

Clase N° 2: Tipos de Matrices.

En la clase anterior se vió que el orden de una matriz se refiere al número de filas (m) y columnas (n) que contiene. Como m y n pueden variar, existen diferentes tipos de matrices de acuerdo al orden. Así,

- Si $m = 1$, se obtiene una matriz con solo una fila

Por ejemplo, la matriz $Z = \begin{bmatrix} 5 & 81 & 38 \end{bmatrix}$

A este tipo de matrices se denomina **matriz fila**.
En el ejemplo se tiene una **matriz fila de orden 1×3** .
En general se representan como
 $B = (a_1 \ a_2 \ a_3 \ \dots \ a_n)$

la cual está asociada con el problema planteado inicialmente y representa la cantidad de arena, cemento y cabilla necesaria para la construcción de la casa pequeña.

- Si $n = 1$ se obtiene una matriz con solo una columna

Por ejemplo

$$T = \begin{bmatrix} 81 \\ 90 \\ 154 \end{bmatrix}$$

la cual representa la cantidad de cemento necesario para la construcción de la casa pequeña, mediana y grande respectivamente.

A este tipo de matriz se les denomina **matriz columna**.
En el ejemplo se tiene una **matriz columna de orden 3×1** .
En general se representan como

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

- Si $m = n$, la matriz tiene igual numero de filas que de columnas

Por ejemplo $A = \begin{bmatrix} 5 & 81 & 38 \\ 7 & 90 & 43 \\ 10 & 154 & 90 \end{bmatrix}$

A este tipo de matriz se denomina **matriz cuadrada**.
En este caso particular se tiene una **matriz cuadrada de orden 3×3 ($m = n$)**

la cual se ha venido estudiando desde el principio.

- Por otro lado, existen casos donde el número de filas es distinto de 1 ($m \neq 1$), el número de columnas es distinto de 1 ($n \neq 1$) y además el número de filas es distinto al número de columnas ($m \neq n$)

Por ejemplo;

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 81 & 38 \\ 7 & 90 & 43 \\ 10 & 154 & 90 \\ 22 & 325 & 171 \end{pmatrix}$$

es una matriz de orden 4×3 , es decir una matriz de 4 filas y 3 columnas, la cual contiene además de la información recaudada en A , las cantidades totales de arena, cemento y cabilla necesarias para la construcción de las tres casas

- Si se tiene una matriz con todos sus elementos iguales a cero

Por ejemplo, la matriz

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

la cual muestra que el señor Pedro no contaba con ninguna cantidad de arena cemento y cabilla al inicio de la construcción.

Ahora bien si el señor Pedro hubiese querido construir solo dos casas en lugar de tres, al inicio de la construcción en lugar de tener la matriz anterior tendría la siguiente:

$$O' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como se observa existen matrices nulas para cualquier orden

A estos tipos de matrices se les denomina matriz nula o matriz cero. Es decir, $a_{ij} = 0$ para cualquier i y j .

Ahora, veamos lo siguiente:

Una competencia entre colegios, se llevará a cabo el próximo mes. El profesor encargado del evento, decidió realizar a los cinco (5) estudiantes seleccionados cinco (5) evaluaciones, cada una referida a las distintas áreas de conocimiento que serían competidas (Matemática, Historia, Castellano, Biología y Química); con la intención de ubicarlos convenientemente en estas áreas. Los resultados de las pruebas los ordenó en la siguiente matriz M ; donde las filas representan a los alumnos y las columnas representan las pruebas.

	Matemática	Historia	Castellano	Biología	Química
Alumno 1	19	15	13	14	10
Alumno 2	11	20	09	16	15
Alumno 3	08	13	18	12	16
Alumno 4	04	16	10	19	12
Alumno 5	14	17	13	09	20

Como se vé, el profesor resaltó las mayores notas en cada asignatura y así ubicó a cada alumno en el área que según la prueba aplicada, domina mejor para la competencia.

Los elementos resaltados 19, 20, 18, 19 y 20 se denominan los elementos de la diagonal principal de esta matriz cuadrada 5×5 y representa las notas a partir de las cuales se eligió la asignatura en la que participará cada alumno



Pero cuando en una matriz cuadrada, los elementos de la diagonal principal son todos iguales a uno (1) y los demás componentes de tal matriz son todos iguales a cero (0) a este tipo de matrices se denomina matriz identidad.

Ahora, veamos lo siguiente:

Así por ejemplo, si en la matriz M , el profesor encargado decide simplificar estos resultados, colocando 1 en el área en la que cada alumno competirá y representando los demás resultados con 0, de la siguiente forma:

se tiene una matriz identidad de orden 5×5

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En general, existen matrices identidad para cualquier orden de matrices cuadradas. Es decir, para cualquier matriz A_{ij} con $i = j$. Por ejemplo;

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

son matrices identidad de orden 3×3 y 4×4 respectivamente.

Problemas de Consolidación:

1.) Si se hace una correspondencia ordenada entre los días de la semana (comenzando por el día lunes) y los números naturales del 1 al 7 (comenzando por el número 1), entonces el día martes (que se representará como M) queda en correspondencia con el número 2, lo cual se puede representar mediante la matriz

$$M = (2)$$

Indique el orden de la matriz M .

2.) Daniel y Sofia tienen 23 y 15 años de edad respectivamente. **Represente esta situación en una matriz de orden 1 x 2 e indique qué representan las filas y las columnas.**

3.) Los resultados del partido de fútbol entre Estudiantes de Mérida y Deportivo Táchira se presentan de la siguiente forma: En el primer tiempo Estudiantes de Mérida anotó dos goles mientras que Deportivo Táchira anotó solo uno. En el segundo tiempo, Estudiantes no anotó ningún gol mientras que Deportivo anotó dos goles. **Represente los resultados finales de este partido en una matriz e indique el orden de la misma.**

4.) En un juego de béisbol entre los eternos rivales Caracas y Magallanes, los resultados quedaron de la siguiente forma:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

donde las filas representan los Inning y las columnas los equipos de juego: Leones del Caracas y Navegantes del Magallanes respectivamente.

Indicar el orden de la matriz B.

5.) Diga a qué tipo de matriz corresponde cada una de las matrices representadas en los ejercicios 1, 2, 3 y 4.

6.) Represente una matriz de orden 3 x 7

7.) Si en el ejercicio 5) usted identificó algunas matrices cuadradas; identifique los elementos de la diagonal principal en cada una de ellas.

8.) En la matriz A la cual representa las cantidades de material necesarias para el primer piso de cada una de las tres casas que el Señor Pedro quiere construir, identifique los elementos de la diagonal principal y diga qué representa cada uno de estos.

9.) Diga a qué tipo de matriz corresponde cada una de las siguientes matrices.

a) $A = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ \sqrt{3} \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $A = (0)$

c) $A = (9 \quad -2 \quad 5 \quad 0)$

d) $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -\sqrt{3} & 5 & 0 & 1 \\ 4 & 8 & 8 & 0 & -1 & 7 \\ -\sqrt{3} & 0 & 5 & \frac{3}{2} & 0 & -9 \\ 5 & -1 & 4 & 0 & 0 & -8 \\ 7 & 5 & -4 & 3 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

10) Si en el ejercicio 9) usted identificó algunas matrices cuadradas; identifique los elementos de la diagonal principal en cada una de ellas.

Clase N° 3: Operaciones con matrices.

PICC: El señor Pedro, una vez que obtuvo la cantidad de material necesario para construir las tres casas, decidió construir un segundo piso a cada casa para obtener ahora las casas C1 (casa pequeña con un segundo piso), C2 (casa mediana con un segundo piso) y C3 (casa grande con un segundo piso).

Una vez mas el señor Pedro se preguntó:



¿Qué cantidad de material necesitare para construir las tres casas, ahora cada una con un segundo piso?

Si se conoce que la cantidad de arena, cemento y cabilla necesaria para la construcción de la segunda planta de cada una de las tres casas es

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 64 & 44 \\ 6 & 73 & 49 \\ 7 & 124 & 120 \end{pmatrix}$$

entonces, la cantidad de material necesario para construir las tres casas cada una con dos pisos viene dada por

$$\begin{pmatrix} 5 & 81 & 38 \\ 7 & 90 & 43 \\ 10 & 154 & 90 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 64 & 44 \\ 6 & 73 & 49 \\ 7 & 124 & 120 \end{pmatrix}$$

Donde la primera matriz (como se vió en la primera clase) representa las cantidades de material necesarias para el primer piso de cada una de las tres casas, mientras que la segunda matriz representa las cantidades de material que se requiere para el segundo piso de cada una de estas.

¿Y cómo se resuelve esto?



PICOT: El señor Pedro, una vez que se le indicó la cantidad de material necesario para construir las tres casas, decidió construir un segundo piso a cada casa para obtener ahora las casas C1 (casa A con un segundo piso), C2 (casa B con un segundo piso) y C3 (casa grande con un segundo piso).



En primer lugar, como la C1 está conformada por dos pisos, entonces, para conocer la cantidad de material total necesaria en su construcción, basta con sumar de manera natural las cantidades de materiales correspondientes en cada piso. Lo mismo ocurre con C2 y C3.

Esto, en forma numérica, se refiere a lo siguiente

$$\begin{pmatrix} 5 & 81 & 38 \\ 7 & 90 & 43 \\ 10 & 154 & 90 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 64 & 44 \\ 6 & 73 & 49 \\ 7 & 124 & 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+4 & 81+64 & 38+44 \\ 7+6 & 90+73 & 43+49 \\ 10+7 & 154+124 & 90+120 \end{pmatrix}$$

Así, se tiene que el resultado de $A+B$ viene dado por

$$\begin{pmatrix} 5 & 81 & 38 \\ 7 & 90 & 43 \\ 10 & 154 & 90 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 64 & 44 \\ 6 & 73 & 49 \\ 7 & 124 & 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 145 & 82 \\ 13 & 163 & 92 \\ 17 & 278 & 210 \end{pmatrix} \quad (*)$$

Así, la matriz $A+B = \begin{pmatrix} 9 & 145 & 82 \\ 13 & 163 & 92 \\ 17 & 278 & 210 \end{pmatrix}$ (que en adelante llamaremos C),

representa las cantidades de material necesarias para construir las tres casas ahora cada una con un segundo piso.

A esta nueva matriz obtenida se le conoce como Matriz Adición $A+B$, la cual consiste en la adición de los elementos correspondientes en matrices de igual orden, dando como resultado una nueva matriz del mismo tipo.

Por esto, el procedimiento para conocer la cantidad de material necesario en la construcción de las tres casas cada una con dos pisos (representado en (*)) puede observarse esquemática y detalladamente a continuación:

Elementos correspondientes

$$\begin{array}{c}
 \uparrow a_{11} \qquad \qquad \qquad \uparrow b_{11} \qquad \qquad \qquad \uparrow c_{11} = a_{11} + b_{11} \\
 \begin{pmatrix} 5 & 81 & 38 \\ 7 & 90 & 43 \\ 10 & 154 & 90 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 64 & 44 \\ 6 & 73 & 49 \\ 7 & 124 & 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 145 & 82 \\ 13 & 163 & 92 \\ 17 & 278 & 210 \end{pmatrix} \\
 \downarrow a_{23} \qquad \qquad \qquad \downarrow b_{23} \qquad \qquad \qquad \downarrow a_{23} + b_{23} = c_{23}
 \end{array}$$

Nota

Observe que el resultado de la suma de elementos correspondientes ocupa el mismo lugar ij en la nueva matriz suma.

Por lo tanto podemos definir formalmente la **suma de matrices** en términos de componentes de la siguiente manera:

Si $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ son dos matrices del mismo orden, entonces

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

Problemas de Consolidación

1.) En un juego de fútbol entre Estudiantes de Mérida y Deportivo de Táchira; se obtuvo los siguientes resultados

Primer Tiempo:

Mérida: 4 goles

San Cristóbal: 5 goles

Segundo Tiempo:

Mérida: 3 goles

San Cristóbal: 1 gol

Represente en forma matricial los resultados de cada uno de los tiempos de juego e indique qué representan las filas y las columnas en cada caso. Una vez hecho esto, realice la operación necesaria para generar una matriz que muestre los resultados totales del partido.

Además, indique el orden de la matriz generada.

2.) Los gastos quincenales de la señora Carolina en cada uno de sus tres hijos se representan en las siguientes matrices respectivamente

$$A = \begin{pmatrix} 11500 & 25430 \\ 8700 & 20000 \\ 13850 & 30400 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 15000 & 28990 \\ 15750 & 22700 \\ 18930 & 35470 \end{pmatrix}$$

donde las primeras columnas en cada matriz representan la cantidad de dinero invertido en transporte, mientras las segundas indican el dinero invertido en comida. Por su parte, cada fila representa los gastos, tanto en transporte como en comida, para cada uno de sus hijos.

Usando estas dos matrices, realice la operación pertinente para generar una nueva matriz que muestre los gastos mensuales de la señora Carolina e indique qué representan las filas y las columnas en la nueva matriz.

3.) Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Hallar:

a.) $A + B$

b.) $A + C$

d.) $B + C$

Clase N° 4: Propiedades de la adición de Matrices

Para reflejar estas propiedades usaremos algunos ejemplos.

1.) Considerando una vez mas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 81 & 38 \\ 7 & 90 & 43 \\ 10 & 154 & 90 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 64 & 44 \\ 6 & 73 & 49 \\ 7 & 124 & 120 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 81 & 38 \\ 7 & 90 & 43 \\ 10 & 154 & 90 \\ 22 & 325 & 171 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 4 & 64 & 44 \\ 6 & 73 & 49 \\ 7 & 124 & 120 \\ 17 & 261 & 213 \end{pmatrix}$$

las cuales contienen además de la información recaudada en A y en B respectivamente, las cantidades totales de arena, cemento y cabilla necesarias para la construcción del primer y segundo piso de cada una de las tres casas respectivamente

Calcular:

a) $A + B$

b) $B + A$

que en ambos casos representan las cantidades de arena, cemento y cabilla necesarios para la construcción de las tres casas cada una con un segundo piso.

c) $D + E$

d) $E + D$

Nota

Para realizar estos cálculos, se dejarán de lado los colores

Solución:

$$a.) A + B = \begin{pmatrix} 5 & 81 & 38 \\ 7 & 90 & 43 \\ 10 & 154 & 90 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 64 & 44 \\ 6 & 73 & 49 \\ 7 & 124 & 120 \end{pmatrix}$$

Mas adelante obviaremos este paso para simplificar las operaciones

$$A + B = \begin{pmatrix} 5+4 & 81+64 & 38+44 \\ 7+6 & 90+73 & 43+49 \\ 10+7 & 154+124 & 90+120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 145 & 82 \\ 13 & 163 & 92 \\ 17 & 278 & 210 \end{pmatrix}$$

¡Son iguales!



$$b.) B + A = \begin{pmatrix} 4 & 64 & 44 \\ 6 & 73 & 49 \\ 7 & 124 & 120 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 81 & 38 \\ 7 & 90 & 43 \\ 10 & 154 & 90 \end{pmatrix}$$

$$B + A = \begin{pmatrix} 4+5 & 64+81 & 44+38 \\ 6+7 & 73+90 & 49+43 \\ 7+10 & 124+154 & 120+90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 145 & 82 \\ 13 & 163 & 92 \\ 17 & 278 & 210 \end{pmatrix}$$

$$c.) D + E = \begin{pmatrix} 5 & 81 & 38 \\ 7 & 90 & 43 \\ 10 & 154 & 90 \\ 22 & 325 & 171 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 64 & 44 \\ 6 & 73 & 49 \\ 7 & 124 & 120 \\ 17 & 261 & 213 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 145 & 82 \\ 13 & 163 & 92 \\ 17 & 278 & 210 \\ 39 & 586 & 384 \end{pmatrix}$$

¡Son iguales!



$$d.) E + D = \begin{pmatrix} 4 & 64 & 44 \\ 6 & 73 & 49 \\ 7 & 124 & 120 \\ 17 & 261 & 213 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 81 & 38 \\ 7 & 90 & 43 \\ 10 & 154 & 90 \\ 22 & 325 & 171 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 145 & 82 \\ 13 & 163 & 92 \\ 17 & 278 & 210 \\ 39 & 586 & 384 \end{pmatrix}$$

Precisamente las igualdades $A + B = B + A$ y $D + E = E + D$

reflejan que la **adición de matrices cumple** con la

Propiedad Conmutativa



De manera general, la **Propiedad Conmutativa para la suma de matrices** se enuncia de la siguiente forma:

Sean $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ dos matrices del mismo orden, se cumple que

$$A + B = B + A$$

$$(a_{ij} + b_{ij}) = (b_{ij} + a_{ij})$$

2.) El señor Pedro además del segundo piso, decide construir un garaje a cada una de las tres casas

Una vez más el señor Pedro se preguntó:



¿Qué cantidad de material necesitare para construir las tres casas (cada una con un segundo piso) y además con un garaje?

Recordando que las cantidades de arena, cemento y cabilla necesarias para la construcción de la primera y segunda planta de cada una de las tres casas están representadas como

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 81 & 38 \\ 7 & 90 & 43 \\ 10 & 154 & 90 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 64 & 44 \\ 6 & 73 & 49 \\ 7 & 124 & 120 \end{pmatrix}$$

Y además las cantidades de arena, cemento y cabilla necesarias para la construcción del garaje de cada una de las tres casas son:

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 50 & 25 \\ 4 & 55 & 30 \\ 5 & 90 & 73 \end{pmatrix}$$

Calcular

a.) $(A+B)+F$

b.) $A+(B+F)$ e indique qué representa la matriz obtenida en cada caso

Solución

$$a.) (A+B)+F = \begin{pmatrix} 5 & 81 & 38 \\ 7 & 90 & 43 \\ 10 & 154 & 90 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 64 & 44 \\ 6 & 73 & 49 \\ 7 & 124 & 120 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 50 & 25 \\ 4 & 55 & 30 \\ 5 & 90 & 73 \end{pmatrix}$$

$$(A+B)+F = \begin{pmatrix} 9 & 145 & 82 \\ 13 & 163 & 92 \\ 17 & 278 & 210 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 50 & 25 \\ 4 & 55 & 30 \\ 5 & 90 & 73 \end{pmatrix}$$

3.) Recordando que el Señor Pedro al inicio de la construcción contaba con 0 cantidades de arena, cemento y cabilla, lo cual se representó como

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y además las cantidades de material necesarias para la construcción de las tres casas con su segundo piso y su garaje se representaron como

$$(A+B)+F = \begin{pmatrix} 11 & 195 & 107 \\ 17 & 218 & 122 \\ 22 & 368 & 283 \end{pmatrix}, \text{ matriz que en adelante llamaremos } G$$

Veamos qué ocurre al realizar la operación $A'+G$

En principio se tiene que

$$A'+G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 & 195 & 107 \\ 17 & 218 & 122 \\ 22 & 368 & 283 \end{pmatrix}$$

lo cual luego de resolver la adición, se reduce a

$$A'+G = \begin{pmatrix} 11 & 195 & 107 \\ 17 & 218 & 122 \\ 22 & 368 & 283 \end{pmatrix}$$

Observe que $A'+G = G$. Esto implica que la matriz A' está actuando como **elemento neutro** en este caso.

Elemento Neutro para la suma de matrices

Para cualquier matriz $A = (a_{ij})$ se puede encontrar una matriz nula $\hat{0} = (0_{ij})$ del mismo

orden tal que:

$$A + \hat{0} = A = \hat{0} + A$$

Por esto la matriz $\hat{0} = (0_{ij})$ es llamada Elemento Neutro

$$(A+B)+F = \begin{pmatrix} 11 & 195 & 107 \\ 17 & 218 & 122 \\ 22 & 368 & 283 \end{pmatrix}$$

$$\text{b.) } A+(B+F) = \begin{pmatrix} 5 & 81 & 38 \\ 7 & 90 & 43 \\ 10 & 154 & 90 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 64 & 44 \\ 6 & 73 & 49 \\ 7 & 124 & 120 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 50 & 25 \\ 4 & 55 & 30 \\ 5 & 90 & 73 \end{pmatrix}$$

$$A+(B+F) = \begin{pmatrix} 5 & 81 & 38 \\ 7 & 90 & 43 \\ 10 & 154 & 90 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 114 & 69 \\ 10 & 128 & 79 \\ 12 & 214 & 193 \end{pmatrix}$$

$$A+(B+F) = \begin{pmatrix} 11 & 195 & 107 \\ 17 & 218 & 122 \\ 22 & 368 & 283 \end{pmatrix}$$

¡Son iguales!



En ambos casos representa las cantidades de arena, cemento y cabilla para la construcción de las tres casas con su segundo piso y su garaje

Precisamente la igualdad $(A+B)+F = A+(B+F)$

refleja que la suma de matrices cumple con la

Propiedad Asociativa



De manera general, la **Propiedad Asociativa para la suma de matrices** se enuncia de la siguiente forma:

Sean $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ y $C = (c_{ij})$ tres matrices del mismo orden, se cumple que

$$(A+B)+C = A+(B+C)$$

$$(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})$$

4.) El primer día del mes de Diciembre Mariana cuenta con un saldo en su celular de 15000 Bs. (15 Bs. F) y Raúl con uno de -1000 Bs. (-1 B. F). Durante el transcurso del mes, Mariana se excede en el uso de su saldo por lo que al final de éste queda con -3000 Bs. (-3 Bs. F). Raúl por su parte, recargó su saldo y al final del mes cuenta con 14000 Bs. (14 Bs. F) a su favor.

Esta información se representará en la matriz S , en la cual las filas representan los gastos que tienen Mariana y Raúl en celular respectivamente; mientras que las columnas representan el saldo al inicio y al final del mes de diciembre respectivamente.

$$S = \begin{pmatrix} 15 & -3 \\ -1 & 14 \end{pmatrix}$$

Ahora bien, si en lugar de S , se tiene la siguiente matriz

$$S' = \begin{pmatrix} -15 & 3 \\ 1 & -14 \end{pmatrix}$$

Es claro que estas dos matrices difieren solo en que sus elementos correspondientes tienen signos contrarios



Además,

$$S + S' = \begin{pmatrix} 15 & -3 \\ -1 & 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -15 & 3 \\ 1 & -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 + (-15) & -3 + 3 \\ -1 + 1 & 14 + (-14) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tal motivo, a la matriz S' se le denomina elemento simétrico de S y se denota por $-S$

Elemento Simétrico de una matriz A

Para cualquier matriz $A = (a_{ij})$ se puede encontrar una matriz $-A = (-a_{ij})$ del mismo orden tal que

$$A + (-A) = 0 = -A + A$$

Por esto la matriz

$-A$ es llamada matriz simétrica de A y también A es llamada matriz simétrica de $-A$.

Así, si se quiere hallar el elemento simétrico de una matriz $X = (X_{ij})$ convendremos en formar la nueva matriz $-X = (-X_{ij})$ con los elementos de $X = (X_{ij})$ ubicados en la misma posición pero con signo contrario



Por ejemplo, la matriz simétrica de $H = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ es $-H = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$

Problemas de Consolidación:

1.) Los gastos de las familias Pérez y Sánchez en agua, electricidad y teléfono durante los últimos tres meses del año 2007 fueron:

Octubre

Familia Pérez: 20 Bs.F. en agua, 30 Bs.F en electricidad, 28 Bs.F en teléfono

Familia Sánchez: 18 Bs.F. en agua, 27 Bs.F en electricidad, 21 Bs.F en teléfono

Noviembre

Familia Pérez: 19 Bs.F. en agua, 26 Bs.F en electricidad, 25 Bs.F en teléfono

Familia Sánchez: 18 Bs.F. en agua, 29 Bs.F en electricidad, 24 Bs.F en teléfono

Diciembre

Familia Pérez: 23 Bs.F. en agua, 31 Bs.F en electricidad, 32 Bs.F en teléfono

Familia Sánchez: 20 Bs.F. en agua, 35 Bs.F en electricidad, 40 Bs.F en teléfono

- Represente los gastos de cada mes en forma matricial
- Aplique la propiedad conmutativa para obtener los gastos totales de ambas familias durante los meses octubre y noviembre.
- Aplique la propiedad asociativa para obtener los gastos totales de ambas familias durante los tres meses.

2.) Diseñe un ejercicio de matrices donde utilice el elemento neutro para la adición de matrices

3.) Durante el mes de septiembre los gastos expresados en Bs. de la señora Carolina en cada uno de sus tres hijos se representan en la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 11500 & 25430 \\ 8700 & 20000 \\ 13850 & 30400 \end{pmatrix}$$

donde la primera columna representan la cantidad de dinero invertido en transporte, mientras la segunda indica el dinero invertido en comida. Por su parte, cada fila representa los gastos tanto en transporte como en comida para cada uno de sus hijos.

- Encuentre el elemento simétrico de la matriz A
- Realice la adición de la matriz A con su simétrico

4.) Dadas las matrices

$$E = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & -2 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 5 & 10 & -11 \\ 4 & -7 & 3 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$$

Calcular

- $(E + F) + G$
- $E + (F + G)$
- $E + F$
- $F + E$

5.) Dadas las matrices

$$H = \begin{pmatrix} 534 & 823 & 527 & -5673 & 8400 \\ 23 & 1500 & 1983 & 289 & -546 \\ 8846 & 9765 & 8913 & 5836 & 1345 \\ 723 & 1145 & 7 & 7761 & 1934 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ -1 & -3 & -9 \end{pmatrix}$$

Calcular

a.) $H + I$

b.) $J + K$

6.) Dada la matriz

$$F = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 9 & 0 \\ -1 & 7 & 2 & -2 \\ 4 & 5 & -7 & 1 \end{pmatrix}$$

a.) Encuentre el elemento simétrico de la matriz F

b.) Efectuar la adición de la matriz F con su elemento simétrico

Clase N° 5: Resta de Matrices

PICC: Si los gastos en la primera y segunda quincena del señor Jaime en cada uno de sus tres hijos, se representan en las siguientes matrices, respectivamente

$$A = \begin{pmatrix} 11,5 & 25,43 \\ 8,7 & 20 \\ 13,85 & 30,4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 15 & 28,99 \\ 15,75 & 22,7 \\ 18,93 & 35,47 \end{pmatrix}$$

donde las primeras columnas en cada matriz representan la cantidad de dinero (en bolívares fuertes) invertido en transporte, mientras las segundas indican el dinero invertido en comida. Por su parte, cada fila representa los gastos tanto en transporte como en comida para cada uno de sus hijos.

Al observar los gastos ordenados de esta manera el señor Jaime se dió cuenta del aumento que hubo entre la primera y la segunda quincena. Por esta razón se preguntó lo siguiente

¿Cuál es la diferencia de gastos entre la segunda y la primera quincena?



Para conocer la diferencia de gastos que tuvo el señor Jaime entre la segunda y primera quincena, debe hallarse la matriz $B - A$

¿Y cómo se halla esta nueva matriz $B - A$?

