < \lambda(i, j) < F$  los agentes seleccionados interactúan con una probabilidad que viene dada por

$$p = \frac{\lambda(i, j)}{F} , \quad (1.4)$$

- 5) En caso de interactuar se escoge uno de los atributos del agente activo,  $\sigma_{ih}$ , tal que antes de la interacción no coincida con su contra parte en el agente  $j$ , es decir  $\sigma_{ih} \neq \sigma_{jh}$ , y se cambia su valor de tal manera que  $\sigma_{ih} = \sigma_{jh}$  luego de interactuar.

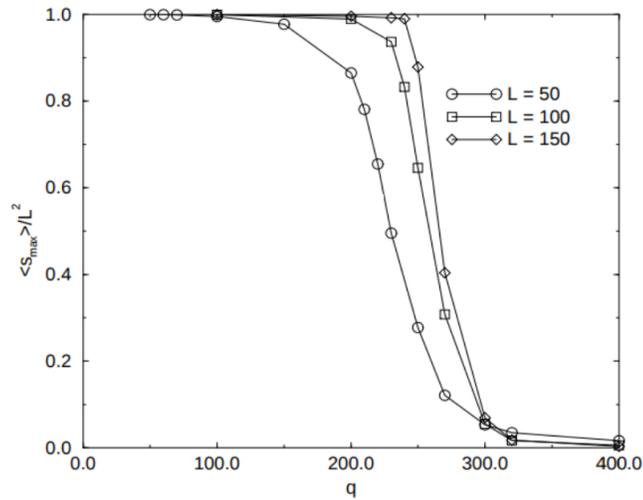
En la figura 1.3 se ilustran los mecanismos de la dinámica del modelo.



**Figura 1.3:** Ejemplo de la interacción de los elementos en el modelo de Axelrod [38]. Sistema con  $F = 3$  y  $q = 10$  y dos vectores que compartan un solo atributo entre ellos, esto quiere decir que su probabilidad de interacción es de  $p = 1/3$ . En caso de darse la interacción el elemento  $i$  cambia alguno de sus atributos en los que difiere de  $j$ , adoptando el valor que  $j$  tiene para ese atributo.

Observe que el modelo de diseminación cultural de Axelrod es un procesos adaptativo de efecto de pares, donde los elementos de la red se adaptan a su entorno, intentando parecerse más entre ellos, este comportamiento es común de sociedades y sistemas biológicos [38].

Para caracterizar el comportamiento del modelo, se mide como parámetro de orden el tamaño del dominio más grande  $S_{max}$  en función de los parámetros del modelo  $F$  y  $q$ ; donde se entiende por dominio a una región del espacio compuesta por elementos contiguos cuyos vectores culturales sean idénticos. Por ejemplo, la figura 1.4 muestra los resultados obtenidos por Castellano [39] en



**Figura 1.4:** Comportamiento del dominio mas grande  $S_{max}$  entre el tamaño del sistema  $L^2$  vs  $q$  para tres diferentes tamaños del sistema con  $F = 10$ . Extraído de [39].

los que se muestra el comportamiento del modelo de diseminación cultural de Axelrod [8] sobre una malla cuadrada de  $N = L^2$  elementos para una longitud del vector cultural  $F = 10$  donde  $S_{max}/L^2$  corresponde al tamaño del dominio más grande normalizado. En la figura podemos apreciar las dos fases estables a las que puede evolucionar el modelo de Axelrod, cuando  $S_{max}/L^2 \approx 1$  el sistema se encuentra en su estado homogéneo mientras que cuando  $S \approx 0$  se encuentra en su estado heterogéneo.

“Cualquier tecnología suficientemente avanzada es indistinguible de la magia”.

Arthur C. Clarke.

## Capítulo 2

### El Modelo

En este trabajo se presenta el modelo para estudiar los efectos del forzamiento heterogéneo en un sistema multiestable. El modelo que se plantea es una extensión del modelo de diseminación cultural propuesto por Axelrod [8], donde los  $N$  elementos están sobre una malla bidimensional con condiciones de borde periódicas y cuatro vecinos por elemento. En la malla se fijan algunos elementos forzadores llamados “Líderes” o “*Influencers*” que son de dos tipos diferentes. Al igual que los elementos normales del modelo de Axelrod, que presentamos en la sección 1.3, los *influencers* poseen un vector cultural, pero que diferencia de los primeros, el vector cultural de los *influencers* no cambia con el tiempo. Dicho vector tiene la forma

$$C_i^k = (\sigma_1^k, \sigma_2^k, \dots, \sigma_F^k) \quad \text{con } k = 1, 2 ; \quad (2.1)$$

donde  $k$  identifica al tipo de *influencers*. En la dinámica del modelo los *influencers* nunca son seleccionados como elementos activos y por tanto ellos afectan a su entorno pero el entorno no los afecta a ellos.

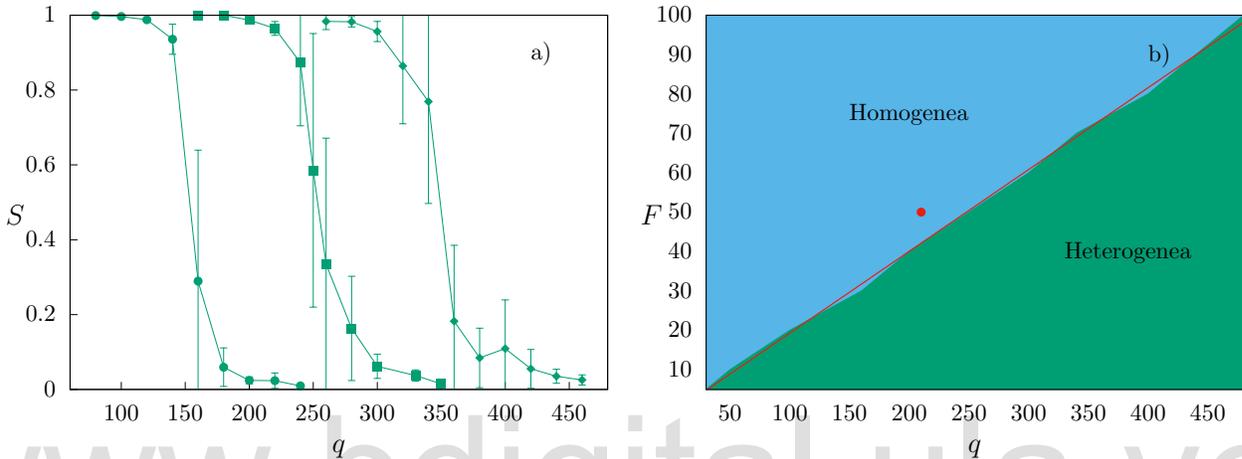
Los dos tipos de *influencers* poseen vectores culturales diferentes pero comparten algunos atributos comunes. La fracción de atributos que comparten o solapamiento viene dada por

$$\Lambda = \frac{\sum_F \delta_{\sigma_f^1} \delta_{\sigma_f^2}}{F}, \quad (2.2)$$

donde, al igual que en la ec.(1.3),  $\delta_{\sigma_f^1} \delta_{\sigma_f^2}$  es la delta de Kronecker y puede tomar valores de 0 si el atributo  $f$ -ésimo del *influencer*  $k = 1$ ,  $\sigma_f^1$ , es diferente del atributo  $f$ -ésimo del *influencer*  $k = 2$ ,  $\sigma_f^2$ ,

o 1 si ambos atributos son iguales. De esta forma  $\Lambda \in \{0, 1/F, 2/F \dots 1\}$  donde  $\Lambda = 0$  indica que no hay solapamiento entre los dos tipos de *influencer*, mientras que  $\Lambda = 1$  indica que ambos tipos son idénticos.

Como se pretende hacer un barrido razonablemente pequeño sobre el solapamiento es necesario usar un valor de  $F$  lo suficientemente grande para permitirlo, y como no se conoce el comportamiento del modelo de diseminación cultural de Axelrod sin forzamiento para valores grandes de  $F$ , construimos el diagrama de fases para diferentes valores de  $F$  y  $q$ . La figura 2.1 muestra el comportamiento del sistema al variar  $F$  y  $q$  cuando los elementos del sistema no están sometidos a los *influencers*.



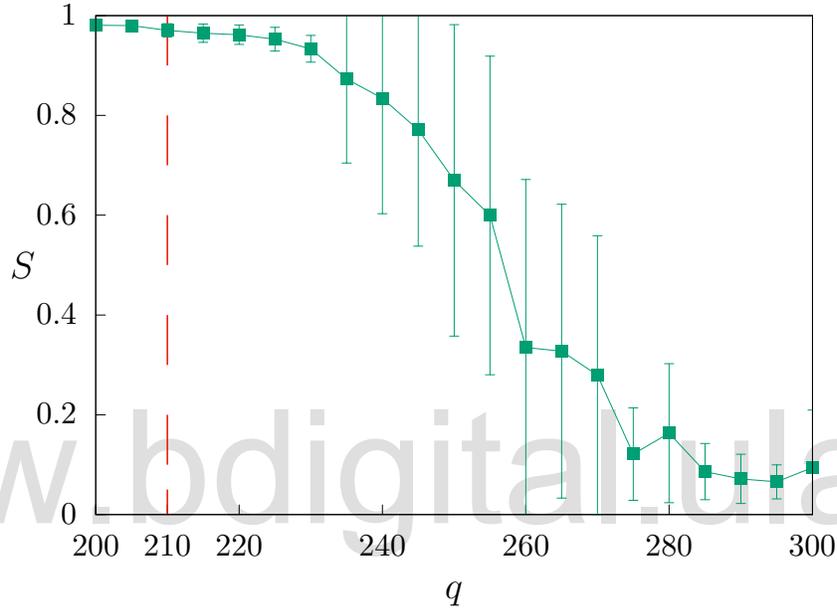
**Figura 2.1:** Comportamiento del sistema sin influencers para  $N = 50 \times 50$  variando  $F$  de 10 en 10 y  $q$  de 20 en 20 para un tiempo de simulación de  $t = 4 \times 10^4$  pasos de Monte Carlo. a) Tamaño del dominio más grande  $S$  en función del número de rasgos culturales  $q$  para tres tamaños diferentes del vector cultural. Círculos  $F = 30$ , cuadrados  $F = 50$  y rombos  $F = 70$ . Cada punto es el promedio sobre 10 realizaciones y las barras de error representan la correspondiente desviación estándar. b) Diagrama de fases en el espacio de parámetros  $(F, q)$  el punto  $(F = 50; q = 210)$  representa el valor de los parámetros fijados para la investigación.

Particularmente, en la figura 2.1a se observa el tamaño del dominio más grande normalizado  $S$  en función  $q$  para tres valores de  $F$ . Notese que cuando  $S \approx 1$  el sistema se encuentra en su fase homogénea mientras que cuando  $S \approx 0$  el sistema está en su fase multicultural donde existen muchas culturas diseminadas sobre todo el espacio. Recordemos que, para efectos de este trabajo, se entiende como un dominio a una región continua formada por elementos que tienen todos sus atributos culturales iguales. El diagrama de fases del sistema sin *influencers* se muestra en la figura 2.1b donde se distinguen las dos fases del sistema, homogénea o monocultural y heterogénea o multicultural. La interfase entre los dominios sigue aproximadamente la forma

$$q_c = (4,81) * F + 1,474 ; \quad (2.3)$$

donde  $q_c$  es el valor crítico de  $q$  para el cual ocurre la transición de fase.

En base al comportamiento observado en el diagrama de fases se fija el valor del tamaño del vector cultural  $F = 50$  lo que permite tener 50 niveles de solapamiento entre *influencer* manteniendo un valor manejable del número de rasgos culturales  $q$ . Con el fin de determinar el valor de  $q$  para que el sistema se mantenga en la fase homogénea, pero se encuentre cerca de la transición, en la figura 2.2 se muestra el valor de  $S$  usando un barrido de  $q$  más fino. En base a estos resultados fijamos los parámetros del modelo de diseminación cultural de Axelrod en  $F = 50$  y  $q = 210$  que corresponde al punto rojo en la figura 2.1b.

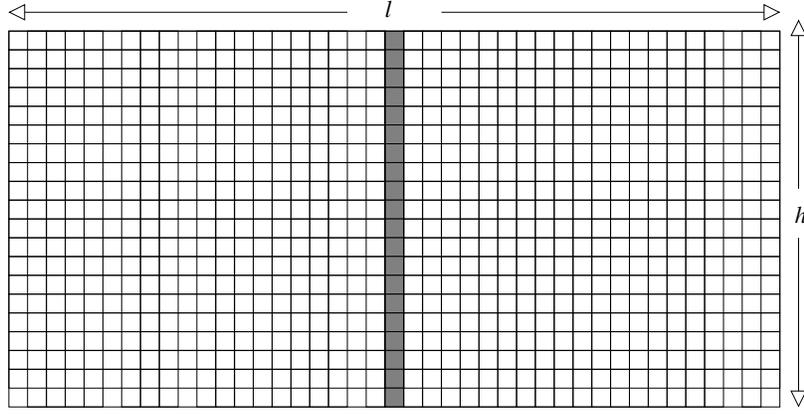


**Figura 2.2:** Tamaño del dominio más grande  $S$  en función del número de rasgos culturales  $q$ , variando  $q$  de 5 en 5. Cada punto corresponde al promedio sobre 10 realizaciones y las barras de error representan la respectiva desviación estándar.

Es de esperar que con la presencia de los dos tipos de *influencers* el sistema forzado evoluciona a un estado heterogéneo, incluso si sus parámetros  $F$  y  $q$  se fijan de forma tal que el sistema sin forzamiento se encuentre en la región homogénea del diagrama de fases tal y como lo hemos hecho.

Para establecer el alcance que tienen los *influencers* sobre su entorno, se estudia cómo una columna de influencers de 50 elementos afecta al sistema. Para poder cuantificar el efecto de los *influencers* en la malla, se define la afinidad del elemento  $i$  con los *influencers* tipo  $k$ , dado por

$$a_i^k = \frac{\lambda^k(i)}{F}, \quad (2.4)$$



**Figura 2.3:** Esquema de la distribución espacial de los *influencers* (cuadros oscuros) en una malla con elementos con rasgos culturales aleatorios (cuadros blancos). La columna de *influencers* se ubica en  $x = l/2$ .

donde,

$$\lambda^k(i) = \sum_F \delta_{\sigma_{if}} \delta_{\sigma_f^k}, \quad (2.5)$$

es la similitud del agente  $i$  con los *influencers* tipo  $k$  y  $F$  el tamaño del vector cultural del sistema.

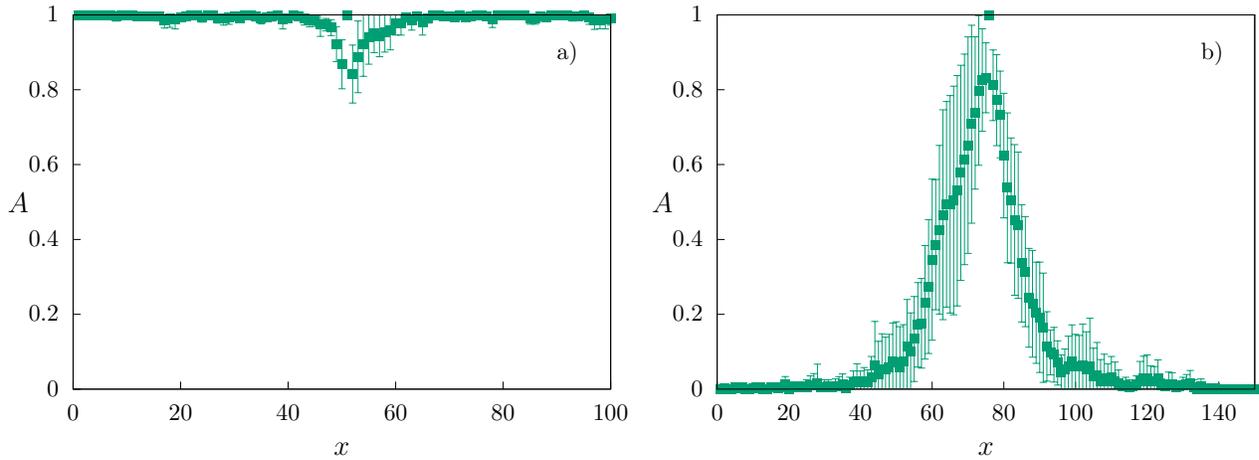
Para estudiar el efecto que tienen los *influencers* sobre el sistema construimos una malla rectangular de  $h$  filas por  $l$  columnas con condiciones periódicas de borde. En el centro de la malla colocamos una columna de *influencers* de un mismo tipo como se describe en la figura 2.3, mientras que el resto de elementos de la malla se les asignan vectores culturales con atributos aleatorios. Las simulaciones se realizan hasta que el sistema alcance su estado estacionario.

La figura 2.4 muestra la afinidad media por columna  $A$  que se define como:

$$A^k = \frac{1}{h} \sum_{i \in x} a_i^k \quad \text{con } x = 1, 2, \dots, l; \quad (2.6)$$

donde la sumatoria se realiza sobre los  $h$  elementos que pertenezcan a la columna  $x$ ; para dos sistemas de tamaño diferente ambos con la misma cantidad de filas  $f = 50$ . En la figura 2.4a cuando el número de columnas del sistema es  $l = 100$ , se observa como la influencia abarca toda la malla, habiendo un pequeño valle cerca de la columna de *influencers*  $x = 50$ . Esto se debe a que una alta densidad de *influencers* es contraproducente para forzar el sistema, ya que ellos mismos se convierten en obstáculos para la propagación de la influencia. Este fenómeno se observa también en otros modelos con saturación de líderes [40]. En cambio, como se muestra en la figura 2.4b, en la malla con  $l = 150$  columnas, la influencia decae sin propagarse mucha más que 30 columnas a cada lado de las columnas de *influencers*. Este comportamiento es debido a que las interacciones propias entre elementos alejados de la columna de *influencers* forman dominios que no tienen afinidad con los estos. Por otra parte

de la figura 2.4b podemos establecer que una buena distancia para la separación entre las columnas de *influencers* de cada tipo es  $d = 50$ .

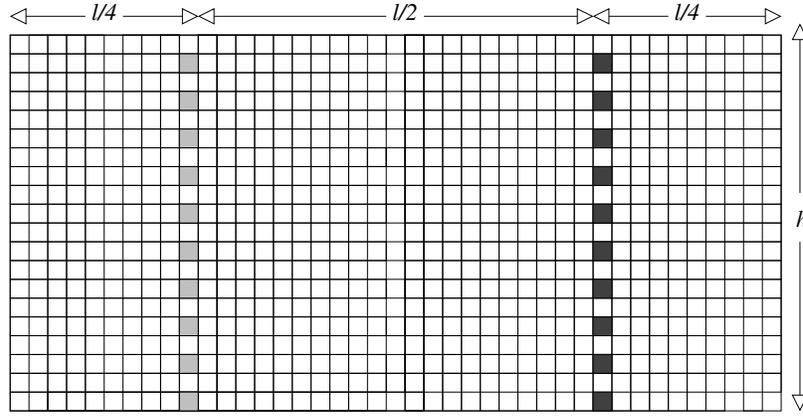


**Figura 2.4:** Afinidad en función a la posición de la columna  $x$  para un sistema con una columna de *influencers* de un mismo tipo con  $F = 50$  y  $q = 210$  y dos valores de  $l$  a)  $l = 100$ . b)  $l = 150$ . Los puntos son el resultado de promediar la afinidad sobre 10 realizaciones y las barras de error corresponden a la respectiva desviación estándar.

Con los valores establecidos del tamaño del vector cultural  $F = 50$ , el número de rasgos culturales  $q = 210$  y la distancia entre *influencers*  $d = 50$ ; se construye en sistema con dos tipos de *influencers*, como se muestra en la figura 2.5. En la malla hay dos columnas de *influencers*, una de cada tipo. La densidad de *influencers* presente en cada columna se establece mediante el parámetro  $\rho = n/h$  y los  $n$  *influencers* se ubican de forma equidistante en la columna. Las columnas de *influencers* se mantienen a una distancia  $d = l/2 = 50$ , por este motivo el tamaño del sistema se fijó en  $h = 50$  y  $l = 100$  y asegurarnos que el forzamiento de ambos tipos de *influencers* se pueda propagar a través de la malla. El tiempo de simulación para el sistema con ambos *influencers* fue fijado en  $t = 1,6 \times 10^5$  pasos de Monte Carlo.

En la figura 2.6 se presenta la variación de la afinidad de los elementos con uno de los dos tipos de *influencers*,  $A^1$ , para diferentes valores de la densidad  $\rho$  y del solapamiento entre los dos tipos de *influencers*  $\Lambda$ .

Notese que la evolución del sistema varía significativamente al cambiar la densidad de *influencers* en las columnas. En la figura 2.6a se observa que para un valor bajo de la densidad,  $\rho = 1/50$ , la afinidad media es aproximadamente igual al valor del solapamiento  $\Lambda$  entre los tipos de *influencers*. Esto, junto al valor relativamente alto del error, indica que la influencia de los dos tipos de *influencers* ocurre sobre todo el sistema para los atributos que tienen en común, lo que quiere decir que el sistema evoluciona a un estado donde todos los elementos tienen solapamiento entre sí pero no

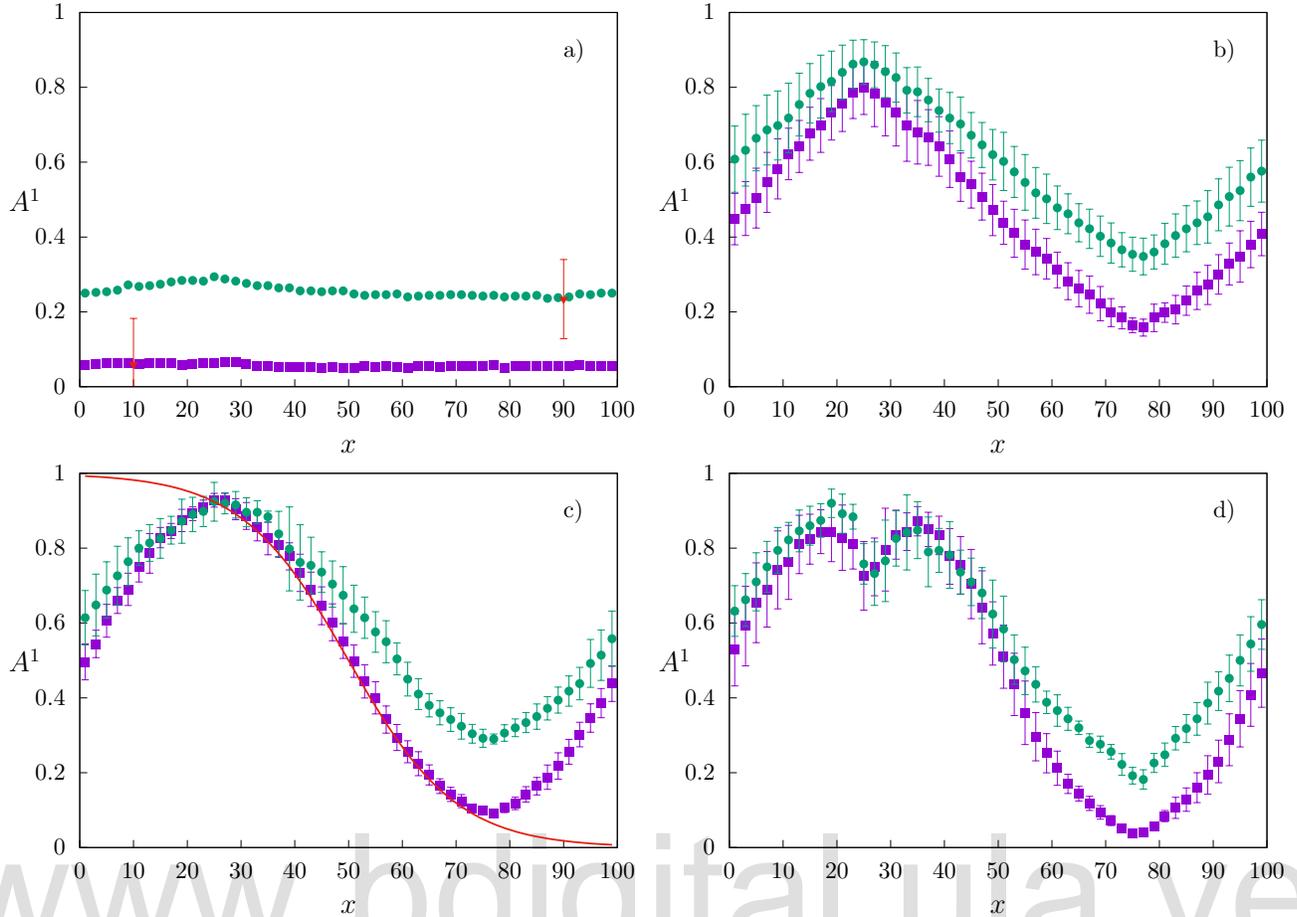


**Figura 2.5:** Esquema de la distribución espacial del sistema con dos tipos de *influencers*, gris claro para *influencers* tipo  $k = 1$  y gris oscuro para *influencers* tipo  $k = 2$ , para una densidad de *influencers* por columna  $\rho = 0,5$

son completamente iguales. Lo que ocasiona que prácticamente cada elemento forme un dominios diferentes en el sistema. La figura 2.6b muestra a  $A^1$  en función de  $x$  para un sistema con  $\rho = 3/50$ . Se observa que los elementos cercanos a los *influencers* tienen mayor afinidad con ellos y que la afinidad decae de forma lineal con la distancia. Al aumentar la densidad de *influencers* a  $\rho = 5/50$  podemos observar en la figura 2.6c que la caída de la afinidad aumenta a medida que se aleja de los *influencers*, lo que nos indica que se están formando grupos más grandes de elementos que comparten muchos atributos con los *influencers* a su alrededor pero sin llegar a ser exactamente como ellos debido a la acción del otro tipo de *influencers* introducido en el sistema. Aquí se observa la formación de una interfase, cuya forma es similar a las interfases en fluidos binarios [41], que viene dada por

$$A^1 = \tanh(x/\xi) , \quad (2.7)$$

donde  $\xi$  es el parámetro que nos indica que tan abrupta es la interfase. En la figura 2.7 se muestra la relación que existe entre el parámetro  $\xi$ , obtenido mediante el ajuste de puntos usando la ec (2.7), con la densidad de líderes  $\rho$ . Se observa que a medida que  $\rho$  aumenta el parámetro  $\xi$  disminuye. De igual forma la figura 2.6d muestra un comportamiento similar al anterior cuando  $\rho = 1$ , pero a diferencia de este, en el entorno inmediato de las columnas de *influencers*, se ve una drástica caída de la afinidad formándose una especie de valle. Este fenómeno que ya se había encontrado en la figura 2.5b, se atribuye a la alta densidad de *influencers* en la columna. A pesar de esto, la interfase creada en el sistema mantiene la forma expresada en la ec.(2.7) pero con un valle en su interior. También hay que destacar que cambiar el solapamiento  $\Lambda$  entre los *influencers* no afecta el comportamiento del sistema cualitativamente, ya que haciendo un reescalamiento es posible sobreponer las diferentes curvas de afinidad para un mismo valor de la densidad  $\rho$ . Los resultados para la afinidad  $A^2$  medida

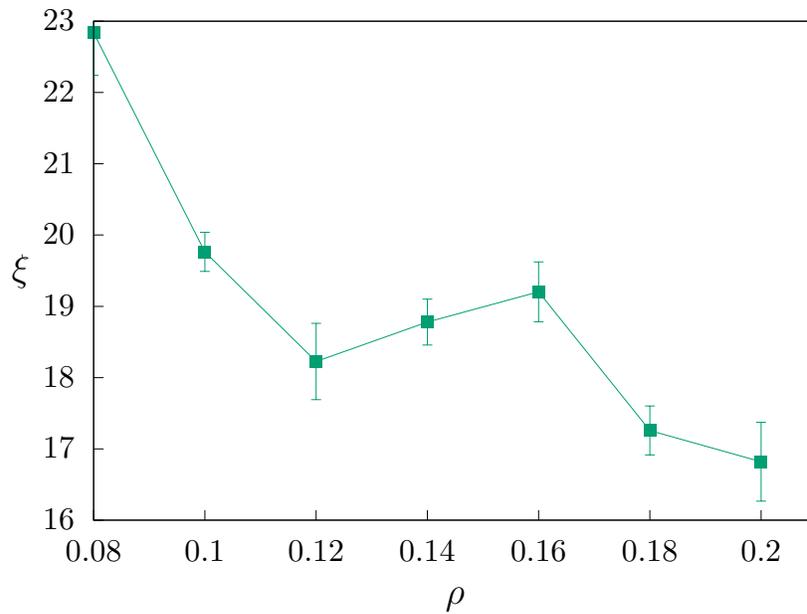


**Figura 2.6:** Afinidad con el influencer de tipo  $k = 1$  en función de la posición de la columna  $x$ , para un sistema con  $h = 50$  y  $l = 100$ , con un solapamiento entre los dos tipos de *influencers*  $\Lambda = 0,06$  cuadrados y  $\Lambda = 0,26$  círculos. La línea representa el ajuste de los datos usando ec (2.7) a)  $\rho = 1/50$ . b)  $\rho = 3/50$ . c)  $\rho = 5/50$ . d)  $\rho = 1$ . Los puntos son el resultado de promediar la afinidad sobre 10 realizaciones y las barras de error corresponden a la respectiva desviación estándar.

con los *influencers* de tipo  $k = 2$  son iguales, siendo sus gráficos la imagen especular de las figura 2.6.

También se observa que el tipo de interfase que se forma en el sistema sólo depende de la densidad de *influencers* por columna  $\rho$  y es independientes del solapamiento entre *influencers*  $\Lambda$ . La figura 2.8 muestra el diagrama de fase del sistema en el espacio de parámetros  $(\Lambda, \rho)$ . En ella se aprecian los cuatro diferentes comportamientos del sistema con los respectivos tipos de interfase. Notese que el parámetro  $\Lambda$  solamente afecta la amplitud de la curva de afinidad en función de la posición, mientras que la forma de las interfases del sistema depende únicamente de la densidad de *influencers* por columna  $\rho$ .

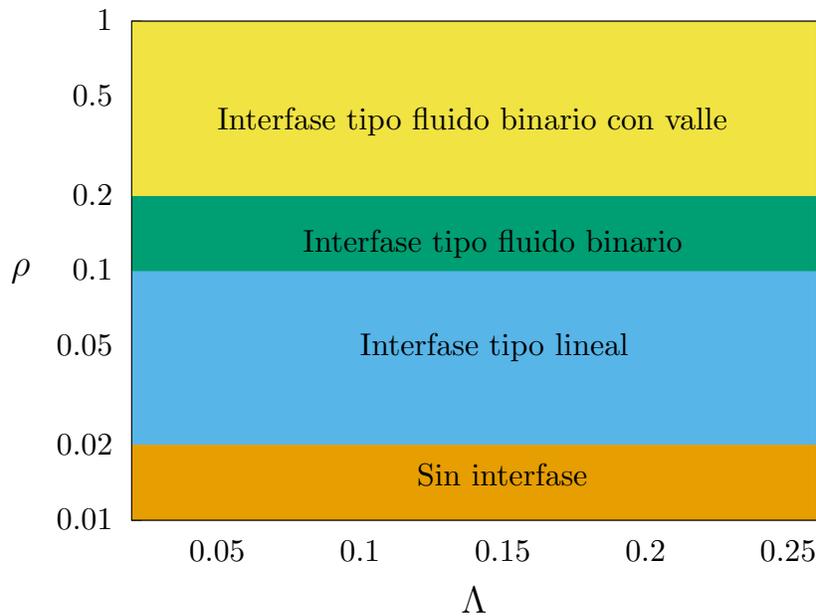
Es sabido que el comportamiento de sistemas multiestables con forzamiento pueden depender



**Figura 2.7:** Dependencia de parámetro  $\xi$  con la densidad de *influencers*  $\rho$ .

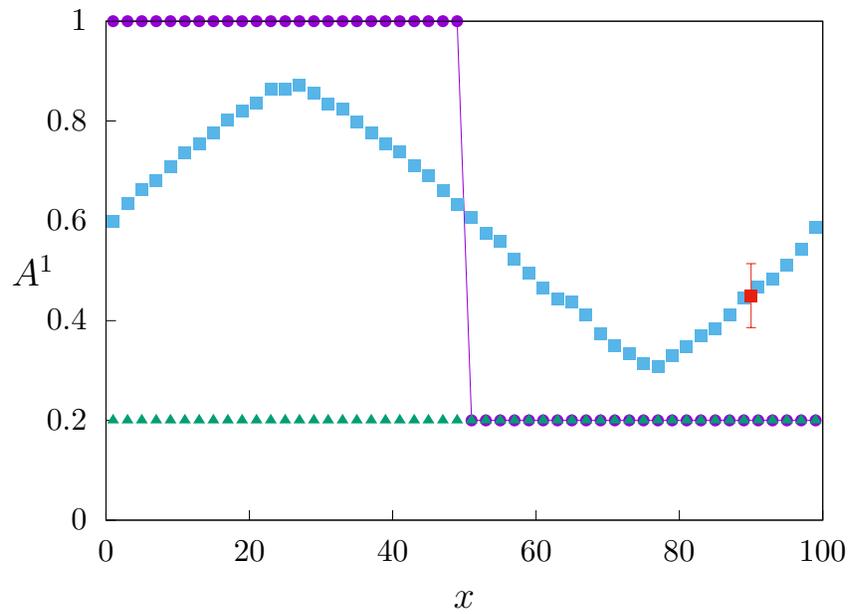
senciblemente de las condiciones iniciales [40]. Por ello estudiamos cómo nuestro modelo se comporta al iniciarlo con tres tipos diferentes de condiciones iniciales, como lo muestra la figura 2.9. En primer lugar tenemos una condición inicial tipo escalón (círculos) en la que todos los elementos que se encuentran a la izquierda del sistema,  $x \leq 50$  son idénticos a los *influencers* tipo  $k = 1$  mientras que los elementos de la derecha,  $x > 50$ , son idénticos a los del tipo  $k = 2$ . Luego tenemos las condiciones iniciales homogéneas (triángulos) en las que el solapamiento entre cualquier par de elementos es  $\Lambda$ . Finalmente las condiciones iniciales de tipo gradiente (cuadrados), que poseen una barra de error, esto debido a que para generarlas se usa el estado final del sistema con  $\rho = 3/50$ , modificando la densidad de *influencers* en el sistema.

La figura 2.10 muestra la afinidad  $A^1$  luego de  $t = 1,6 \times 10^5$  pasos de Monte Carlo en función de la posición  $x$  para un solapamiento  $\Lambda = 0,2$  y los tres tipos de condiciones iniciales. En la figura 2.10a se tiene la forma de la afinidad  $A^1$  para una densidad de *influencers* en la columna  $\rho = 1/50$ . Se aprecia que para la condición inicial de tipo escalón representada por los círculos, el sistema adopta una afinidad  $A^1 \approx 0,65$  donde todos los elementos poseen un solapamiento medio igual para los dos tipos de *influencers*. Para la condición inicial homogénea representada con triángulos, el sistema aumenta su afinidad hasta  $A^1 \approx 0,45$  siendo su valor inicial de  $A^1 = 0,2$ , igual que la condición inicial tipo escalón todos los elementos poseen la misma afinidad para ambos tipos de *influencers*. El sistema para la condición inicial de tipo gradiente graficada con cuadrados se mantiene estable



**Figura 2.8:** Diagrama de fase en el espacio de parámetros  $(\Lambda, \rho)$ . El uso de valores relativamente bajos de  $\Lambda$  en el diagrama de fases se debe a que nos interesa observar el sistema introduciendo perturbaciones lo suficientemente diferentes para forzar un estado heterogéneo.

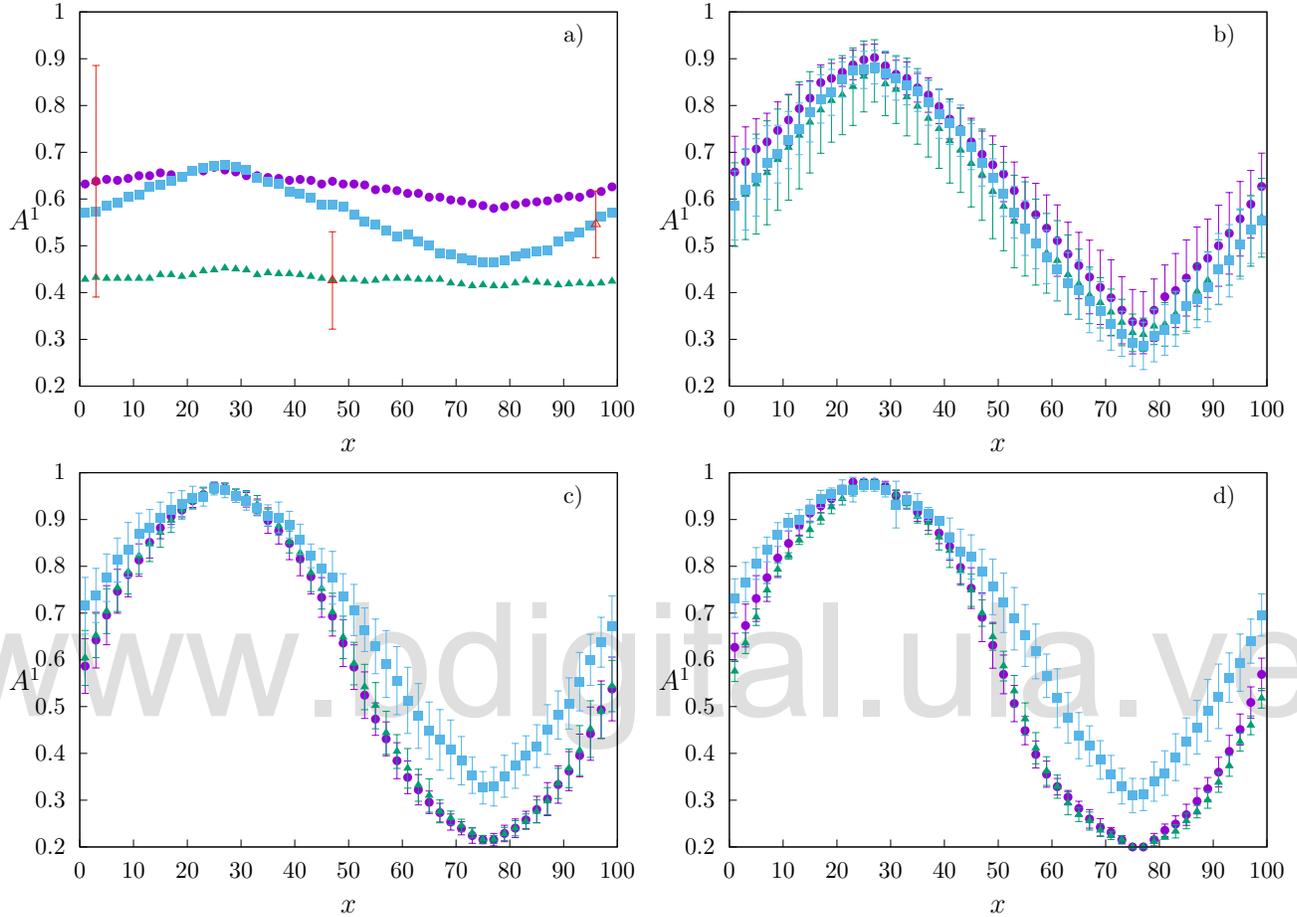
habiendo solo disminuido la afinidad media con los dos tipos diferentes de *influencers* de su valor inicial que se muestra en la figura 2.9, aun así se mantiene la forma de gradiente. Las relativamente grandes barras de error para las tres condiciones iniciales indican lo mucho que fluctúa la afinidad cuando la densidad de *influencers* es  $\rho = 1/50$ . La figura 2.10b se muestra la afinidad  $A^1$  para un sistema con densidad de *influencers* por columna de  $\rho = 3/50$ . Se observa que el sistema evoluciona de igual forma para los tres tipos diferentes de condiciones iniciales, manteniendo el comportamiento observado en la figura 2.6b. De igual forma en la figura 2.10c se muestra la curva de afinidad  $A^1$  pero para un sistema con parámetro  $\rho = 7/50$ . La evolución del sistema con la condición inicial de tipo escalón representada con círculos y la condición inicial de tipo homogénea mostrada con triángulos, no presenta cambio alguno con el comportamiento de la figura 2.6c, mientras que la condición inicial de tipo gradiente representada con cuadrados, mantiene su forma inicial de gradiente alrededor de la columna de *influencers* de tipo  $k = 2$ . En la figura 2.10d se observa la afinidad  $A^1$  para un valor del parámetro  $\rho = 12/50$ . Nótese que el sistema se comporta igual al de la figura 2.10c para los tres tipos distintos de condiciones iniciales, pero a diferencia de comportamiento mostrado en la figura 2.6d no se aprecia la aparición de valles cerca de la columna de *influencers*, esto se debe a que en los tres tipos de condiciones iniciales existen elementos lo suficientemente parecidos a los *influencers* cerca de ellos, lo que permite que la influencia de los *influencers* se propague sin ser obstaculizada



**Figura 2.9:** Afinidad inicial con los *influencers* tipo  $k = 1$  para las tres diferentes condiciones iniciales que se usan para estudiar la evolución del sistema, en círculos la condición tipo escalón, en triángulos la condición homogénea y en cuadrados la condición de tipo gradiente.

debido a la alta densidad de *influencers* en la columna.

www.bdigital.ula.ve



**Figura 2.10:** Afinidad estacionaria  $A^1$  versus  $x$  para los tres tipos de condiciones iniciales presentados en la figura 2.9. Para todas las realizaciones se fijó el solapamiento en  $\Lambda = 0,2$  y el tiempo de simulación en  $t = 1,6 \times 10^5$  pasos de Monte Carlo. Círculos la condición tipo escalón, en triángulos la condición homogénea y en cuadrados la condición de tipo gradiente. En cada gráfico se muestra la afinidad para sistemas con diferente densidad de *influencers*. a)  $\rho = 1/50$ . b)  $\rho = 3/50$ . c)  $\rho = 7/50$ . d)  $\rho = 12/50$ . Los puntos son el resultado de promediar la afinidad sobre 10 realizaciones y las barras de error corresponden a la respectiva desviación estándar.

“After all this time?... Always”.

Harry Potter and the Deathly Hallows.

## Conclusión

En la presente investigación se estudio el efecto del forzamiento heterogéneo sobre un sistema multiestable, modificando el modelo de diseminacion cultural propuesto por Robert Axelrod [8] al que le introdujo un conjunto de elementos que llamamos *influencers* que actúan como forzadores, ya que son capaces de modificar su entorno, pero el entorno no los modifica a ellos. Como se requería conocer el comportamiento del modelo para valores del tamaño del vector cultural  $F$  relativamente grandes, en primer lugar obtuvimos el diagrama de fase para el modelo sin *influencers* en el espacio de parámetros  $(F, q)$  que reproduce resultados previos para  $F$  y para el número de rasgos culturales  $q$  y muestra el comportamiento del sistema también para valores grandes de estos parámetros figura 2.1. Además encontramos que el valor crítico del número de rasgos culturales  $q_c$  sigue una relación lineal con  $F$  como se indica en la ec (2.3). Este diagrama de fase permitió establecer los valores  $F = 50$  y  $q = 210$  usados en el modelo con *influencers*. También se determinó que para el modelo sobre una malla cuadrículada con 4 vecinos por elemento y condiciones de borde periódicas la distancia de separación entre *influencers* de distinto tipo para que la influencia de los unos llegue a los otros es de entre 30 y 60 nodos. Fijamos esta distancia en  $d = 50$  nodos. Al introducir los dos tipos de *influencers* en el sistema, repartidos en la malla en dos columnas separados una distancia  $d$ , obtuvimos cuatro tipos diferentes de interfases dependiendo de la densidad de *influencers*  $\rho$  en cada columna y del solapamiento entre tipos *influencers*  $\Lambda$ . Con ellos pudimos hacer un diagrama de fases en el espacio de parámetros  $(\Lambda, \rho)$  figura 2.7. En este diagrama se encontraron 4 tipos de interfase, ver figura 2.7, que dependen de  $\rho$  pero son independientes de  $\Lambda$ . La primera para un valor de  $\rho = 1/50$  donde no se forma ninguna interfase. La segunda, para valores de  $\rho \in [2/50 \dots 4/50]$ , donde se forma una interfase que tiene un decaimiento lineal con  $x$ . En tercer lugar, para valores de  $\rho \in [5/50 \dots 9/50]$ , están las interfases que se comporta de forma similar a las interfases en fluidos binarios caracterizadas por la ec (2.7). El cuarto tipo de interfase se obtiene para valores de  $\rho \in [10/50 \dots 1]$  y es similar a la

anterior con la salvedad de que encontramos decaimientos bruscos que forman valles cerca de las columnas de *influencers*. Se hizo el ajuste del parámetro  $x_i$  de la ecc (2.7) para la fase con interfase de fluido binario para diferentes valores de  $\rho$  encontrando que el parámetro  $\xi$  disminuye a medida que aumenta la densidad de líderes  $\rho$ . Para finalizar se estudió el efecto de tres tipos diferentes de condiciones iniciales para cada una de las cuatro fases obtenidas anteriormente, la fase sin interfase, la fase con interfase de tipo lineal, la fase con interfase de comportamiento de líquido binario y la fase con interfase con valle. Comprobamos que las tres fases con menor densidad de *influencers* no se ven afectadas por las diferentes condiciones iniciales, mientras que la fase con interfase con valle muestra como desaparecen los efectos causados por la alta densidad de *influencers* por columnas.

www.bdigital.ula.ve

# Bibliografía

- [1] Stuart A Kauffman. The origins of order: Self-organization and selection in evolution. In *Spin Glasses and Biology*, pages 61–100. World Scientific, 1992.
- [2] Guillaume Deffuant, David Neau, Frederic Amblard, and Gérard Weisbuch. Mixing beliefs among interacting agents. *Advances in Complex Systems*, 3(01n04):87–98, 2000.
- [3] André Longtin, Adi Bulsara, and Frank Moss. Time-interval sequences in bistable systems and the noise-induced transmission of information by sensory neurons. *Physical Review Letters*, 67(5):656, 1991.
- [4] Matt J Keeling and Ken TD Eames. Networks and epidemic models. *Journal of the Royal Society Interface*, 2(4):295–307, 2005.
- [5] George A Akerlof and Rachel E Kranton. Economics and identity. *The Quarterly Journal of Economics*, 115(3):715–753, 2000.
- [6] David Strömberg. Mass media competition, political competition, and public policy. *The Review of Economic Studies*, 71(1):265–284, 2004.
- [7] M Nemiche and Rafael Pla-Lopez. A learning model for the dual evolution of human social behaviors. *Kybernetes*, 32(5/6):679–691, 2003.
- [8] Robert Axelrod. The dissemination of culture a model with local convergence and global polarization. *Journal of conflict resolution*, 41(2):203–226, 1997.
- [9] Juan Carlos González-Avella, Mario G Cosenza, and Kay Tucci. Nonequilibrium transition induced by mass media in a model for social influence. *Physical Review E*, 72(6):065102, 2005.

- [10] Juan Carlos González-Avella, Victor M Eguíluz, Mario G Cosenza, Konstantin Klemm, Jose L Herrera, and Maxi San Miguel. Local versus global interactions in nonequilibrium transitions: A model of social dynamics. *Physical Review E*, 73(4):046119, 2006.
- [11] Maxi San Miguel, Victor M Eguiluz, Raul Toral, and Konstantin Klemm. Binary and multivariate stochastic models of consensus formation. *Computing in Science & Engineering*, 7(6):67–73, 2005.
- [12] Diana Graciela Hurtado Rodríguez. *Generación de sistemas dinámicos multiestables*. PhD thesis, 2016.
- [13] Ertugrul M Ozbudak, Mukund Thatai, Han N Lim, Boris I Shraiman, and Alexander Van Oudenaarden. Multistability in the lactose utilization network of escherichia coli. *Nature*, 427(6976):737, 2004.
- [14] Thomas C Schelling. Models of segregation. *The American Economic Review*, 59(2):488–493, 1969.
- [15] Alejandro Gaviria and Steven Raphael. School-based peer effects and juvenile behavior. *The review of economics and statistics*, 83(2):257–268, 2001.
- [16] Caroline Hoxby. Peer effects in the classroom: Learning from gender and race variation. Technical report, National Bureau of Economic Research, 2000.
- [17] Peter Atkins and Julio De Paula. *Elements of physical chemistry*. Oxford University Press, USA, 2013.
- [18] WA Knorre, F Bergter, and Z Simon. Multistability in metabolic systems. *Studia biophysica*, 49(2):81–89, 1975.
- [19] Ronald Durán Allimant and Oscar Orellana Estay. Morfogénesis, inestabilidad y modelos químico-matemáticos: Turing y prigogine. *CONCEPTOS Y LENGUAJES*, page 183.
- [20] Alan Mathison Turing. The chemical basis of morphogenesis. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London B: Biological Sciences*, 237(641):37–72, 1952.
- [21] S Bartsev, P Belolipetskii, and A Degermendzhi. Multistable states in the biosphere-climate system: towards conceptual models. In *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, volume 173, page 012005. IOP Publishing, 2017.

- [22] Didier Paillard. The timing of pleistocene glaciations from a simple multiple-state climate model. *Nature*, 391(6665):378–381, 1998.
- [23] Henk A Dijkstra and Caroline A Katsman. Temporal variability of the wind-driven quasi-geostrophic double gyre ocean circulation: Basic bifurcation diagrams. *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics*, 85(3-4):195–232, 1997.
- [24] Joana G Freire, Cristian Bonatto, Carlos C DaCamara, and Jason AC Gallas. Multistability, phase diagrams, and intransitivity in the lorenz-84 low-order atmospheric circulation model. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 18(3):033121, 2008.
- [25] Clara Deser, Michael A Alexander, Shang-Ping Xie, and Adam S Phillips. Sea surface temperature variability: Patterns and mechanisms. *Annual review of marine science*, 2:115–143, 2010.
- [26] Fred Attneave. Multistability in perception. *Scientific American*, 1971.
- [27] George CMA Ehrhardt, Matteo Marsili, and Fernando Vega-Redondo. Phenomenological models of socioeconomic network dynamics. *Physical Review E*, 74(3):036106, 2006.
- [28] Ernst Ising. Beitrag zur theorie des ferromagnetismus. *Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei*, 31(1):253–258, 1925.
- [29] Lars Onsager. Crystal statistics. i. a two-dimensional model with an order-disorder transition. *Physical Review*, 65(3-4):117, 1944.
- [30] AV Cano and MG Cosenza. Chimeras and clusters in networks of hyperbolic chaotic oscillators. *Physical Review E*, 95(3):030202, 2017.
- [31] Yoshiki Kuramoto and Dorjsuren Battogtokh. Coexistence of coherence and incoherence in nonlocally coupled phase oscillators. *arXiv preprint cond-mat/0210694*, 2002.
- [32] Mark J Panaggio and Daniel M Abrams. Chimera states: coexistence of coherence and incoherence in networks of coupled oscillators. *Nonlinearity*, 28(3):R67, 2015.
- [33] Kerstin Avila, David Moxey, Alberto de Lozar, Marc Avila, Dwight Barkley, and Björn Hof. The onset of turbulence in pipe flow. *Science*, 333(6039):192–196, 2011.

- [34] MG Cosenza and K Tucci. Turbulence in small-world networks. *Physical Review E*, 65(3):036223, 2002.
- [35] Jonathan Miller and David A Huse. Macroscopic equilibrium from microscopic irreversibility in a chaotic coupled-map lattice. *Physical Review E*, 48(4):2528, 1993.
- [36] A Parravano and LM Reyes. Gaslike model of social motility. *Physical Review E*, 78(2):026120, 2008.
- [37] C Echeverria, K Tucci, O Alvarez-Llamoza, EE Orozco-Guillén, M Morales, and MG Cosenza. A mesoscopic model for binary fluids. *arXiv preprint arXiv:1606.06401*, 2016.
- [38] MG Cosenza et al. Modelo sociofísico de la influencia de propaganda masiva en un sistema social. *Revista de la Facultad de Ingeniería*, 22(1), 2016.
- [39] Claudio Castellano, Matteo Marsili, and Alessandro Vespignani. Nonequilibrium phase transition in a model for social influence. *Physical Review Letters*, 85(16):3536, 2000.
- [40] K Tucci, JC González-Avella, and MG Cosenza. Rise of an alternative majority against opinion leaders. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 446:75–81, 2016.
- [41] Samuel A Safran. *Statistical thermodynamics of surfaces, interfaces, and membranes*, volume 90. Perseus Books, 1994.