Universidad de Los Andes
Facultad de Ciencias
Postgrado en Matemática
Mérida - Venezuela

Controlabilidad Interior De La ecuación Lineal De La Viga

Lic. Wilmer Armando Pereira Vera

Trabajo Especial de Grado
para optar al Título de
Magister en Matemáticas

Tutor: Dr. Hugo Leiva

MÉRIDA-VENEZUELA
SEPTIEMBRE 2013

Dedicado a mis hijos:
Wilk Adrian
y Wilmer Andre.
A mis padres:
Amando y Teresa.
A mi esposa: Kathe

ÍNDICE GENERAL

RESUMEN

Este trabajo ha sido motivado por los resultados obtenidos en [2], [7], [8], [12], [13], [14] y [17], donde una nueva técnica es usada para demostrar la controlabilidad aproximada de algunos procesos de difusión. En ese sentido, en este trabajo estudiaremos la controlabilidad interior de la siguiente Ecuación Lineal de la Viga

$$\begin{cases} y_{tt} - 2\beta\Delta y_t + \Delta^2 y = 1_\omega u(t,x), & \text{en} \quad (0,\tau)\times\Omega, \\ y = \Delta y = 0, & \text{sobre} \quad (0,\tau)\times\partial\Omega, \end{cases}$$

donde $\beta > 1$, Ω es un dominio acotado suficientemente regular en $I\!R^N$ $(N \geq 1)$, ω es un subconjunto abierto no vacío de Ω, 1_ω denota la función característica del conjunto ω y el control distribuido $u \in L^2([0,\tau]; L^2(\Omega))$.

Cabe señalar que esta ecuación se origina en el estudio matemático de los sistemas estructurales de vibraciones amortiguados de una viga, y fueron considerados en [22] y en referencias afines. La técnica aplicada aquí es simple y general, y puede ser utilizada para estudiar la controlabilidad de otras ecuaciones en derivadas parciales que modelan procesos difusivos, tales como la ecuación de Benjamin-Bona-Mohany, las ecuación de ondas fuertemente amortiguada, entre otras.

Específicamente, probamos que para todo $\tau > 0$ el sistema es aproximadamente controlable sobre $[0,\tau]$. Además, exhibimos una sucesión de controles que transfieren el sistema desde un estado inicial a un estado final en un tiempo prefijado τ

Finalmente, debemos señalar que el resultado principal de este trabajo apareció publicado en la revista African Diaspora Journal of Mathematics, ver [16].

INTRODUCCIÓN

Este trabajo ha sido motivado por los resultados obtenidos en [2], [7], [8], [12], [13], [14] y [17], donde una nueva técnica es usada para demostrar la controlabilidad aproximada de algunos procesos de difusión.

Siguiendo [2] y [7], en este proyecto de investigación estudiamos la controlabilidad interior aproximada de la Ecuación Lineal de La Viga

$$\begin{cases} y_{tt} - 2\beta\Delta y_t + \Delta^2 y = 1_\omega u(t,x), & \text{en} \quad (0,\tau)\times\Omega, \\ y = \Delta y = 0, & \text{sobre} \quad (0,\tau)\times\partial\Omega, \end{cases} \tag{0.1}$$

donde $\beta > 1$, Ω es un dominio acotado suficientemente regular en $I\!R^N$ $(N \geq 1)$, ω es un subconjunto abierto no vacío de Ω, 1_ω denota la función característica del conjunto ω y el control distribuido $u \in L^2([0,\tau]; L^2(\Omega))$. Cabe señalar que esta ecuación se origina en el estudio matemático de los sistemas estructurales de vibraciones amortiguados de una viga, y fueron considerados en [22] y en referencias afines.

Este problema se formula en el espacio $Z_1 = \left[H^2(\Omega)\bigcap H_0^1(\Omega)\right] \times L^2(\Omega) = D(-\Delta) \times L^2(\Omega)$ dotado con la norma del gráfico cerrado; es decir:

$$\left\| \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix} \right\|_{Z_1} = \sqrt{\|(-\Delta)y\|_{L^2}^2 + \|v\|_{L^2}^2},$$

donde

$$\|v\| = \|v\|_{L^2} = \sqrt{\int_\Omega |v(x)|^2 dx}, \quad \forall v \in L^2(\Omega).$$

***Observación* 0.1.** El término $-2\beta\Delta u_t$ en la ecuación (0.1) actua como una fuerza de amortiguación, por lo tanto el espacio de la energía utilizada para establecer la ecuación de onda no es adecuado aquí; de hecho, la ecuación lineal sin control puede ser transformada en un sistema de ecuaciones parabólicas de la forma $z_t = D\Delta z$ (ver [20]), el cual muestra que $Z_1 = \left[H^2(\Omega)\bigcap H_0^1(\Omega)\right] \times L^2(\Omega)$ es el espacio correcto para una formulación abstracta del problema.

Definición 0.1. ***(Controlabilidad Aproximada)*** *El sistema (0.1) se dice que tiene controlabilidad aproximada sobre $[0,\tau]$ sí para cada $z_0 = (y_0, v_0)^T$, $z_1 = (y_1, v_1)^T \in Z_1$, $\epsilon > 0$ existe $u \in L^2(0,\tau;U)$ tal que la solución $z(t) = (y(t), y_t(t))^T$ de (0.1), correspondiente a u, verifica:*

$$z(0) = z_0 \ \ y \ \ \| z(\tau) - z_1 \|_{Z_1} < \epsilon. \quad Fig.2$$

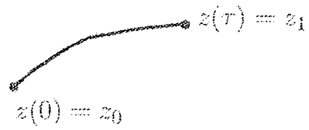

Fig.1

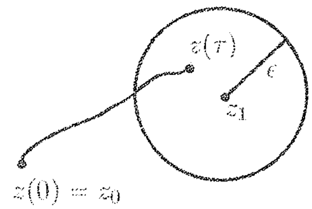

Fig.2

La controlabilidad aproximada de la siguiente ecuación lineal de la viga con los controles actuando en todo el conjunto Ω fue estudiada en [8]

$$\begin{cases} y_{tt} - 2\beta\Delta y_t + \Delta^2 y = u(t,x), & \text{en} \quad (0,\tau)\times\Omega, \\ y = \Delta y = 0, & \text{sobre} \quad (0,\tau)\times\partial\Omega. \end{cases} \tag{0.2}$$

En nuestro trabajo estamos interesados en la controlabilidad interior aproximada de la Ecuación Lineal de La Viga (0.1), lo cual es un problema más interesante desde el punto de vista de las aplicaciones ya que el control está actuando sólo en un subconjunto o parte de la placa de Ω. En otras palabras, deseamos probar el siguiente enunciado (ver Teorema 3.1) : Para todo $\tau > 0$ el sistema es aproximadamente controlable sobre $[0,\tau]$. Por otra parte, podemos exhibir una sucesión de controles que lleven el sistema de un estado inicial a un estado final en un tiempo prefijado (ver Teorema 3.1).

Finalmente, este trabajo esta estructurado como sigue: En el capítulo 1, se presentan, con su demostración, algunos resultados fudamentales sobre la teoría de semigrupos de operadores fuertemente continuos que serán utilizados en los capítulos siguientes. En el capítulo 2, se plantea la formulación abstracta del problema en un espacio de Hilbert adecuado. En el capítulo 3, nos basamos básicamente en el resultado producto de esta investigación ya que aquí se prueba, después de la formulación abstracta, la controlabilidad interior de la ecuación de la viga (0.1).

CAPÍTULO 1

SEMIGRUPO DE OPERADORES

En este primer capítulo se presenta, en detalles, algunos resultados de la Teoría de Semigrupos Fuertemente Continuos necesarios para hacer una formulación abstracta del problema, particularmente el lema 1.1 debido a H.Leiva [11], el cual caracteriza una clase amplia de Semigrupos Fuertemente Continuos mostrando su generador y el espectro del mismo.

1.1. El Generador Infinitesimal

Definición 1.1. *Sea Z un espacio de Hilbert. Una familia $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ de operadores lineales y continuos $T(t) : Z \longrightarrow Z$ se denomina* ***Semigrupo Fuertemente Continuo****, se usa la abreviación C_o-semigrupo para denotarlo, si satisface las tres condiciones siguientes:*

i) $T(0) = I$ *(I es el operador identidad en $L(Z)$)*

ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$, $t, s \geq 0$

iii) *Para todo z_o en Z, $T(t)z_0$ es fuertemente continuo en $t = 0$, es decir,*

$$\lim_{t\to 0^+} \|T(t)z_0 - z_0\| = 0.$$

Definición 1.2. *El* ***generador infinitesimal*** *A de un semigrupo fuertemente continuo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ en un espacio de Hilbert Z es definido por:*

$$Az = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}(T(t) - I)z, \quad z \in D(A)$$

siempre que el límite exista. El dominio de A, $D(A)$, es el conjunto de elementos en Z para el cual el límite existe.

Algunas propiedades importantes de los C_0-semigrupos están dadas en el siguiente teorema:

Teorema 1.1. *Sea $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un semigrupo fuertemente continuo sobre un espacio de Hilbert Z. Entonces $T(t)$ posee las siguientes propiedades*

a) *$\|T(t)\|$ está acotada sobre todo intervalo finito de $[0,+\infty)$.*

b) *$T(t)$ es fuertemente continuo en todo $t \in [0,+\infty)$.*

c) *Para todo $z \in Z$, se tiene que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t T(s)zds \longrightarrow z, \qquad t \to 0^+.$$

d) *Si $\omega_0 = \inf_{t>0}\left(\frac{1}{t}\log(\|T(t)\|\right)$, entonces $\omega_0 = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t}\log(\|T(t)\|)\right) < \infty$.*

e) *Para todo $\omega > \omega_0$, existe una constante M_ω, tal que $\|T(t)\| \leq M_\omega e^{\omega t}$, para todo $t \geq 0$.*

Demostración.
Para la demostración podemos consultar Curtain y Zwart [3]

□

El siguiente teorema de la teoría de semigrupos fuertemente continuos proporciona propiedades interesantes del generador infinitesimal de un C_0-semigrupo.

Teorema 1.2. *Sea $\{T(t)\}$, $t \geq 0$, un semigrupo de operadores fuertemente continuo, y A su generador infinitesimal con dominio $D(A)$. Entonces*

a) $D(A)$ es un subespacio lineal de Z y A es un operador lineal en $D(A)$.

b) Si $z \in D(A)$, entonces $T(t)z \in D(A)$ $t \geq 0$, además $T(t)z$ es fuertemente diferenciable en t y

$$\frac{d}{dt}T(t)z = AT(t)z = T(t)Az \qquad (t \geq 0).$$

c) Si $z \in D(A)$, entonces

$$T(t)z - T(s)z = \int_s^t T(u)Azdu \qquad (t, s \geq 0).$$

d) Si $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(u)T(u)zdu = f(t)T(t)z \qquad (z \in Z,\ t \geq 0).$$

e)

$$\textstyle\int_0^t T(s)zds \in D(A) \quad y \quad T(t)z = z + A\int_0^t T(s)zds \qquad (z \in Z).$$

f) El subespacio $D(A)$ es denso en Z y A es un operador cerrado en $D(A)$.

Demostración.
a) Sean $z, y \in D(A)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Veamos que $\alpha z + y \in D(A)$ y que A es un operador lineal en $D(A)$:

$$\begin{aligned}
\lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)(\alpha z + y) - (\alpha z + y)}{t} &= \lim_{t \to 0^+} \frac{\alpha T(t)z + T_t(y) - \alpha z - y}{t} \\
&= \lim_{t \to 0^+} \frac{\alpha[T(t)z - z]}{t} + \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)y - y}{t} \\
&= \alpha \lim_{t \to 0^+} A(t)z + \lim_{t \to 0^+} A(t)y.
\end{aligned}$$

Como $z, y \in D(A)$, se sigue que los límites existen, luego $\alpha z + y \in D(A)$; además se tiene

$$\begin{aligned}
A(\alpha z + y) &= \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)(\alpha z + y) - (\alpha z + y)}{t} \\
&= \alpha \lim_{t \to 0^+} A(t)z + \lim_{t \to 0^+} A(t)y = \alpha A(z) + A(y).
\end{aligned}$$

b) Sean $z \in D(A)$, $t \geq 0$ fijo y $h > 0$. Queremos ver que $T(t)z \in D(A)$.
En efecto,

$$A(h)T(t)z = T(t)A(h)z$$

por ser los operadores $T(t)$ y $T(h)$ conmutativos. Así:

$$\lim_{h \to 0^+} A(h)T(t)(z) = \lim_{h \to 0^+} T(t)A(h)z = T(t) \lim_{h \to 0^+} A(h)z = T(t)Az.$$

Por lo tanto,

$$T(t)z \in D(A) \quad y \quad AT(t)z = T(t)Az$$

Pues, dado $z \in D(A)$ y $h > 0$ entonces

$$\frac{T(h) - I}{h} T(t)z = T(t)\Big[\frac{T(h) - I}{h}\Big]z$$

Así,

$$\begin{aligned} AT(t)z = \lim_{t \to 0^+} \frac{T(h) - I}{h} T(t)z &= T(t) \lim_{t \to 0^+} \Big[\frac{T(h) - I}{h}\Big]z \\ &= T(t)Az. \end{aligned}$$

Probaremos ahora que $T(t)z$ es diferenciable. Para esto es suficiente ver que las derivadas laterales existen y son iguales.
Sean $t > 0$ y h suficientemente pequeño, entonces

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0^+} \frac{T(t+h)z - T(t)z}{h} &= \lim_{h \to 0^+} \frac{T(t)[T(h)z - z]}{h} \\ &= T_t \lim_{h \to 0^+} \frac{T(h)z - z}{h} = T(t)Az, \quad (z \in D(A)). \end{aligned}$$

Así, la derivada a la derecha de cero existe y vale $T(t)Az$.
Para la derivada a la izquierda de cero, sea $t > 0$ y consideremos el siguiente cociente

$$\frac{T(t-h)z - T(t)z}{-h} = \frac{T(t)z - T(t-h)z}{h} = \frac{T(t-h)[T(h)z - z]}{h}.$$

Ahora, tomando límite cuando $-h \to 0^-$ y del hecho que $T(t)$ es fuertemente continuo y acotado sobre compacto, tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{-h \to 0^-} \frac{T(t-h)z - T(t)z}{-h} &= \lim_{h \to 0^+} \frac{T(t-h)[T(h)z - z]}{h} \\ &= T(t) \lim_{h \to 0^+} \frac{T(h)z - z}{h} = T(t)Az. \end{aligned}$$

Luego, la derivada a la izquierda de cero existe y es igual a la derivada a la derecha de cero. Por consiguiente

$$\frac{d}{dt} T(t)z = T(t)Az = AT(t)z.$$

c) Veamos que si $z \in D(A)$, entonces

$$T(t)z - T(s)z = \int_s^t T(u)Azdu, \quad (t, s \geq 0).$$

Sea $g(t) = T(t)z$, sabemos que $g(t)$ es diferenciable, más aun $g'(t)$ es continua, entonces $g(t)$ es una función abstracta continuamente diferenciable y se tiene que

$$g(t) - g(s) = \int_s^t g'(u)du = \int_s^t T(u)Azdu$$

$$\Longrightarrow \quad T(t)z - T(s)z = \int_s^t T(u)Azdu$$

d) Para probar d) consideremos $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y definamos la función abstracta $\varphi : [0, \infty) \longrightarrow \mathrm{Z}$, dada por $\varphi(t) = f(t)T(t)z$, que es continua en t.
Consideremos

$$F(s) = \int_t^{t+s} \varphi(u)du,$$

que está bien definida.
Luego,

$$F'(s) = \varphi(t+s) = f(t+s)T(t+s)x.$$

Para $s = 0$,

$$F'(0) = f(t)T(t)z. \tag{1.1}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} F'(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{F(h) - F(0)}{h} &= \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \varphi(u)du \\ &= \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \left[\int_t^{t+h} f(u)T(u)zdu \right]. \end{aligned} \tag{1.2}$$

En particular, si $f(t) \equiv 1$, entonces

$$T(t)z = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(u)zdu.$$

Más aún, si $f(t) \equiv 1$ y $t = 0$, se tiene

$$z = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \int_0^h T(u)zdu$$

e) Para ello, observemos que

$$\begin{aligned} A(h) : Z &\longrightarrow Z \\ z &\longrightarrow \frac{T(h)z - z}{h} = A(h)z \end{aligned}$$

es un operador cerrado en el espacio de Banach Z, y

$$\int_0^t T(s)zds \in \mathrm{C}\big[[0,\infty), Z\big]$$

se tiene (ver [6]).

$$\begin{aligned} A(h)\int_0^t T(s)zds &= \int_0^t \frac{T(h)T(s)z - T(s)z}{h}ds = \frac{1}{h}\int_0^t T(h+s)z - T(s)zds \\ &= \frac{1}{h}\int_h^{t+h} T(s)zds - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)zds \\ &= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)zds - \frac{1}{h}\int_t^h T(s)zds - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)zds \\ &= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)zds - \frac{1}{h}\int_0^h T(s)zds. \end{aligned}$$

Tomando límite cuando $h \to 0^+$ en ambos lados y usando la parte d), tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0^+} A(h)\int_0^t T(s)zds &= \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)zds - \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_0^h T(s)zds \\ &= T(t)z - z. \end{aligned}$$

Lo que prueba que

$$\int_0^t T(s)zds \in D(A) \quad y \quad A\int_0^t T(s)zds = T(t)z - z.$$

Así,

$$T(t)z = z + A\int_0^t T(s)zds.$$

f) Aca, probaremos primero que $D(A)$ es denso en Z; para ello consideremos $z \in Z$ y una sucesión $(h_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^+$ tal que $h_n \to 0$ cuando $n \to \infty$.
Sea

$$z_n = \frac{1}{h_n}\int_0^{h_n} T(s)zds.$$

Por las partes a) y e) tenemos que $z_n \in D(A)$ para todo n, y por la parte d) se obtiene que

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{h_n}\int_0^{h_n} T(s)zds = z$$

Probando así que para todo $z \in Z$, existe $(z_n)_{n=1}^{\infty} \in D(A)$, tal que $z_n \to z$. Por lo tanto, $\overline{D(A)} = Z$.
Probaremos ahora que A es cerrado.
Sea $z_n \in D(A)$ tal que

$$z_n \to z, \quad y \quad A(z_n) \to y, \quad cuando \quad n \to \infty.$$

Luego se tiene que

$$T(t)z - z = \lim_{n\to\infty} \Big[T(t)z_n - z_n\Big] = \lim_{n\to\infty} \int_0^t T(u)A(z_n)du. \tag{1.3}$$

Por otra parte,

$$\|T(s)A(z_n) - T(s)(y)\| = \|T(s)(A(z_n) - y)\| \leq \|T(s)\|\|A(z_n) - y\| \leq Me^{\omega s}\|A(z_n) - y\|$$

Tomando límite cuando $n \to \infty$, la parte derecha de la desigualdad tiende a cero, por lo tanto,

$$T(s)A(z_n) \to T(s)(y). \tag{1.4}$$

uniformemente en $[0, t]$.
De (1.3) y (1.4) tenemos que

$$T(t)z - z = \lim_{n\to\infty} \int_0^t T(u)A(z_n)du = \int_0^t T(u)ydu.$$

Ahora, de la definición de A_t y por la parte d) se tiene

$$\lim_{t\to 0^+} A(t)z = \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)z - z}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\int_0^t T(u)ydu = y.$$

Así, hemos probado que

$$z \in D(A) \quad y \quad A(z) = y.$$

□

1.2. El Problema de Valor Inicial de Cauchy

En primer lugar estudiaremos el problema de Cauchy homogéneo, para lo cual consideraremos el siguiente teorema.

Teorema 1.3. *Sea $\{T(t)\}$, $t \geq 0$, un semigrupo de operadores fuertemente continuo, y A su generador infinitesimal con dominio $D(A)$, entonces el problema de Cauchy*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t), & (t \geq 0) \\ x(0) = z_0, & (z_0 \in D(A)) \end{cases} \tag{1.5}$$

tiene una única solución $x(t) = T(t)z_0$, para todo $t \geq 0$.

Demostración.
Usando el Teorema 1.2 se verifica, fácilmente, que la función $x(t) = T(t)z_0$ es solución del problema de valor incial (1.5).
Para probar la unicidad, sea $y(t)$ otra solución de (1.5), entonces $y(t) \in D(A)$.
Consideremos la función

$$F(s) = T(t-s)y(s).$$

Del Teorema 1.2,

$$F'(s) = -AT(t-s)y(s) + T(t-s)Ay'(s) = -AT(t-s)y(s) + T(t-s)Ay(s) = 0.$$

De donde tenemos que $F(s)$ es una función constante para todo $0 \leq s \leq t$.
En particular,

$$F(t) = F(0) \quad \Longrightarrow y(t) = T(t)y(0) = T(t)z_0 \Longrightarrow \quad y(t) = x(t), \quad \forall t \geq 0.$$

$\square$

En segundo lugar, estudiaremos el problema de Cauchy no homogéneo, para lo cual enunciamos el siguiente resultado

Teorema 1.4. *Sea $\{T(t)\}$, $t \geq 0$ un semigrupo de operadores fuertemente continuo, A su generador infinitesimal con dominio $D(A)$ y $f : [0, \infty) \longrightarrow Z$ una función continuamente diferenciable. Entonces el problema de Cauchy*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + f(t), & (t \geq 0) \\ x(0) = z_0, & (z_0 \in D(A)) \end{cases} \tag{1.6}$$

tiene como única solución la función

$$x(t) = T(t)z_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \qquad (t \geq 0) \tag{1.7}$$

Demostración.
Para la existencia de la solución es suficiente probar que la función $x(t)$ en la ecuación (1.7) tiene derivada fuerte y satisface la ecuación (1.6). La función $y(t) = T(t)z_0$ es solución del problema de valor inicial (1.5). Resta ver que

$$\int_0^t T(t-s)f(s)ds$$

satisface la ecuación (1.6).
Sea

$$g(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \quad (0 \leq s \leq t). \tag{1.8}$$

Haciendo un cambio de variable, obtenemos

$$g(t) = \int_0^t T(s)f(t-s)ds. \tag{1.9}$$

Como $T(.)$ es acotada sobre intervalos compacto de $[0,\infty)$, y f(s) es continua, entonces la integral de Riemann

$$\int_0^t T(s)f(t-s)ds$$

existe.

Consideremos el cociente

$$\begin{aligned}
\frac{g(t+h)-g(t)}{h} &= \frac{1}{h}\Big[\int_0^{t+h} T(s)f(t+h-s)ds - \int_0^t T(s)f(t-s)ds\Big] \\
&= \frac{1}{h}\Big[\int_0^{t} T(s)f(t+h-s)ds + \int_t^{t+h} T(s)f(t+h-s)ds \\
&- \int_0^t T(s)f(t-s)ds\Big] \\
&= \frac{1}{h}\int_0^t T(s)[f(t+h-s)-f(t-s)]ds + \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)f(t+h-s)ds.
\end{aligned}$$

Tomando límite cuando $h \to 0$, y usando la parte d) del Teorema 1.2, tenemos que $g'(t)$ existe, y

$$g'(t) = \int_0^t T(s)f'(t-s)ds + T(t)f(0).$$

Sea $h > 0$, de la ecuación (1.8) obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{g(t+h)-g(t)}{h} &= \frac{1}{h}\Big[\int_0^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds - \int_0^t T(t-s)f(s)ds\Big] \\
&= \frac{1}{h}\Big[\int_0^{t} T(t+h-s)f(s)ds - \int_0^t T(t-s)f(s)ds + \int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds\Big] \\
&= \frac{T(h)-I}{h}\int_0^t T(t-s)f(s)ds + \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds.
\end{aligned}$$

Ahora, cuando $h \to 0$,

$$g'(t) = A\int_0^t T(t-s)f(s)ds + T_0 f(t) = A\int_0^t T(t-s)f(s)ds + f(t).$$

Así, hemos probado que $g(t)$ es fuertemente diferenciable, y

$$g'(t) = Ag(t) + f(t).$$

Por lo tanto, la función (1.7) es fuertemente diferenciable y es solución de la ecuación (1.6). Veamos la unicidad. Supongamos que $y(t)$ es otra solución del problema de valor inicial (1.6) y consideremos

$$F(s) = T(t-s)y(s)$$

entonces

$$F'(s) = -AT(t-s)y(s) + T(t-s)[Ay(s) + f(s)].$$

Luego

$$F'(s) = T(t-s)f(s).$$

Integrando resulta

$$F(t) - F(0) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds \quad \Longrightarrow y(t) - T(t)x_0 = \int_0^t T(t-s)f(s)ds.$$

De donde

$$y(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)$$

Por tanto,

$$y(t) = x(t).$$

□

Definición 1.3. *La solución de la ecuación integral (1.7) se denomina* ***solución moderada*** *de la ecuación (1.6)*

***Observación* 1.1.** La función $x(t)$ dada por la fórmula (1.7), está bien definida para funciones f no necesariamente diferenciables y cualquier dato inicial $z_o \in Z$, de hecho f puede ser sólo integrable, como es el caso del problema tratado en este trabajo.

Teorema 1.5. *Sea A un operador con dominio $D(A)$ denso en un espacio de Banach Z, entonces A puede ser el generador infinitesimal a lo sumo de un semigrupo fuertemente continuo $\{T(t)\}$, $t \geq 0$.*

Demostración.
Sean $\{T(t)\}, t \geq 0$ y $\{S(t)\}, t \geq 0$ dos semigrupos de operadores fuertemente continuos, con generador infinitesimal A. Por el Teorema 1.3, $x(t) = T(t)z_0$ e $y(t) = S(t)z_0$ son soluciones del problema de Cauchy (1.5). Por unicidad se obtiene que

$$T(t)z_0 = S(t)z_0, \quad (t \geq 0, \quad z_0 \in D(A)).$$

De la densidad de $D(A)$ en Z y del hecho que $T(t)$ y $S(t)$ son acotados, tenemos

$$T(t)z = S(t)z, \quad (t \geq 0, \quad z \in Z).$$

□

Definición 1.4. *(Semigrupo Analítico) Un* C_0- *Semigrupo* $T(t)_{t\geq 0}$ *es analítico, si para cada* $z \in Z$ *la función* $t \to T(t)z, t > 0$ *es diferenciable y existe una región* $R_\alpha = \{z \in \mathbb{C} : Re(z) > 0, |arg(z)| < \alpha\}$ *del plano complejo tal que* $T(t)$ *pueda extenderse a* R_α *analíticamente y*

$$\frac{d}{dt}T(t)z = AT(t)z, \ t > 0, \ \forall z \in Z,$$

donde A *es el generador infinitesimal de* $T(t)_{t\geq 0}$.

1.3. Un Lema Sobre Semigrupo de Operadores

El siguiente Lema, debido a H. Leiva [11], juega un papel fundamental para obtener los principales resultados que presentaremos en los siguientes capítulos.

Lema 1.1. *[11]. (Leiva) Sea Z un espacio de Hilbert separable y* $\{A_n\}_{n\geq 1}$, $\{P_n\}_{n\geq 1}$ *dos familias de operadores lineales acotados en Z, con* $\{P_n\}_{n\geq 1}$ *una familia completa de proyecciones ortogonales, tales que*

$$A_n P_n = P_n A_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{1.10}$$

Definamos la siguiente familia de operadores lineales

$$T(t)z = \sum_{n=1}^{\infty} e^{A_n t} P_n z, \quad z \in Z, \quad t \geq 0. \tag{1.11}$$

Entonces

a) $T(t)$ *es un operador lineal y acotado si*

$$\|e^{A_n t}\| \leq g(t), \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{1.12}$$

para alguna función continua a valores reales $g(t) \geq 0$, $t \geq 0$.

b) Bajo la condición anterior $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *es un semigrupo fuertemente continuo en el espacio de Hilbert* Z, *cuyo generador infinitesimal* A *esta dado por*

$$Az = \sum_{n=1}^{\infty} A_n P_n z, \quad z \in D(A),$$

con

$$D(A) = \left\{ z \in Z : \sum_{n=1}^{\infty} \|A_n P_n z\|^2 < \infty \right\}$$

c) El espectro $\sigma(A)$ de A está dado por

$$\sigma(A) = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma(\overline{A_n})}$$

donde $\overline{A_n} = A_n P_n : R(P_n) \longrightarrow R(P_n),\ R(P_n) = Rang(P_n)$

Demostración.

a) Supongamos que $\| e^{A_n t} \| \leq g(t),\ n = 1, 2, 3, \ldots,$ donde $g : [0, +\infty)$ es una función continua.
Luego, ya que $A_n P_n = P_n A_n$ se tiene para cada $z \in Z$, que $\{e^{A_n t} P_n z\}_{n=1}^{\infty}$ es una familia de vectores ortogonales en Z; por tanto,

$$\| T(t)z \|^2 = \| \sum_{n=1}^{\infty} e^{A_n t} P_n z \|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \| e^{A_n t} P_n z \|^2$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \| e^{A_n t} \|^2 \| P_n z \|^2 \leq [g(t)]^2 \sum_{n=1}^{\infty} \| P_n z \|^2$$

$$\Rightarrow \| T(t)z \|^2 \leq [g(t)]^2 \, \| z \|^2 = \left(g(t) \, \| z \| \right)^2$$

Luego, $\| T(t)z \| \leq g(t) \, \| z \|$. Como $\| T(t) \| = \sup_{\|z\|=1} \| T(t)z \| \leq g(t)$, se obtiene que $T \in L(Z)$; es decir, $T(t)$ es un operador lineal y acotado.
b) Veamos que $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ es un C_0-semigrupo. Es decir, se cumplen con las condiciones de la Definición 1.1

i) $T(0)z = \sum_{n=1}^{\infty} e^{A_n 0} P_n z = \sum_{n=1}^{\infty} P_n z = z$. Así,

$$T(0) = I \tag{1.13}$$

ii)

$$T(t)T(s)z = \sum_{n=1}^{\infty} e^{A_n t} P_n T(s)z = \sum_{n=1}^{\infty} e^{A_n t} P_n \Big(\sum_{m=1}^{\infty} e^{A_m s} P_m z \Big)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} e^{A_n t} e^{A_n s} P_n z = \sum_{n=1}^{\infty} e^{A_n (t+s)} P_n z$$

$$= T(t+s)z.$$

Luego,

$$T(t)T(s)z = T(t+s)z. \tag{1.14}$$

iii) $\{P_n\}_{n\geq 1}$ es una familia completa, por lo que, $z = \sum_{n=1}^{\infty} P_n z,\ z \in Z$. Luego,

$$\| T(t)z - z \|^2 = \| \sum_{n=1}^{\infty} e^{A_n t} P_n z - \sum_{n=1}^{\infty} P_n z \|^2 = \| \sum_{n=1}^{\infty} (e^{A_n t} - I) P_n z \|^2$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \| e^{A_n t} - I \|^2 \| P_n z \|^2$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \| e^{A_n t} - I \|^2 \| P_n z \|^2 + \sum_{n=N+1}^{\infty} \| e^{A_n t} - I \|^2 \| P_n z \|^2$$

$$\leq \sup_{1\leq n\leq N} \| e^{A_n t} - I \|^2 \sum_{n=1}^{N} \| P_n z \|^2 + K \sum_{n=N+1}^{\infty} \| P_n z \|^2 .$$

Donde $K = \sup_{n\geq 1, 0\leq t\leq 1} \| e^{A_n t} - I \|^2$.

Dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \| P_n z \|^2 < \frac{\varepsilon}{2K}$$

y podemos escoger $t \leq 1$ tal que

$$\sup_{1\leq n\leq N} \| e^{A_n t} - I \|^2 \leq \frac{\varepsilon}{2 \| z \|^2}.$$

Así,

$$\| T(t)z - z \|^2 \leq \frac{\varepsilon}{2 \| z \|^2} \sum_{n=1}^{N} \| P_n z \|^2 + K \frac{\varepsilon}{2K}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2 \parallel z \parallel^2} \sum_{n=1}^{\infty} \parallel P_n z \parallel^2 + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$= \frac{\varepsilon}{2 \parallel z \parallel^2} \parallel z \parallel^2 + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{t \to 0^+} \parallel T(t)z - z \parallel = 0, \forall z \in Z$$

Así, de i), ii), iii) obtenemos que $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ es un C_0-semigrupo.

Por otro lado, sea A el generador infinitesimal de este semigrupo, $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, y $D(A)$ su dominio. Entonces para $z \in D(A)$ se tiene, por definición, que

$$Az = \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)z - z}{t} = \lim_{t \to 0^+} \frac{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{A_n t} P_n z - \sum_{n=1}^{\infty} P_n z}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0^+} \frac{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (e^{A_n t} - I) P_n z}{t} = \lim_{t \to 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{A_n t} - I}{t} P_n z$$

Ahora, puesto que $e^{A_m t}$ es un semigrupo fuertemente continuo cuyo generador infinitesimal es A_m, entonces

$$P_m A z = P_m \Big(\lim_{t \to 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{A_n t} - I}{t} P_n z \Big)$$

$$P_m A z = \lim_{t \to 0^+} \frac{e^{A_m t} - I}{t} P_m z = A_m P_m z$$

de donde,

$$Az = \sum_{n=1}^{\infty} P_n A z = \sum_{n=1}^{\infty} A_n P_n z$$

$$\Longrightarrow Az = \sum_{n=1}^{\infty} A_n P_n z$$

y

$$\begin{aligned}\| Az \|^2 &= \| \sum_{n=1}^{\infty} A_n P_n z \|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \| A_n P_n z \|^2 \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \| A_n \|^2 \| P_n z \|^2 \leq [k(t)]^2 \sum_{n=1}^{\infty} \| \quad P_n z \|^2 \\ \| \mathcal{A} z \|^2 &\leq \big(k(t) \| z \| \big)^2 < \infty\end{aligned}$$

entonces $z \in \Big\{ z \in Z : \sum_{n=1}^{\infty} \| A_n P_n z \|^2 < \infty \Big\}$.

Luego,

$$D(A) \subset \Big\{ z \in Z : \sum_{n=1}^{\infty} \| A_n P_n z \|^2 < \infty \Big\}. \tag{1.15}$$

Ahora, supongamos que $z \in \Big\{ z \in Z : \sum_{n=1}^{\infty} \| A_n P_n z \|^2 < \infty \Big\}$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n P_n z = y \in Z.$$

Haciendo $z_n = \sum_{k=1}^{n} P_k z$ obtenemos

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{T(t) z_n - z_n}{t} = \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t) \sum_{k=1}^{n} P_k z - \sum_{k=1}^{n} P_k z}{t}$$

$$\begin{aligned}\lim_{t \to 0^+} \frac{T(t) z_n - z_n}{t} &= \lim_{t \to 0^+} \frac{\sum_{k=1}^{n} P_k T(t) z - \sum_{k=1}^{n} P_k z}{t} = \lim_{t \to 0^+} \frac{\sum_{n=1}^{n} P_k \big(\sum_{n=1}^{\infty} e^{A_n t} P_n z \big) - \sum_{k=1}^{n} P_k z}{t} \\ &= \lim_{t \to 0^+} \frac{\sum_{k=1}^{n} e^{A_k t} P_k z - \sum_{k=1}^{n} P_k z}{t} = \lim_{t \to 0^+} \frac{\sum_{k=1}^{n} \big(e^{A_k t} - I \big) P_k z}{t} \\ &= \sum_{k=1}^{n} P_k \Big(\lim_{t \to 0^+} \frac{e^{A_k t} - I}{t} \Big) z = \sum_{k=1}^{n} P_k A_k z\end{aligned}$$

se tiene,

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{T(t)z_n - z_n}{t} = \sum_{k=1}^{n} P_k A_k z < \infty$$

y

$$Az_n = \lim_{t\to 0^+}\frac{T(t)z_n - z_n}{t} = \sum_{k=1}^{n} P_k A_k z.$$

Por lo tanto, $z_n \in D(A)$ y $Az_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P_k A_k z$, ya que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} z_n = z$ y

$$\lim_{n\to\infty} Az_n = \sum_{k=1}^{n} P_k A_k z \Rightarrow \lim_{n\to\infty} Az_n = \sum_{k=1}^{\infty} P_k A_k z = y$$

y como A es un operador lineal y cerrado tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} Az_n = Az,\ \lim_{n\to\infty} z_n = z.$$

Del teorema del gráfico cerrado,

$$Az = y = \sum_{n=1}^{\infty} A_n P_n z$$

$$\Longrightarrow Az = \sum_{n=1}^{\infty} A_n P_n z.$$

$z \in D(A)$ y $Az = y$. Por consiguiente,

$$\left\{z \in Z : \sum_{n=1}^{\infty} \| A_n P_n z \|^2 < \infty\right\} \subset D(\mathcal{A}) \tag{1.16}$$

Hemos mostrado que

$$D(A) = \{z \in Z : \sum_{n=1}^{\infty} \| A_n P_n z \|^2 < \infty\}.$$

c) Es equivalente a probar lo siguiente:

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} \sigma(\overline{A}_m) \subset \sigma(A) \ \text{ y } \ \sigma(A) \subset \overline{\bigcup_{m=1}^{\infty} \sigma(\overline{A}_m)}.$$

Probaremos primero que $\bigcup_{m=1}^{\infty}\sigma(\overline{A}_m) \subset \sigma(A)$, pero esto equivale a $\rho(A) \subset \bigcap_{m=1}^{\infty}\rho(\overline{A}_m)$. En efecto, tenemos que $\sigma(A) = \rho^c(A)$. Ahora bién,

$$\bigcup_{m=1}^{\infty}\sigma(\overline{A}_m) = \bigcup_{m=1}^{\infty}\rho^c(\overline{A}_m) = \Big(\bigcap_{m=1}^{\infty}\rho(\overline{A}_m)\Big)^c = \sigma(A) = \rho^c(A)$$

$$\Longleftrightarrow \Big[\bigcap_{m=1}^{\infty}\rho(\overline{A}_m)\Big]^c = \rho^c(A)$$

$$\Longleftrightarrow \rho(A) = \bigcap_{n=1}^{\infty}\rho(\overline{A}_m).$$

Sea $\lambda \in \rho(A)$, entonces $(\lambda I - A)^{-1} : Z \longrightarrow D(A)$ es un operador lineal acotado. Debemos probar que

$$(\lambda I - \overline{A}_m)^{-1} : \mathcal{R}(P_m) \longrightarrow \mathcal{R}(P_m)$$

existe y es acotado para $m \geq 1$. Supongamos que $(\lambda I - \overline{A}_m)P_m z = 0$. Como

$$(\lambda I - A)z = \sum_{n=1}^{\infty}(\lambda I - A_n)P_n z$$

vemos que

$$(\lambda I - A)P_m z = \sum_{n=1}^{\infty}(\lambda I - A_n)P_n P_m z = (\lambda I - A_m)P_m z$$

$$= (\lambda I P_m - A_m P_m)z = (\lambda I - \overline{A}_m)P_m z = 0$$

$$(\lambda I - A)P_m z = (\lambda I - \overline{A}_m)P_m z = 0 \Longrightarrow (\lambda I - A)P_m z = 0.$$

Pero $(\lambda I - A)$ es uno a uno, por lo que, $P_m z = 0$. Así, $(\lambda I - \overline{A}_m)P_m z = 0 \Longrightarrow P_m z = 0$, entonces $(\lambda I - \overline{A}_m)$ es inyectiva. Por otro lado, dado $y \in \mathcal{R}(P_m)$ debemos resolver la ecuación $(\lambda I - \overline{A}_m)w = y$. De hecho, ya que $\lambda \in \rho(A)$ existe $z \in Z$ tal que

$$(\lambda I - A)z = \sum_{n=1}^{\infty}(\lambda I - A_n)P_n z = y.$$

entonces, aplicando P_m en ambos lados de esta ecuación obtenemos

$$P_m(\lambda I - A)z = (\lambda I - A_m)P_m z = (\lambda I - \overline{A}_m)P_m z = P_m y = y.$$

Por lo tanto,

$$(\lambda I - \overline{A}_m)P_m z = y \Longrightarrow (\lambda I - \overline{A}_m)w = y$$

donde $w = P_m z$. Por tanto, $(\lambda I - \overline{A}_m)$ es sobreyectiva y así $(\lambda I - \overline{A}_m) : \mathcal{R}(P_m) \longrightarrow \mathcal{R}(P_m)$ es una biyección. Y ya que $\mathcal{R}(P_m)$ es cerrado, espacio de Banach aplicamos el Teorema de la Aplicación Abierta y concluimos que $(\lambda I - \overline{A}_m)^{-1} : \mathcal{R}(P_m) \longrightarrow \mathcal{R}(P_m)$ existe y es un operador lineal acotado.
Luego, $\lambda \in \rho(\overline{A}_m)$ para $m \geq 1$. Hemos probado que

$$\rho(A) \subset \bigcap_{m=1}^{\infty} \rho(\overline{A}_m) \Longleftrightarrow \bigcup_{m=1}^{\infty} \sigma(\overline{A}_m) \subset \sigma(A). \tag{1.17}$$

Ahora, probaremos que $\sigma(A) \subset \overline{\bigcup_{m=1}^{\infty} \sigma(\overline{A}_m)}$ o equivalentemente, $\bigcap_{m=1}^{\infty} \rho(\overline{A}_m) \subset \rho(A)$. Sea $\lambda \in \bigcap_{m=1}^{\infty} \rho(\overline{A}_m)$, es decir, $\lambda \in \rho(\overline{A}_m)$ entonces

$$(\lambda I - \overline{A}_m)^{-1} : \mathcal{R}(P_m) \longrightarrow \mathcal{R}(P_m) \tag{1.18}$$

existe y es un operador lineal acotado para $m \geq 1$. Hagamos $A_\lambda z = \sum_{m=1}^{\infty} (\lambda I - \overline{A}_m)^{-1} P_m z$.
Mostraremos que $A_\lambda z$ es igual a $(\lambda I - A)^{-1}$. De hecho $A_\lambda z$ es acotado, existe una constante $M > 0$ tal que

$$\| A_\lambda z \| \leq M \| z \|, \quad z \in Z.$$

Haciendo $y_N = \sum_{m=1}^{N} (\lambda I - \overline{A}_m)^{-1} P_m z$ tenemos

$$\lim_{N\to\infty} y_N = \lim_{N\to\infty} \sum_{m=1}^{N} (\lambda I - \overline{A}_m)^{-1} P_m z = \sum_{m=1}^{\infty} (\lambda I - \overline{A}_m)^{-1} P_m z = A_\lambda z$$

$$\therefore \quad \lim_{N\to\infty} y_N = A_\lambda z. \tag{1.19}$$

Por otra parte, $(\lambda I - A)y_N = \sum_{m=1}^{N} P_m z$, de hecho

$$Ay_N = \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)y_N - y_N}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)\sum_{m=1}^{N} (\lambda - \overline{A}_m)^{-1} P_m z - \sum_{m=1}^{N} (\lambda - \overline{A}_m)^{-1} P_m z}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{\displaystyle\sum_{m=1}^{N}(\lambda - \overline{A}_m)^{-1}P_m T(t)z - \sum_{m=1}^{N}(\lambda - \overline{A}_m)^{-1}P_m z}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{\displaystyle\sum_{m=1}^{N}(\lambda - \overline{A}_m)^{-1}P_m\Big(\sum_{n=1}^{\infty} e^{A_n t}P_n z\Big) - \sum_{m=1}^{N}(\lambda - \overline{A}_m)^{-1}P_m z}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{\displaystyle\sum_{m=1}^{N}(\lambda - \overline{A}_m)^{-1}e^{A_m t}P_m z - \sum_{m=1}^{N}(\lambda - \overline{A}_m)^{-1}P_m z}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{\displaystyle\sum_{m=1}^{N}(\lambda - \overline{A}_m)^{-1}P_m(e^{A_m t} - I)z}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \sum_{m=1}^{N}(\lambda - \overline{A}_m)^{-1}P_m \frac{(e^{A_m t} - I)z}{t}$$

$$= \sum_{m=1}^{N}(\lambda - \overline{A}_m)^{-1}P_m\Big(\lim_{t\to 0^+}\frac{(e^{A_m t} - I)z}{t}\Big)$$

$$\mathcal{A}y_N = \sum_{m=1}^{N}(\lambda - \overline{A}_m)^{-1}P_m A_m z.$$

Luego,

$$(\lambda - \mathcal{A})y_N = \lambda y_N - \mathcal{A}y_N = \sum_{m=1}^{N}(\lambda - \overline{A}_m)^{-1}P_m\lambda z - \sum_{m=1}^{N}(\lambda - \overline{A}_m)^{-1}P_m A_m z$$

$$= \sum_{m=1}^{N}(\lambda - \overline{A}_m)^{-1}(\lambda P_m - A_m P_m)z$$

$$= \sum_{m=1}^{N} (\lambda - \overline{A}_m)^{-1}(\lambda P_m - A_m P_m) P_m z$$

$$= \sum_{m=1}^{N} (\lambda - \overline{A}_m)^{-1}(\lambda P_m - \overline{A}_m P_m) z$$

$$(\lambda - \mathcal{A}) y_N = \sum_{m=1}^{N} (\lambda - \overline{A}_m)^{-1}(\lambda - \overline{A}_m) P_m z = \sum_{m=1}^{N} P_m z.$$

También,

$$\lim_{N\to\infty} (\lambda - \mathcal{A}) y_N = \lim_{N\to\infty} \sum_{m=1}^{N} P_m z = \sum_{m=1}^{\infty} P_m z. \tag{1.20}$$

Luego de (1.19), (1.20) convergen en Z. Aplicando el Teorema del Gráfico Cerrado obtenemos $A_\lambda z \in D(A)$ y para cada $z \in Z$,

$$\lim_{N\to\infty} (\lambda - \mathcal{A}) y_N = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} P_m z \Rightarrow (\lambda - \mathcal{A}) A_\lambda z = z \tag{1.21}$$

Supongamos, ahora, que $y \in D(A)$ y consideremos $x = (\lambda - \mathcal{A})y$. Luego,

$$x = (\lambda - \mathcal{A}) A_\lambda x = (\lambda - \mathcal{A}) A_\lambda (\lambda - \mathcal{A}) y.$$

esto es,

$$0 = x - x = (\lambda - \mathcal{A}) y - (\lambda - \mathcal{A}) A_\lambda x = (\lambda - \mathcal{A}) y - (\lambda - \mathcal{A}) A_\lambda (\lambda - \mathcal{A}) y.$$

$$0 = (\lambda - \mathcal{A}) \big[y - A_\lambda (\lambda - \mathcal{A}) y \big].$$

Pero λ no es autovalor de A se tiene

$$y - A_\lambda (\lambda - \mathcal{A}) y = 0 \Rightarrow y = A_\lambda (\lambda - \mathcal{A}) y, \ \forall y \in D(A). \tag{1.22}$$

En consecuencia, de (1.21) y (1.22):

$$(\lambda - \mathcal{A}) A_\lambda h = h \ \text{ y } \ A_\lambda (\lambda - \mathcal{A}) h = h.$$

Por tanto, $A_\lambda = (\lambda - \mathcal{A})^{-1}$ existe y de (1.18) es acotado, por lo que $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$.

Luego, $(\lambda - \mathcal{A})^{-1} = \sum_{m=1}^{\infty} (\lambda - \overline{A}_m)^{-1} P_m z.$

y

$$\rho(\mathcal{A}) \supset \bigcap_{m=1}^{\infty} \rho(\overline{A}_m) \Longrightarrow \overline{\bigcap_{m=1}^{\infty} \rho(\overline{A}_m)} \subset \rho(\mathcal{A}) \Longleftrightarrow \sigma(\mathcal{A}) \subset \overline{\bigcup_{m=1}^{\infty} \sigma(\overline{A}_m)}. \tag{1.23}$$

De (1.17) y (1.23) finalmente obtenemos

$$\sigma(\mathcal{A}) = \overline{\bigcup_{m=1}^{\infty} \sigma(\overline{A}_m)}.$$

□

1.4. Definición de Espacio de Sobolev

Sea Z un espacio de Banach y $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un semigrupo fuertemente continuo en Z con generador infinitesimal A y dominio $D(A)$. Si A es un operador, tenemos la validez del siguiente resultado

Teorema 1.6. *$D(A)$ es un espacio de Banach con la norma*

$$\begin{aligned} \|.\|_1 : D(A) &\to [0, +\infty) \\ z &\to \|z\| + \|Az\| \end{aligned}$$

Demostración.
Claramente $\|.\|_1$ define una norma en $D(A)$. Para demostrar que $D(A)$ es un espacio de Banach con esta norma, tomemos una sucesión de Cauchy $\{z_n\}$ en $(D(A), \|.\|_1)$; luego, tanto $\{z_n\}$ como $\{Az_n\}$ son sucesiones de Cauchy en la norma original de Z y como éste es un espacio de Banach tenemos que existen $z_1, z_2 \in Z$ tales que $z_n \to z_1$ y $Az_n \to z_2$; y como A es un operador cerrado, tenemos que $z_1 \in D(A)$ y $A(z_1) = z_2$. No es difícil probar que $\|z_n - z_1\| \to 0$.

□

Denotemos por Z_1 al espacio de Banach $(D(A), \|.\|_1)$. Luego, si denotamos por $T(t)^1$ la restricción $T(t)|_{z_1}$ de $T(t)$ a Z_1, vemos que $T(t)^1 : Z_1 \to Z_1$ define un semigrupo fuertemente continuo sobre Z_1 con generador infinitisimal A_1. Sabemos que $D(A_1)$ es un espacio de Banach con la norma $\|z\|_2 = \|z\|_1 + \|Az\|_1$ y que $Z_2 = D(A_1)$ es invariante bajo la acción del semigrupo $T(t)^1$; esto es $T(t)^1(Z_2) \subset Z_2$ para cada $t \geq 0$.

Definamos

$$T(t)^2 : Z_2 \to Z_2$$
$$z \to T(t)^1 z.$$

Repitiendo a placer el procedimiento, haciendo $Z_0 = (Z, \|.\|)$, y $T(t)^0 = T(t)$, partiendo de Z_0 y $T(t)^{(0)}$, podemos hallar sucesiones $\{x_n\}$ y $\{T(t)^{(n)}\}_{t\geq 0}$. $\{T(t)^{(n)}\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo fuertemente continuo en Z_n y se define como el **n-ésimo semigrupo de Sobolev** asociado a Z y a $T(t)$.

Si $Z = L^p(\mathbb{R})$ $1 \leq p < \infty$ y {T(t)} es el semigrupo de traslaciones, nos podemos dar cuenta que

$$Z_n = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f, f', ..., f(n) \in L^p(\mathbb{R}^n)\}$$

con la norma $\|f\| = \sum_{i=1}^{n} \|f^{(i)}\|_p$, donde como es usual $f^{(0)}$ denota la función sin derivar. El espacio Z_n se llama el **Espacio de Sobolev** de orden n en $L^p(\mathbb{R})$.

Por analogía definimos en $\mathbb{R}^k$, $k \geq 1$, los espacios de Sobolev de orden n en la siguiente forma: para $1 \leq p < \infty$,

$$H^{n,p}(\Omega) := \left\{f : \Omega \to \mathbb{R} : f, f', ..., f^{(n)} \in L^p(\Omega)\right\}$$

con la norma

$$\|f\|_{n,p} = \sum_{i=1}^{n} \|f^{(i)}\|.$$

Teorema 1.7. *a)$H^{n,p}(\Omega)$ es denso en $L^p(\mu)$*

b)$H^{n,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach con la norma $\|.\|_{n,p}$.

Notación: en el caso en que $p = 2$, escribimos $H^n(\Omega)$ en lugar de $H^{n,2}$. $H_0^1(\Omega)$ denota la clausura en $H^1(\Omega)$ de

$$C_c^\infty = \{f : \Omega \to \mathbb{R} : f \quad \text{tiene soporte compacto y} \quad f \in C^\infty\}$$

CAPÍTULO 2

FORMULACIÓN ABSTRACTA DEL PROBLEMA

A continuación escogeremos el espacio de Hilbert, adecuado, donde el sistema dado por (0.1) puede ser escrito como una ecuación diferencial ordinaria abstracta.
Sea $Z = L^2(\Omega) = L^2(\Omega, \mathbb{R})$ y consideremos el operador lineal no acotado
$A : D(A) \subset Z \to Z$ definida por $A\phi = -\Delta\phi$, donde

$$D(A) = H_0^1(\Omega, \mathbb{R}) \cap H^2(\Omega, \mathbb{R}). \tag{2.1}$$

El operador A tiene las siguientes propiedades muy bién conocidas:

1.- El espectro de A consiste de los autovalores $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n \to \infty$ cada una con multiplicidad finita γ_n igual a la dimensión del correspondiente autoespacio.

2.- Existe un conjunto ortonormal completo $\{\phi_{n,k}\}$ de autovectores de A.

3.- Para todo $\phi \in D(A)$ tenemos

$$A\phi = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \sum_{k=1}^{\gamma_j} < \phi, \phi_{j,k} > \phi_{j,k}, \tag{2.2}$$

donde $< \cdot, \cdot >$ es el producto interno en Z y

$$E_j\phi = \sum_{k=1}^{\gamma_j} < \phi, \phi_{j,k} > \phi_{j,k}. \tag{2.3}$$

Por tanto, $\{E_j\}$ es una familia de proyecciones ortogonales completa en Z y $\phi = \sum_{j=1}^{\infty} E_j\phi$, para cada $\phi \in Z$.

4.- $-A$ genera un semigrupo analítico e^{-At} dado por

$$e^{-At}z = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} E_n z. \tag{2.4}$$

5.- El espacio de potencia fraccionario Z^r dado por

$$Z^r = D(A^r) = \left\{ z \in Z : \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n)^{2r} \parallel E_n z \parallel^2 < \infty \right\}, \quad r \geq 0,$$

con la norma

$$\parallel z \parallel_r = \parallel A^r z \parallel = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{2r} \parallel E_n z \parallel^2 \right\}^{1/2}, \quad z \in Z^r$$

y

$$A^r z = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^r E_n z. \tag{2.5}$$

También, para $r \geq 0$ definimos $Z_r = Z^r \times Z$, el cual es un espacio de Hilbert dotado con la norma dada por

$$\left\| \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\|_{Z_r}^2 = \|u\|_r^2 + \|v\|^2.$$

Por lo tanto, la ecuación (0.1) puede escribirse como un sistema abstracto de ecuaciones diferenciales ordinarias en el espacio de Hilbert $Z_1 = Z^1 \times Z$ como sigue:

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = -A^2 u - 2\beta A v + 1_\omega u \end{cases} \tag{2.6}$$

Finalmente, el sistema (0.1) puede reescribirse como una ecuación de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden en el espacio de Hilbert $Z_1 = Z^1 \times Z$ como sigue:

$$z' = \mathcal{A}z + B_\omega u, \quad z \in Z_1 \quad t \geq 0, \tag{2.7}$$

donde $u \in L^2([0,\tau]; U)$, $U = L^2(\Omega)$,

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & I_Z \\ -A^2 & -2\beta A \end{bmatrix}, \tag{2.8}$$

es un operador lineal no acotado con dominio

$$D(\mathcal{A}) = \{u \in H^4(\Omega) : u = \Delta w = 0\} \times D(A),$$

y $B : U \longrightarrow Z_1$, $B_\omega = \begin{bmatrix} 0 \\ 1_\omega \end{bmatrix}$ es un operador lineal acotado.

Proposición 2.1. *Los adjuntos de los operadores B_Ω y B_ω están dados por*

$$B_\Omega^* = \begin{bmatrix} 0 & I_Z \end{bmatrix}, \quad B_\omega^* = \begin{bmatrix} 0 & 1_\omega \end{bmatrix}.$$

A continuación se probará que el operador lineal no acotado $\mathcal{A}$, dado por la ecuación lineal de la viga (2.8), genera un semigrupo fuertemente continuo, el cual decae exponencialmente a cero. De hecho, usando el Lema 1.1 de [11] podemos demostrar el siguiente teorema.

Teorema 2.1. *El operador $\mathcal{A}$, dado en (2.8), es el generador infinitesimal del semigrupo fuertemente continuo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ representado por*

$$T(t)z = \sum_{j=1}^{\infty} e^{A_j t} P_j z, \quad z \in Z_1, \quad t \geq 0 \tag{2.9}$$

donde $\{P_j\}_{j\geq 0}$ es una familia completa de proyecciones ortogonales en el espacio de Hilbert Z_1 dado por

$$P_j = \begin{bmatrix} E_j & 0 \\ 0 & E_j \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2, \ldots, \infty, \tag{2.10}$$

y

$$A_j = B_j P_j, \quad B_j = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_j^2 & 2\beta\lambda_j. \end{bmatrix}, \; j \geq 1. \tag{2.11}$$

Además, los autovalores $\sigma_1(j)$, $\sigma_2(j)$, de la matriz B_j son simples y vienen dados por:

$$\sigma_1(j) = -\lambda_j \rho_1, \quad \sigma_2(j) = -\lambda_j \rho_2,$$

donde $0 < \rho_1 < \rho_2$ estan dados por

$$\rho_1 = \beta - \sqrt{\beta^2 - 1} \quad y \quad \rho_2 = \beta + \sqrt{\beta^2 - 1}$$

y este semigrupo decae exponencialmente a cero, es decir,

$$\|T(t)\| \leq Me^{-\mu t}, \quad t \geq 0, \tag{2.12}$$

donde

$$\mu = \lambda_1 \rho_1.$$

Demostración. Vamos a calcular $\mathcal{A}z$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}z &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A^2 & -2\beta A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} v \\ -A^2u - 2\beta Av \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{\infty} E_jv \\ -\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 E_ju - 2\beta \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j E_jv \end{bmatrix} \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \begin{bmatrix} E_jv \\ -\lambda_j^2 E_ju - 2\beta\lambda_j E_jv \end{bmatrix} \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_j^2 & -2\beta\lambda_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_j & 0 \\ 0 & E_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} A_jP_jz.
\end{aligned}$$

Es claro que $A_jP_j = P_jA_j$. Ahora, necesitamos verificar la condición (a) del Lema 1.1. Para este fin, observe que los autovalores $\sigma_1(j)$, $\sigma_2(j)$, de la matriz B_j son simples y están dados por:

$$\sigma_1(j) = -\lambda_j\rho_1,\ \sigma_2(j) = -\lambda_j\rho_2$$

donde $0 < \rho_1 < \rho_2$ vienen dados por

$$\rho_1 = \beta - \sqrt{\beta^2 - 1} \ \text{ y } \ \rho_2 = \beta + \sqrt{\beta^2 - 1}; \ ,\ \beta^2 > 1.$$

Como los autovalores de B_j son simples, existe una familia completa de proyecciones complementarias $\{q_i(j)\}_{i=1}^2$ en $\mathbb{R}^2$ tales que

$$\begin{cases} B_j &= \sigma_1(j)q_1(j) + \sigma_1(j)q_2(j) \\ e^{B_jt} &= e^{-\lambda_j\rho_1 t}q_1(j) + e^{-\lambda_j\rho_2 t}q_2(j), \end{cases}$$

donde $q_i(j)$, $i = 1, 2$, están dados por:

$$\begin{aligned}
q_1(j) &= \frac{1}{(\rho_1 - \rho_2)} \begin{bmatrix} \rho_2 & \frac{1}{\lambda_j} \\ -\lambda_j & \rho_2 - 2\beta \end{bmatrix} \\
q_2(j) &= \frac{1}{(\rho_2 - \rho_1)} \begin{bmatrix} \rho_1 & \frac{1}{\lambda_j} \\ -\lambda_j & \rho_1 - 2\beta \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{cases} A_j &= \sigma_1(j)P_{j1} + \sigma_1(j)P_{j2} \\ e^{A_jt} &= e^{-\lambda_j\rho_1 t}P_{j1} + e^{-\lambda_j\rho_2 t}P_{j2}, \end{cases}$$

y

$$\mathcal{A}z = \sum_{j=1}^{\infty} \{\sigma_1(j)P_{j1}z + \sigma_2(j)P_{j2}z\}. \tag{2.13}$$

Donde, $P_{ji} = q_i(j)P_j$ es un familia completa de proyecciones ortogonales en Z_1.
Para probar que $e^{A_n t}P_n : Z_1 \to Z_1$ satisface la condición (a) del Lema 1.1, es suficiente con demostrar, por ejemplo, que $e^{-\lambda_n \rho_2 t}q_1(n)P_n, n = 1, 2, 3, \ldots$ satisface la condición (a). De hecho, consideremos $z = (z_1, z_2,)^T \in Z_1$ tal que $\|z\| = 1$. Entonces,

$$\|z_1\|_1^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 \|E_j z_1\|^2 \leq 1, \quad \|z_2\|_Z^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \|E_j z_2\|^2 \leq 1 \quad .$$

Por lo tanto, $\lambda_j \|E_j z_1\| \leq 1, \quad \|E_j z_2\| \leq 1, \quad j = 1, 2, \ldots$. Luego,

$$\begin{aligned}
\|e^{-\lambda_n \rho_1 t} q_1(n) P_n z\|_{Z_1}^2 &= \frac{e^{-2\lambda_n \rho_1 t}}{(\rho_1 - \rho_2)^2} \left\| \begin{array}{c} \rho_2 E_n z_1 + \frac{1}{\lambda_n} E_n z_2 \\ -\lambda_n E_n z_1 + (\rho_2 - 2\beta) E_n z_2 \end{array} \right\|_{Z_1}^2 \\
&= \frac{e^{-2\lambda_n \rho_1 t}}{(\rho_1 - \rho_2)^2} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 \|E_j \left(\rho_2 E_n z_1 + \frac{1}{\lambda_n} E_n z_2 \right) \|^2 \\
&+ \frac{e^{-2\lambda_n \rho_1 t}}{(\rho_1 - \rho_2)^2} \sum_{j=1}^{\infty} \|E_j \left(-\lambda_n E_n z_1 + (\rho_2 - 2\beta) E_n z_2 \right) \|^2 \\
&= \frac{e^{-2\lambda_n \rho_1 t}}{(\rho_1 - \rho_2)^2} \|\lambda_n \rho_2 E_n z_1 + \frac{1}{\lambda_n} E_n z_2\|^2 \\
&+ \frac{e^{-2\lambda_n \rho_1 t}}{(\rho_1 - \rho_2)^2} \| - \lambda_n E_n z_1 + (\rho_2 - 2\beta) E_n z_2\|^2.
\end{aligned}$$

Como $\lambda_j \|E_j z_1\| \leq 1$ y $\|E_j z_2\| \leq 1, \quad j = 1, 2, \ldots$, tenemos que

$$\|e^{-\lambda_n \rho_1 t} q_1(n) P_n z\|_{Z_1}^2 \quad \leq \quad M^2 e^{-2\lambda_n \rho_1 t},$$

donde $M = M(\beta) \geq 1$ dependiendo de β. Entonces tenemos,

$$\|e^{-\lambda_n \rho_1 t} q_1(n) P_n\|_{Z_1} \leq M(\beta) e^{-\lambda_n \rho_1 t}, \quad t \geq 0 \quad n = 1, 2, \ldots.$$

De la misma manera obtenemos que

$$\|e^{-\lambda_n \rho_2 t} q_2(n) P_n\|_{Z_1} \quad \leq \quad M(\beta) e^{-\lambda_n \rho_2 t}, \quad t \geq 0 \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Por lo tanto,

$$\|e^{A_n t}P_n\|_{Z_1} \leq M(\beta)e^{-\mu t}, \quad t \geq 0 \quad n = 1, 2, \ldots,$$

donde

$$\mu = \lambda_1 \rho_1.$$

Así, aplicando el Lema 1.1 obtenemos que $\mathcal{A}$ genera un semigrupo fuertemente continuo dado por (2.9), lo cual implica que este semigrupo es compacto.
A continuación, probamos que este semigrupo decae exponencialmente a cero. De hecho,

$$\begin{aligned}
\|T(t)z\|^2 &= \sum_{j=1}^{\infty} \|e^{A_j t}P_j z\|^2 \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} \|e^{A_j t}\|^2 \|P_j z\|^2 \\
&\leq M^2(\beta)e^{-2\mu t} \sum_{j=1}^{\infty} \|P_j z\|^2 \\
&= M^2(\beta)e^{-2\mu}\|z\|^2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|T(t)\| \leq M(\beta)e^{-\mu t}, \quad t \geq 0.$$

□

La siguiente condición juega un papel importante en nuestro trabajo

$$\frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j} > \frac{\rho_2}{\rho_1}. \tag{2.14}$$

Proposición 2.2. *El operador $P_j : Z_r \to Z_r$, $\quad j \geq 0$, definido por*

$$P_j = \begin{bmatrix} E_j & 0 \\ 0 & E_j \end{bmatrix} , \; j \geq 1 \; , \tag{2.15}$$

es una proyección ortogonal continua y acotada en el espacio de Hilbert Z_r.

Demostración. En primer lugar, mostramos que $P_j(Z_r) \subset Z_r$, lo cual es equivalente a demostrar que $E_j(Z^r) \subset Z^r$. En efecto, sea z en Z^r y consideremos $E_j z$. Entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{2r} \|E_n E_j z\|^2 = \lambda_j^{2r} \|E_j z\|^2 < \infty.$$

Por lo tanto, $E_j z \in Z^r, \forall z \in Z^r$.
Ahora, probaremos que esta proyección es acotada. Del hecho que la inclusión $Z^r \subset Z$ es continua, existe una constante $k > 0$ tal que

$$\|z\| \leq k\|z\|_r, \quad \forall z \in Z^r.$$

Luego, para todo $z \in Z^r$ tenemos la siguiente estimación

$$\begin{aligned} \|E_j z\|_r^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{2r} \|E_n E_j z\|^2 = \lambda_j^{2r} \|E_j z\|^2 \\ &\leq \lambda_j^{2r} \|z\|^2 \leq \lambda_j^{2r} k^2 \|z\|_r^2 \end{aligned}$$

En consecuencia, $\|E_j z\| \leq \lambda_j^r k \|z\|_r$, lo cual implica la continuidad de $E_j : Z^r \to Z^r$. Así, P_j es una proyección continua en Z_r.

□

CAPÍTULO 3

CONTROLABILIDAD INTERIOR DEL PROBLEMA

En este capítulo, probaremos el resultado principal de este trabajo sobre la controlabilidad del sistema lineal (2.7), pero antes recordaremos la definición de controlabilidad aproximada para este sistema. Para este fin, notamos que para todo $z_0 \in Z_1$ y $u \in L^2(0,\tau;U)$ el problema de valor inicial

$$\begin{cases} z' = \mathcal{A}z + B_\omega u(t), z \in Z_1, \\ z(0) = z_0, \end{cases} \tag{3.1}$$

admite una única solución moderada dada por

$$z(t) = T(t)z_0 + \int_0^t T(t-s)B_\omega u(s)ds, \quad t \in [0,\tau]. \tag{3.2}$$

Definición 3.1. ***(Controlabilidad Aproximada)*** *El sistema (2.7) se dice que es aproximadamente controlable sobre $[0,\tau]$ si para cada z_0, $z_1 \in Z_1$, $\varepsilon > 0$ existe $u \in L^2(0,\tau;U)$ tal que la solución $z(t)$ de (3.2) correspondiente a u verifica:*

$$z(0) = z_0 \quad y \quad \|z(\tau) - z_1\| < \varepsilon.$$

Consideremos el siguiente operador lineal y acotado:

$$G : L^2(0,\tau;Z) \to Z_1, \quad Gu = \int_0^\tau T(\tau - s)B_\omega u(s)ds, \tag{3.3}$$

cuyo operador adjunto $G^* : Z_1 \longrightarrow L^2(0,\tau;Z)$ está dado por

$$(G^*z)(s) = B_\omega^* T^*(\tau - s)z, \quad \forall s \in [0,\tau], \quad \forall z \in Z_1. \tag{3.4}$$

Lema 3.1. *(Ver [7] y [17]) La ecuación (2.7) es aproximadamente controlable sobre* $[0, \tau]$ *si, y sólo si, cualquiera de la siguientes condiciones se cumple:*

a) $\overline{\text{Rang}(G)} = Z_1$.

b) $Ker(G^*) = \{0\}$.

c) $\langle GG^*z, z\rangle > 0$, $z \neq 0$ *en* Z_1.

d) $\lim_{\alpha\to 0^+} \alpha(\alpha I + GG^*)^{-1}z = 0$.

e) $B_\omega^* T^*(t)z = 0, \quad \forall t \in [0, \tau], \quad \Rightarrow z = 0$.

f) Para todo $z \in Z_1$ *se tiene* $Gu_\alpha = z - \alpha(\alpha I + GG^*)^{-1}z$, *donde*

$$u_\alpha = G^*(\alpha I + GG^*)^{-1}z, \quad \alpha \in (0, 1].$$

Así, $\lim_{\alpha\to 0} Gu_\alpha = z$ *y el error* $E_\alpha z$ *de esta aproximación esta dado por*

$$E_\alpha z = \alpha(\alpha I + GG^*)^{-1}z, \quad \alpha \in (0, 1].$$

Proposición 3.1. *Sí* $\overline{\text{Rang}(G)} = Z_1$, *entonces*

$$\sup_{\alpha>0} \|\alpha(\alpha I + GG^*)^{-1}\| \leq 1$$

.

Para la prueba del teorema principal de este trabajo usaremos la siguiente versión del lema 3.14 de [3] y Lema 4.4 de [2].

Lema 3.2. *Sean* $\{\alpha_1(j)\}_{j\geq 1}$, $\{\beta_{1j}\}_{j\geq 1}$, $\{\alpha_2(j)\}_{j\geq 1}$, $\{\beta_{2j}\}_{j\geq 1}$ *sucesiones de números reales tales que* $\alpha_{1j} > \alpha_{2j}, \forall j \geq 1$ *y*

$$\alpha_s(j+1) < \alpha_s(j), \quad \alpha_1(j+1) < \alpha_2(j). \tag{3.5}$$

para $s = 1, 2; j = 1, 2, 3, \ldots$ *Entonces, para cualquier* $\tau > 0$ *tenemos*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(e^{\alpha_1(j)t}\beta_{1j} + e^{\alpha_2(j)t}\beta_{2j}\right) = 0, \forall t \in [0, t^*] \tag{3.6}$$

si y sólo si

$$\beta_{1j} = \beta_{2j} = 0, \forall j \geq 1. \tag{3.7}$$

Ahora, enunciamos y probamos el teorema principal de este trabajo.

Teorema 3.1. *(Resultado Principal) Bajo la condición (2.14), para todo subconjunto abierto no vacío ω de Ω y $\tau > 0$ el sistema (2.7) es aproximadamente controlable sobre $[0,\tau]$. Además, una sucesión de controles que transfieren el sistema (2.7) de un estado inicial z_0 a una ϵ-vencidad del estado final z_1 en el tiempo $\tau > 0$ está dado por*

$$u_\alpha(t) = B_\omega^* T(\tau - t)(\alpha I + GG^*)^{-1}(z_1 - T(\tau)z_0), \quad \alpha \in (0,1],$$

y el error de esta aproximación E_α está dado por

$$E_\alpha = \alpha(\alpha I + GG^*)^{-1}(z_1 - T(\tau)z_0), \quad \alpha \in (0,1].$$

Demostración. Aplicamos la condición e) del Lema 3.1 para probar la controlabilidad del sistema (2.7). Para esto, observe que

$$T^*(t)z = \sum_{j=1}^{\infty} e^{A_j^* t} P_j^* z, \quad z \in Z, \quad t \geq 0,$$

y, como los autovalores de la matriz A_j son simples, existe una familia completa de proyecciones complementarias $\{q_1(j), q_2(j)\}$ sobre $\mathbb{R}^2$ tal que

$$e^{A_j^* t} = e^{\sigma_1(j)t} q_1^*(j) P_j^* + e^{\sigma_2(j)t} q_2^*(j) P_j^*.$$

Por lo tanto,

$$B_\omega^* T^*(t)z = \sum_{j=1}^{\infty} B_\omega^* e^{A_j^* t} P_j^* z = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{2} e^{\sigma_s(j)t} B_\omega^* P_{s,j}^* z,$$

donde $P_{s,j} = q_s(j)P_j = P_j q_s(j)$.

Ahora, supongamos que $B_\omega^* T^*(t)z = 0, \quad \forall t \in [0,\tau]$. Entonces,

$$\begin{aligned} B_\omega^* T^*(t)z \quad &= \quad \sum_{j=1}^{\infty} B_\omega^* e^{A_j^* t} P_j^* z = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{2} e^{\sigma_s(j)t} B_\omega^* P_{s,j}^* z = 0. \\ &\iff \quad \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{2} e^{\sigma_s(j)t} (B_\omega^* P_{s,j}^* z)(x) = 0, \quad \forall x \in \Omega. \end{aligned}$$

La suposición (2.14) implica que la sucesión $\{\alpha_s(j) = -\lambda_j \rho_s : s = 1,2; j = 1,2,\dots\}$ satisface las condiciones del Lema 3.2. En efecto, trivialmente se tiene que $\alpha_2(j) < \alpha_1(j)$ y de (2.14) obtenemos $-\lambda_{j+1}\rho_1 < -\lambda_j \rho_2$. Por lo tanto,

$$\alpha_s(j+1) < \alpha_s(j), \quad \alpha_1(j+1) < \alpha_2(j).$$

Luego, del Lema 3.2 obtenemos para todo x $\in \Omega$ que

$$(B_\omega^* P_{s,j}^* z)(x) = 0, \quad \forall x \in \Omega, \quad s = 1, 2; \quad j = 1, 2, 3, \ldots.$$

Como

$$q_i^*(j) = \begin{bmatrix} a_{11}^{ij} & a_{12}^{ij} \\ a_{21}^{ij} & a_{22}^{ij} \end{bmatrix}, i = 1, 2; \quad j = 1, 2, 3, 4, \ldots.$$

Tenemos $\forall x \in \Omega, \quad i = 1, 2; \quad j = 1, 2, 3, 4, \ldots$ que

$$(B_\omega^* P_{s,j}^* z)(x) = \left[\ 1_\omega [a_{21}^{ij} E_j z_1(x) + a_{22}^{ij} E_j z_2(x)] \ \right] = 0.$$

Esto dice que,

$$(B_\omega^* P_{s,j}^* z)(x) = \left[\ a_{21}^{ij} E_j z_1(x) + a_{22}^{ij} E_j z_2(x) \ \right] = 0, \quad \forall x \in \omega.$$

Ahora, tomamos $f(x) = a_{21}^{ij} E_j z_1(x) + a_{22}^{ij} E_j z_2(x), \forall x \in \Omega$. Obtenemos

$$\begin{cases} (\Delta + \lambda_j I) f \equiv 0, \text{ en } \Omega, \\ f(x) = 0, \forall x \in \omega. \end{cases} \tag{3.8}$$

Luego, del Principio Clásico de Continuación Única para Ecuaciones Elípticas (ver [21]), se sigue que $f(x) = 0 \ \forall x \in \Omega$. Así, tenemos para $i = 1, 2; \quad j = 1, 2, 3, 4, \ldots$ que

$$(B_\omega^* P_{s,j}^* z)(x) = \left[\ a_{21}^{ij} E_j z_1(x) + a_{22}^{ij} E_j z_2(x) \ \right] = 0, \quad \forall x \in \Omega.$$

Por lo tanto,

$$B_\Omega^* T^*(t) z = \sum_{j=1}^{\infty} B_\Omega^* e^{A_j^* t} P_j^* z = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{2} e^{\sigma_s(j)t} B_\Omega^* P_{s,j}^* z = 0, \quad \forall t \in [0, \tau].$$

El sistema (0.2)(ver [8]) es aproximadamente controlable, entonces de la condición e) del Lema 3.1 se obtiene que $z = 0$.
Así, tomando $z = z_1 - T(\tau) z_0$, usando (3.2) y parte f) del Lema 3.1, Obtenemos nuestro resultado

$$z_1 = \lim_{\alpha \to 0^+} \{T(\tau) z_0 + \int_0^\tau T(\tau - s) B_\omega u_\alpha(s) ds\}.$$

□

Prueba del Lema 3.2. Por la extensión analítica tenemos

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(e^{\alpha_1(j)t} \beta_{1j} + e^{\alpha_2(j)t} \beta_{2j} \right) = 0, \quad \forall t \in [0, \infty).$$

Ahora, dividiendo esta expresión por $e^{\alpha_1(1)t}$ obtenemos

$$\beta_{11} + \sum_{j=2}^{\infty} e^{(\alpha_1(j)-\alpha_1(1))t}\beta_{1j} + \sum_{j=1}^{\infty} e^{(\alpha_2(j)-\alpha_1(1))t}\beta_{2j} = 0, \quad \forall t \in [0,\infty).$$

Como $\alpha_1(j) - \alpha_1(1)) < 0$ para $j > 1$ y $\alpha_2(j) - \alpha_1(1) < 0$ para $j \geq 1$, entonces pasando al límite cuando $t \to \infty$ tenemos que $\beta_{11} = 0$
Luego, obtenemos que

$$\sum_{j=2}^{\infty} e^{\alpha_1(j)t}\beta_{1j} + \sum_{j=1}^{\infty} e^{\alpha_2(j)t}\beta_{2j}, \quad \forall t \in [0,\infty).$$

Nuevamente, dividiendo esta expresión por $e^{\alpha_2(1)t}$ se tiene

$$\beta_{21} + \sum_{j=2}^{\infty} e^{(\alpha_1(j)-\alpha_2(1))t}\beta_{1j} + \sum_{j=2}^{\infty} e^{(\alpha_2(j)-\alpha_2(1))t}\beta_{2j} = 0, \quad \forall t \in [0,\infty).$$

De (3.5) tenemos que $\alpha_1(j) - \alpha_2(1)) < 0$ y $\alpha_2(j) - \alpha_2(1) < 0$ para $j \geq 2$. Pasando al límite cuando $t \to \infty$ se obtiene que $\beta_{21} = 0$
Luego, se tiene que

$$\sum_{j=2}^{\infty} e^{\alpha_1(j)t}\beta_{1j} + \sum_{j=2}^{\infty} e^{\alpha_2(j)t}\beta_{2j} = 0, \quad \forall t \in [0,\infty).$$

Repitiendo el procedimiento, podemos obtener que $\beta_{12} = \beta_{22} = 0$, y continuando este camino se llega a que $\beta_{1j} = \beta_{2j} = 0, \forall j \geq 1$.

$\square$

CONCLUSIONES

La técnica utilizada en este trabajo es reciente, simple y clara, y se puede utilizar para estudiar la controlabilidad de muchas ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que modelan procesos difusivos como la ecuación de Benjamin-Bona-Mohany, las ecuaciones de ondas fuertemente amortiguadas, entre otras; eso por un lado, por otra parte esta técnica es tan simple que permite introducir rápidamente a los estudiantes en el fascinante mundo de la Teoría de Control con un mínimo esfuerzo.

***Ejemplo* 3.1.** La ecuación de Benjamin-Bona-Mohany representa un proceso difusivo, modela la propagación de las ondas largas. La existencia y unicidad de soluciones, la controlabilidad con el control actuando en la frontera de esta ecuación y ecuaciones relacionadas se han estudiado por diversos autores. Este proceso difusivo esta representado a través de la siguiente ecuación

$$\begin{cases} z_t - a\Delta z_t - b\Delta z = 1_\omega u(t,x), \quad t \in (0,\tau), \qquad x \in \Omega, \\ z(t,x) = 0, \quad t \geq 0, \qquad x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.9}$$

donde $a \geq 0$ y $b > 0$ son constantes, Ω es un dominio en $I\!R^N$, ω es un subconjunto abierto no vacío de Ω, 1_ω denota la función característica del conjunto ω, el control distribuido $u \in L^2(0,\tau;L^2(\Omega))$.

***Ejemplo* 3.2.** Creemos que esta técnica se puede aplicar para demostrar la controlabilidad interior de la ecuación de onda fuertemente amortiguada con las condiciones de frontera de Dirichlet.

$$\begin{cases} w_{tt} + \eta(-\Delta)^{1/2}w_t + \gamma(-\Delta)w = 1_\omega u(t,x), & \text{en} \quad (0,\tau)\times\Omega, \\ w = 0, & \text{en} \quad (0,\tau)\times\partial\Omega, \\ w(0,x) = w_0(x), \quad w_t(0,x) = w_1(x), & \text{en} \quad \Omega, \end{cases}$$

en el espacio $Z_{1/2} = D((-\Delta)^{1/2}) \times L^2(\Omega)$, donde Ω es un dominio acotado en $I\!R^n$, ω es un subconjunto abierto no vacío de Ω, 1_ω denota la función característica del conjunto ω, el control distribuido $u \in L^2(0,\tau;L^2(\Omega))$ y η, γ son números positivos.

BIBLIOGRAFÍA

[1] G. BACHMAN AND L. NARICI, "Functional Analysis", pag 241. Dover Publications Inc, Canada (2000).

[2] SALAH BADRAOUI,"Approximate Controllability of a Reaction-Diffusion System with a Cross Diffusion Matrix and Fractional Derivatives on Bounded Domains", Journal of Boundary Value Problems, Vol. 2010(2010), Art. ID 281238, 14pgs.

[3] R. F. CURTAIN AND A. J. PRITCHARD, Ïnfinite Dimensional Linear Systems ", Lecture Notes in Control and Information Sciences, Vol. 8. Springer Verlag, Berlin (1978).

[4] R. F. CURTAIN AND H. J. ZWART, " An Introduction to Infinite Dimensional Linear Systems Theory", Tex in Applied Mathematics, Vol. 21. Springer Verlag, New York (1995).

[5] JEROME A. GOLDSTEIN, Semigroups of Linear Operator and Applications. Oxford University press. 1985.

[6] LADAS C.E. AND LASDHMIKANTHAM. Differential Equations in Abstract Spaces, Vol. 85, Academic Press, New York,(1972).

[7] H. LÁREZ AND H. LEIVA, "Interior controllability of a 2×2 reaction-diffusion system with cross-diffusion matrix", Boundary Value Problems, Vol. 2009, Article ID 560407, 9 pages, doi:10.1155/2009/560407.

[8] H. LÁREZ, H. LEIVA AND J. UZCÁTEGUI " Controllability of Block Diagonal Systems and Applications ", Int. J. Systems, Control and Communications, Vol. 3, N. 1, pp. 64-81.

[9] H. LÁREZ, H. LEIVA AND JORGE REBAZA " Interior Controllability of a Strongly Damped Wawe Equation ". Submitted to International Journal of Control.

[10] H. LEIVA (1996), "Stability of Periodic Solution for a Systems of Parabolic Equation", J. Applicable Analysis, Vol. 60, pp. 277-300.

[11] H. LEIVA " A Lemma on C_0- Semigroups and Applications PDEs Systems"Question Mathematics, Vol. 26, pp.247-265 (2003).

[12] H. LEIVA AND N. MERENTES. Controllability of Second Order Equation in L2. Mathematical Problems in Engineering, Vol 2010, 11 pages.

[13] H. LEIVA AND N. MERENTES. Interior Controllability of the Thermoelastic Plate Equation. African Diaspora Journal of Mathematics, Vol. 12, N 1, pp. 1-14 (2011).

[14] H. LEIVA, N. MERENTES AND J.L. SANCHEZ,"Interior Controllability of the nD Semilinear Heat Equation". African Diaspora Journal of Mathematics, Special Vol. in Honor of Profs. C. Corduneanu, A. Fink, and S. Zaidman. Vol. 12, N. 2, pp. 1-12(2011).

[15] H. LEIVA, N. MERENTES AND J.L. SANCHEZ "Interior Controllability of the Benjamin-Bona-Mahony Equation". Journal of Mathematis and Applications, N. 33,pp. 51-59 (2010).

[16] H. LEIVA AND W. PEREIRA, "Interior Controllability of the Linear Beam Equation ", A. Diaspora J. of Mathematics, Vol. 14, N. 1, pp.30-38 (2012).

[17] H.LEIVA AND Y. QUINTANA, " Interior Controllability of Broad Class of Reaction Diffusion Equations ", Research Article, Mathematical Problems in Engineering, Vol 2009, 8 pages.

[18] H.LEIVA AND H. ZAMBRANO, " Rank condition for the controllability of a linear time-varying system ", International Journal of Control, vol. 72, 920-931(1999)

[19] H. LEIVA Çontrollability of a Systems of Parabolic Equation with non-diagonal diffusion matrix". IMA Journal of Mathematical Control and Information; Vol. 32, 2005, pp. 187-199.

[20] LUIZ A. F. de OLIVEIRA " On Reaction-Diffusion Systems " E. Journal of Differential Equations, Vol. 1998, N_0 24, pp. 1-10.

[21] M.H. PROTTER, *Unique continuation for elliptic equations.* Transaction of the American Mathematical Society, Vol. 95, Nž 1, Apr., 1960.

[22] D. SEVICOVIC, " Existence and limiting behaviour for damped nonlinear evolution equations with nonlocal terms", *Comment. Math. Univ. Carolinae* 31, 2, 283-293, 1990.

Lista de Símbolos

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ producto interno

$\| \cdot \|$ $\| z \|$ la norma de z

A^* es el operador adjunto de A

A^τ la aplicación de controlabilidad sobre $[0, \tau]$

$C([0, \tau], Z)$ la clase de la funciones continuas de $[0, \tau]$ en Z

$D(A)$ el dominio del operador A

H^p el espacio de Sobolev

H_0^p el espacio de Sobolev con soporte compacto

$L(X)$ los operadores lienales continuos de X en si mismo

$L^p(0, \tau, Z)$ funciones medibles de Lebesgue $f : [0, \tau] \to Z; \int_0^\tau \| f(t) \|^p \, dt < \infty$

$\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales

$Ran(A)$ rango del operador A

$R(\lambda, K)$ el operador resolvente del operador K

Z espacio de Hilbert

$\rho(A)$ el resolvente de A

$\sigma(A)$ el espectro de A

Δ $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ operador Laplaciano

1_ω función característica del conjunto ω

$\partial\Omega$ frontera del conjunto Ω

C_0–semigrupo semigrupo fuertemente continuo

$Re(z)$ parte real del número complejo z

$RanK(A)$ $RanK(A) = dim[Ran(A)]$