UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
FACULTAD DE INGENIERÍA
DOCTORADO EN CIENCIAS APLICADAS

Producto Cruzado de Flujos Sistemas de Control No-Autónomos Y Aplicaciones

Autor: MSc. Ambrosio J. Tineo Moya.
Tutor: Dr. Hugo Leiva.

Tesis Doctoral
Presentada ante la Ilustre
Universidad de los Andes
para optar al grado de
Doctor en Ciencias Aplicadas.

[1]Trabajo financiado por el CDCHTA, Código No. C-1802-12-05-ED

Mérida - Venezuela
Octubre - 2013

Producto Cruzado de Flujos Sistemas de Control No-Autónomos Y Aplicaciones

Ambrosio Tineo

Octubre - 2013

1

A mis Hijos, Néstor Moisés, José Jacob, Samaria Beatriz y Sofía Victoria. Dios y la Virgen me los protejan.

Agradecimiento

Agradezco infinitamente a dios por haberme dado a mis viejos hermosos (mis padres), a ellos le debo mi existir. Dios cuidamelos.

A mi Señora Marianggy Mailedimar Muñoz, por su paciencia, comprensión, y apoyo incondicional en los momentos de apuros. Te amo.

A mis hijos, Néstor Moisés, José Jacob, Samaria Beatriz y Sofía Victoria, fuente de inspiración, que este triunfo le sirva de motivación. Los amo.

A Noris gracias por brindarme tu apoyo y confianza. Dios te cuide.

A mis hermanos, tíos, primos y todos aquellos familiares y amigos que incodicionalmente me apoyaron. Se les quiere.

A mi Maestro, profesor y amigo, Dr. Hugo Leiva, quien ha sido mi pilar en lo académico, mi respeto y lealtad hacia ti maestro.

A los Doctores Zoraida Sívoli, José Luis Sáchez y Addinson Ríos por sus sugerencias en la culminación de este trabajo. Gracias.

A mis amigos y colegas, Hanzel Larez y Carlos Cova. Gracias por brindarme su amistad.

A la Ilustre Universidad de Los Andes, quien me dió la oportunidad de obtener mis tres títulos y así, mi formación académica.

Al Consejo de Desarrollo Científico Humanístico, Tecnológico y de las Artes de la Universidad de Los Andes (CDCHTA - ULA) por el financiamiento parcial de este trabajo, bajo el **código**: C-1802-12-05-ED.

Índice general

Notación

$\langle \cdot, \cdot \rangle$	$\langle u, v \rangle$ el producto interno de u y v
$\| \cdot \|$	$\|z\|$ la norma de z
Z, U	espacios de espacios de Hilbert
$Z^\star$, $U^\star$	espacios duales
Θ	espacio topológico de Hausdorff compacto
$\sigma(\theta, \cdot t) = \theta \cdot t$	define un flujo $\forall t \in \mathbb{R}\, y \, \forall \theta \in \Theta$
$L(U, Z)$	espacio de Banach de todos los operadores lineales y acotados de U a Z
B*	el operador adjunto de $B \in L(U, Z)$
G	operador de controlabilidad
G*	el operador adjunto de G
Ker$(G^\star)$	el kernel del operador $G^\star$
$Rang(G)$	el rango del operador G
$\overline{Rang(G)}$	la clausura del rango del operador G
$W_\theta = G_\theta G_\theta^\star$	operador Grammiano
$\Phi(\theta, t)$	matriz fundamental de $z' = A(\theta \cdot t)z$
$A(\theta \cdot t)$	$\theta \cdot t$ dentro del argumento del operador A sólo denota notación
$\mathbb{R}$	el conjunto de los números reales
$C([0, \tau], Z)$	la clase de las funciones continuas de $[0, \tau]$ en Z
$L^p(0, \tau, Z)$	funciones medibles de Lebesgue $f : [0, \tau] \to Z; \int_0^\tau \|f(t)\|^p dt < \infty, p > 1$
$C^\infty(\Omega)$	el espacio de las funciones vectoriales de clase C^∞ infinito en Ω
$D(A(\theta)) = D$	el dominio del operador A
H^P	el espacio de Sobolev
H_0^P	el espacio de Sobolev con soporte compacto
$\mathbb{R}^+$	el intervalo $[0, +\infty)$
$\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$	dominio acotado
$\omega \subseteq \Omega$	subconjunto no vacío y abierto
Sp{C}	el espacio vectorial generado por el conjunto C
$\overline{Sp}\{C\}$	la clausura del conjunto Sp{C}
$\triangle$	$\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ operador Laplaciano
1_ω	función característica del conjunto ω
$\partial\Omega$	frontera del conjunto Ω

Resumen

En este trabajo se estudia, en primer lugar, la teoría de **Producto Cruzado de Flujos** , que es la traducción al español de **Skew Product Flows**, los cuales son **Operadores de Evolución** que aparecen de manera natural cuando se estudian sistemas de ecuaciones diferenciales no autónomos, y es una forma de asociarles un sistema dinámico a estas ecuaciones. Se estudia la controlabilidad exacta y la controlabilidad aproximada de ecuaciones de evolución en espacios de Banach; en particular, en espacios de Hilbert, cuya dinámica viene dada a través de un producto cruzado de flujos. Los resultados obtenidos en esta investación se aplicarán a sistemas lineales y sistemas semi lineales no autónomos gobernados por ecuaciones en derivadas parciales.

Introducción

En este trabajo se estudia la controlabilidad de sistemas de control gobernados por ecuaciones de evolución no autónomas, a las cuales se le puede asociar un sistema dinámico usando las técnicas de Producto Cruzado de Semiflujos (Skew Product Semiflows).

Los sistemas de control gobernados por ecuaciones no autónomas cuya dinámicas puede ser determinada mediante un producto cruzado de semiflujos, fueron considerado por R. Johnson y M. Nerurkar en [19], un estudio de controlabilidad de sistemas no autónomo de dimensión finita. Esta técnica ha sido estudiada ampliamente por Sacker-Sell [30, 31], en el caso de espacios de Banach de dimensión finita, por Chow-Leiva [7, 8] y Magalh*ães* [24], en el caso de dimensión infinita, para estudiar la dicotomía exponencial de ecuaciones de evolución.

Recientemente, Barcenas-Chow-Leiva-Tineo en [6], aplican está técnica para sistemas de control no autónomos lineal. Leiva-Merente-Sánchez en [21] dan condiciones para estudiar la controlabilidad aproximada de sistemas semilineales. Usaremos la técnica de producto cruzado de semiflujos para estudiar la controlabilidad exacta y la controlabilidad aproximada de ecuaciones de evolución en espacios de Banach, en particular en espacios de Hilbert, cuya dinámica viene dada a través de un producto cruzado de semiflujos y son aplicadas a sistemas lineales no autónomos gobernados por ecuaciones en derivadas parciales.

Algunos resultados básicos de la teoría de integración a valores vectoriales y controlabilidad en espacios de Banach reflexivos que usaremos en el estudio de la teoría de producto cruzado de semiflujos se puede encontrar en el libro de Diestel-Uhl [14], y Diestel-Bárcenas [5]. En cuanto a la teoría semigrupo de operadores y la teoría de Operador de Evolución nos referimos al libro de Pazy [26].

Consideremos el siguiente sistema de control gobernado por la ecuación de evolución lineal en los espacios de Banach Reflexivos Z y U

$$z' = Az + Bu, \quad t \geq 0, \quad z(t) \in Z, \quad u(t) \in U, \tag{0.1}$$

donde la función control u pertenece al espacio $L^p(0,\tau;U), p > 1$, $A : D(A) \subset Z :\longrightarrow Z$ es el generador infinitesimal del semigrupo fuertemente continuo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ sobre Z y

$B \in L(U, Z)$.
Para estudiar la controlabilidad de este sistema, usualmente, se considera el operador de controlabilidad dado por

$$G : L^p(0, \tau; U) \longrightarrow Z, \quad Gu = \int_0^\tau S(\tau - r)Bu(r)dr. \tag{0.2}$$

La controlabilidad exacta y la controlabilidad aproximada del sistema (0.1) es equivalente, respectivamente, a las siguientes condiciones:

1. $Rang(G) = Z$ si y sólo si $\|G^\star z^\star\| \geq \gamma\|z^\star\|$, $z^\star \in Z^\star$, para algún $\gamma > 0$.

2. $\overline{Rang(G)} = Z$ si y sólo si $Ker(G^\star) = \{0\}$.

Para expresar las condiciones anteriores en términos de A, $S(t)$ y B nosotros necesitamos calcular el operador adjunto $G^\star$ of G, el cual puede ser posible sólo si los espacios Z y U son espacios de Banach reflexivos, ya que bajo las condiciones del Teorema 2.19 de [9], se asegura que el adjunto del semigrupo también es fuertemente continuo, es decir, la función $t \to S^\star(t)z$ es continua para todo $z \in Z$. En efecto, nosotros tenemos que el operador adjunto de G viene dado por:

$$G^\star : Z^\star \longrightarrow L^q(0, \tau; U^\star), \quad G^\star z^\star = B^\star S^\star(\tau - \cdot)z^\star \in L^q(0, \tau; U^\star), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Por lo tanto, las dos condiciones dada anteriormente, para la controlabilidad exacta y aproximada del sistema (0.1), puede se expresada como sigue:

$$\gamma\|B^\star S^\star(\tau - \cdot)z^\star\|_{L_p} \geq \|z^\star\|, \qquad z^\star \in Z^\star. \tag{0.3}$$

$$B^\star S^\star(\tau - s)z^\star = 0, \quad 0 \leq s \leq \tau \quad \Longrightarrow z^\star = 0. \tag{0.4}$$

Ahora, para sistemas de control lineal gobernado por una ecuación de evolución no autónoma de la forma

$$z' = A(t)z + B(t)u, \quad t \geq 0, \quad z(t) \in Z, \tag{0.5}$$

el problema es más complicado ya que el adjunto $U^\star(t, s)$ de un operador de evolución $U(t, s)$, generado por la familia $A(t)$, no necesariamente es fuertemente continuo, aún en espacio de Banach reflexivo, lo cual no permite calcular el adjunto del correspondiente operador de controlabilidad

$$Gu = \int_0^\tau U(\tau - r, r)B(r)u(r)dr.$$

Sin embargo, para la clase de sistemas no autónomos que generan productos cruzado de semiflujos, podemos demostrar que el operador adjunto $\Phi^\star(\theta,t)$, del operador evolución $\Phi(\theta,t)$ es fuertemente continua (ver Teorema 2.4 y Corolario 2.5), el cual nos permite calcular explícitamente el adjunto del operador de controlabilidad para tales sistemas.

Para justificar el uso de producto cruzado de flujos en la teoría de control, comenzaremos estudiando la controlabilidad de la siguiente clase de ecuaciones evolución no autónomas

$$z' = A(\theta \cdot t)z(t) + B(\theta \cdot t)u(t), \quad t \geq 0, \quad \theta \in \Theta, \quad z(t) \in Z, \tag{0.6}$$

donde la función de control $u(t)$ perteneciente a $L^2(0,\tau;U)$, y Z, U son espacios de Banach. El conjunto Θ es un espacio topológico de Hausdorff compacto, el cual es invariante bajo el flujo $\sigma(\theta,t) = \theta \cdot t$, para todo $\theta \in \Theta$, $t \in \mathbb{R}$, $A(\theta)$ es el generador de un operador de evolución fuertemente continuo y compacto $\Phi(\theta,t)$ en Z, con dominio común $D(A(\theta)) = D$, $B(\theta) \in L(U,Z)$ y la función $\theta \longrightarrow B(\theta)z$ es continua en θ para todo z fijo. $L(U,Z)$ es el espacio de Banach de todos los operadores lineales y acotados de U a Z, en particular $L(Z) = L(Z,Z)$. Asumiremos que la ecuación

$$z' = A(\theta \cdot t)z, \quad z \in Z \quad \theta \in \Theta, \quad t \geq 0, \tag{0.7}$$

genera un producto cruzado de semiflujos $\pi = (\Phi, \sigma)$ sobre $\mathcal{E} = Z \times \Theta$ de acuerdo a la Definición 1.1, dado por

$$\pi(z,\theta,t) = (\Phi(z,\theta,t), \theta \cdot t), \quad t \geq 0, \tag{0.8}$$

donde $\Phi(\theta,t)$ es un operador de evolución asociado con (0.7), tal que $\Phi(\theta,0) = I$ es el operador identidad en Z.

Para todo control $u \in L^2(0,\tau;U)$, la ecuación (0.6) tiene una única solución moderada dada por

$$z(t) = z(t,z_0,\theta,u) = \Phi(\theta,t)z_0 + \int_0^t \Phi(\theta \cdot s, t-s)B(\theta \cdot s)u(s)ds, \quad 0 \leq t \leq \tau. \tag{0.9}$$

Consideremos, para cada $\theta \in \Theta$, los siguientes operadores

$$G_\theta : L^2(0,\tau;U) \longrightarrow Z \qquad \text{y} \qquad G_\theta^\star : Z \longrightarrow L^2(0,\tau;U)$$

definidos como siguen:

$$G_\theta(u) = \int_0^\tau \Phi(\theta \cdot s, \tau - s)B(\theta \cdot s)u(s)ds \qquad \text{y} \qquad (G_\theta^\star z)(s) = B^\star(\theta \cdot s)\Phi^\star(\theta \cdot s, \tau - s)z,$$

lo cual implica que $G_\theta^\star z \in L^2(0,\tau;U)$.

Así,

$$G_\theta G_\theta^\star z = \int_0^\tau \Phi(\theta \cdot s, \tau - s)B(\theta \cdot s)B^\star(\theta \cdot s)\Phi^\star(\theta \cdot s, \tau - s)ds,$$

y haciendo $W_\theta = G_\theta G_\theta^\star$, obtenemos el operador W_θ, llamado Grammiano en la literatura.

Existen pocas referencias, hasta donde hemos estudiado, sobre sistema de control infinito dimensional gobernado por ecuaciones de evolución no autónomos, algunos resultados en esta dirección se puede encontrar en [17] y [20].

La noción de producto cruzado de semiflujos nos permitirá dar las condiciones necesarias y suficientes para la controlabilidad exacta y aproximada del sistema no autónomo (0.5).

Consideremos el siguiente sistema evolucionario semilineal no autónomo

$$z' = A(\theta \cdot t)z + B(\theta \cdot t)u(t) + F(\theta \cdot t, z(t), u(t)), \quad t \in [0, \tau] \tag{0.10}$$

donde la función control $u(t)$ pertenece a $L^2(0, \tau; U)$, y $Z = U$ es un espacio de Hilbert. El conjunto Θ es un espacio topológico de Hausdorff compacto, el cual es invariante bajo el flujo $\sigma(\theta, t) = \theta \cdot t$, para todo $\theta \in \Theta$, $t \in [0, \tau]$, $A(\theta)$ es el generador de un operador de evolución fuertemente continuo y compacto $\Phi(\theta, t)$ en Z, con dominio común $D(A(\theta)) = D$, $B(\theta) \in L(U, Z)$ y la función $\theta \longrightarrow B(\theta)z$ es continua en θ para todo z fijo. $L(U, Z)$ es el espacio de Banach de todos los operadores lineales y acotados de U a Z, en particular $L(Z) = L(Z, Z)$.

La función no lineal $F : \Theta \times Z \times U \to Z$ es suficientemente suave y existen constantes $a, b \in \mathbb{R}$, $R > 0$ y $\frac{1}{2} \leq \beta < 1$ tal que

$$\|F(\theta, z, u)\|_Z \leq a\|u\|^\beta + b, \quad \forall u, z \in Z, \theta \in \Theta, \|u\| \geq R. \tag{0.11}$$

Además, supongamos que el sistema lineal

$$z' = A(\theta \cdot t)z(t) + B(\theta \cdot t)u(t), \tag{0.12}$$

es aproximadamente controlable.

Observación 0.1. *La condición (0.11) puede ser reemplazada por la siguiente condición más general:*
Existen constantes $a, b, c \in \mathbb{R}$, $R > 0$ y $\frac{1}{2} \leq \beta < 1$ tal que

$$\|F(\theta, z, u) - cz\|_Z \leq a\|u\|^\beta + b, \quad \forall u, z \in Z, \theta \in \Theta, \|u\|, \|z\| \geq R, \tag{0.13}$$

lo cual implica que

$$\|F(\theta, z, u)\|_Z \leq a\|u\|^\beta + c\|z\| + b, \quad \forall u, z \in Z, \theta \in \Theta, \|u\|, \|z\| \geq R.$$

Bajo las condiciones (0.11) ó (0.13) impuestas al término no lineal $F(\theta, z, u)$ de la ecuación (0.10) y la controlabilidad aproximada del sistema lineal (0.6), en este trabajo probaremos la controlabilidad aproximada del sistema no lineal (0.10) usando el Teorema 1.10 del punto fijo de Rothe.

La controlabilidad aproximada de la ecuaciones de evolución semilineal autónoma ha sido estudiada por varios autores, pero el término no lineal F(z) depende sólo de la variable espacial z y su acotación o sublinealidad al infinito. Para mencionar algunos autores, donde pueden ser analizados tenemos, [11, 12, 28, 29, 25, 34] y [35],etc.
La controlabilidad aproximada de la ecuación del calor bajo la perturbación no lineal $f(z)$ independientes de las variables t y u

$$\begin{cases} z_t = \Delta z + 1_\omega u(t,x) + f(z) & \text{en} \quad (0,\tau] \times \Omega, \\ z = 0, & \text{sobre} \quad (0,\tau) \times \partial\Omega, \\ z(0,x) = z_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{0.14}$$

ha sido estudiada por varios autores, en particular [13, 15] y [16], dependiendo sobre las condiciones impuestas al término no lineal $f(z)$. Por ejemplo, en [15] y [16] la controlabilidad aproximada del sistema (0.14) se prueba si $f(z)$ es sublineal al infinito, es decir,

$$|f(z)| \leq d|z| + e, \quad |z| > R. \tag{0.15}$$

También, en las referencias anteriores, los autores expresan que, cuando la función f es superlineal al infinito, la controlabilidad aproximada del sistema (0.14) falla.
Sin embargo, para nuestro conocimiento, la controlabilidad aproximada de ecuaciones de evolución no autónomas en espacios de Hilbert ha sido poco estudiada, podemos mencionar los siguientes artículos [6, 32] y [33], donde se emplea la técnica de producto cruzado de semiflujos a sistemas de control no autónomos. Se estudia la estabilidad y controlabilidad para sistema de ecuaciones en diferencias y la controlabilidad exacta de sistemas discretos variacional.

Capítulo 1

Preliminares

En esta sección caracterizamos los operadores sobreyectivo y operadores con rango denso, damos algunas notaciones, definiciones y resultados sobre producto cruzado de semiflujos en espacios de Banach; además, presentamos el Teorema del punto fijo de Rothe.

1.1. Producto Cruzado de Semiflujos.

1.1.1. Motivación y Definición

Supongamos que $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una función suficientemente suave, y consideremos Θ un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$, el cual es invariante bajo el flujo o sistema dinámico, generado por la ecuación diferencial

$$z' = f(z), \quad z \in \mathbb{R}^n. \tag{1.1}$$

Entonces, para todo $\theta \in \Theta$ se tiene que la solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} z'(t) = f(z(t)), \\ z(0) = \theta, \end{cases} \tag{1.2}$$

dada por la función $z(t) = z(t, \theta)$, es única y está definida para todo $t \in \mathbb{R}$. Esta solución la podemos denotar también como sigue

$$z(t, \theta) = \alpha_t(\theta) = \theta \cdot t, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \theta \in \Theta. \tag{1.3}$$

Así, la familia $\{\alpha_t(\cdot) : t \in \mathbb{R}\}$ es un sistema dinámico, es decir:

1. $\alpha_0(\theta) = \theta$

2. $\alpha_{t+s}(\theta) = (\alpha_t \circ \alpha_s)(\theta) = \alpha_t(\alpha_s(\theta))$

3. $\lim\limits_{t \to 0^+} \alpha_t(\theta) = \theta$

4. $\lim\limits_{\theta \to \theta_0} \alpha_t(\theta) = \alpha_t(\theta_0)$.

Ahora, deseamos estudiar el comportamiento de las soluciones de la ecuación (1.1) alrededor o cerca del conjunto Θ, es decir, queremos comparar soluciones $x(t)$ con soluciones $\alpha_t(\theta)$ de (1.1) con datos iniciales en Θ, para lo cual hacemos el siguiente cambio de variable

$$z(t) = x(t) - \theta \cdot t, \qquad \theta \in \ \Theta, \tag{1.4}$$

donde $x(\cdot)$ es una solución cualquiera de la ecuación (1.1).

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} z'(t) &= x'(t) - \frac{d}{dt}(\theta \cdot t) = f(x(t)) - f(\theta \cdot t) \\ &= f(z(t) + \theta \cdot t) - f(\theta \cdot t) \\ &= f'(\theta \cdot t)z + f(z + \theta \cdot t) - f(\theta \cdot t) - f'(\theta \cdot t)z. \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\lim_{\|z\| \longrightarrow 0} \frac{\|f(z + \theta \cdot t) - f(\theta \cdot t) - f'(\theta \cdot t)z\|}{\|z\|} = 0.$$

Luego, haciendo

$$g(z, \theta) = f(z + \theta) - f(\theta) - f'(\theta)z$$

obtenemos que

$$g(z, \theta) = o(\|z\|).$$

En otras palabras, estudiar el comportamiento de las soluciones de (1.1) alrededor de Θ, se reduce a estudiar el comportamiento de la solución trivial de la ecuación variacional

$$z' = A(\theta \cdot t)z + g(z, \theta \cdot t). \tag{1.5}$$

Dado que g es pequeño, en un entorno del cero, el comportamiento de la solución trivial de (1.5) es equivalente o parecido al comportamiento de la solución trivial del sistema linealizado

$$z' = A(\theta \cdot t)z. \tag{1.6}$$

Si para cada $\theta \in \Theta$, denotamos por $\Phi(\theta, t)$ la matriz fundamental de (1.6), es decir, la matriz solución del sistema

$$\begin{cases} Z'(t) = A(\theta \cdot t)Z, \\ Z(0) = I, \end{cases}$$

entonces la familia de aplicaciones

$$\pi_t : \mathbb{R}^n \times \Theta \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \Theta$$

definida por

$$\pi_t(z, \theta, t) = (\Phi(\theta, t)z, \theta \cdot t), \qquad (z, \theta, t) \in \mathbb{R}^n \times \Theta \times \mathbb{R},$$

con Φ satisfaciendo las siguientes propiedades:

1. $\Phi(\theta, 0) = I$
2. $\Phi(\theta, t+s) = \Phi(\theta \cdot t, s)\Phi(\theta, t)$,
3. $\lim\limits_{t \longrightarrow 0^+} \Phi(\theta, t)z = z$
4. $\Phi(\theta, t)z \longrightarrow \Phi(\theta_0, t)z$ si $\theta \longrightarrow \theta_0$,

es un sistema dinámico, es decir:

- $\pi_0(z, \theta) = (\Phi(\theta, 0)z, \theta \cdot 0) = (z, \theta)$
- $\pi_{t+s}(z, \theta) = \pi_t \circ \pi_s(z, \theta) = \pi_t(\pi_s(z, \theta))$.
- $\lim\limits_{t \longrightarrow 0} \pi_t(z, \theta) = (z, \theta)$.

La aplicación $\pi : \mathbb{R}^n \times \Theta \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \Theta$ dada por $\pi(z, \theta, t) = (\Phi(\theta, t)z, \theta \cdot t)$ es un Producto Cruzado de Flujo lineal, en el fibrado vectorial trivial $\mathcal{E} = \mathbb{R}^n \times \Theta$.

Definición 1.1. *Consideremos $\mathcal{E} = Z \times \Theta$, donde Z es un espacio de Banach fijo (el espacio estado) y Θ es un espacio compacto y Hausdorff. Supongamos que $\sigma(\theta, t) = \theta \cdot t$ es un flujo sobre Θ, es decir, la función $(\theta, t) \longrightarrow \theta \cdot t$ es continua, y además cumple que:*

$$\theta \cdot 0 = \theta \quad y \quad \theta \cdot (s+t) = (\theta \cdot s) \cdot t, \forall s, t \in \mathbb{R}.$$

Un **producto de semiflujos cruzado lineal** $\pi = (\Phi, \sigma)$ *sobre* $\mathcal{E} = Z \times \Theta$ *es una función* $\pi(z, \theta, t) = (\Phi(\theta, t)z, \theta \cdot t)$ *para* $t \geq 0$, *con la siguiente propiedad:*

1. $\Phi(\theta, 0) = I$, *es el operador identidad sobre* Z, *para todo* $\theta \in \Theta$.

2. $\lim\limits_{t \longrightarrow 0^+} \Phi(\theta, t)z = z$ *es uniformemente en* θ. *Esto significa que para cada* $z \in Z$ *y cada* $\epsilon > 0$ *existe un* $\delta = \delta(z, \epsilon) > 0$ *tal que* $\|\Phi(\theta, t)z - z\| \leq \epsilon$, *para todo* $\theta \in \Theta$ *y* $0 \leq t \leq \delta$.

3. $\Phi(\theta, t)$ *es un operador lineal y acotado de* Z *en* Z *tal que satisface la identidad de cocycle:*

$$\Phi(\theta, t+s) = \Phi(\theta \cdot t, s)\Phi(\theta, t), \quad \theta \in \Theta, \quad s, t \geq 0.$$

4. *Para todo* $t \geq 0$ *la función de* $\mathcal{E}$ *en* Z *dada por*

$$(z, \theta) \longrightarrow \Phi(\theta, t)z$$

es continua.

Las propiedades (2) y (3) implican que para cada $(z, \theta) \in \mathcal{E}$ el operador solución $t \longrightarrow \Phi(\theta, t)z$ es continuo a la derecha para $t \geq 0$. En efecto:

$$\|\Phi(\theta, t+h)z - \Phi(\theta, t)z\| = \|[\Phi(\theta \cdot t, h) - I]\Phi(\theta, t)z\|,$$

el cual converge a 0 cuando h tiende a 0^+.

La prueba de la siguiente proposición puede ser encontrada en [8].

1.2. Propiedades

Proposición 1.1. *Sea* $\pi = (\Phi, \sigma)$ *un producto de semiflujos lineal sobre* $\mathcal{E}$, *entonces existe constante* $M \geq 1$, $a > 0$ *tal que*

$$\|\Phi(\theta, t)\| \leq Me^{at}, \quad \theta \in \Theta, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Sean Z y Θ como antes. Consideremos el siguiente sistema lineal no autónomo dependiente del tiempo

$$z'(t) = A(\theta \cdot t)z(t), \quad t > 0, \tag{1.7}$$

donde $A(\theta \cdot t) = A + D(\theta \cdot t)$, A es el generador infinitesimal del semigrupo fuertemente continuo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$; $\sigma(\theta, t) = \theta \cdot t$ es un flujo sobre Θ y $D(\theta) \in L(Z)$, $t \in \mathbb{R}$.

Lema 1.2. *Si* $D(\cdot) : \Theta \longrightarrow L(Z)$ *es fuertemente continua, entonces el conjunto* $\{\|D(\theta)\| : \theta \in \Theta\}$ *es acotado.*

Prueba: Consideremos los siguiente conjuntos

$$H = \{\|D(\theta)\| : \theta \in \Theta\}, \quad H(z) = \{\|D(\theta)z\| : \theta \in \Theta\}.$$

Como $\theta \longrightarrow D(\theta)z$ es continua y Θ es compacto, entonces para cada $z \in Z$, tenemos que el conjunto $H(z)$ acotado. Por tanto, por el teorema de la acotación uniforme de Banach-Steinhause obtenemos que el conjunto H es acotado.

Lema 1.3. *Si $D(\cdot) : \Theta \longrightarrow L(Z)$ es fuertemente continua y $z(\cdot) : \mathbb{R} \longrightarrow Z$ es una función continua, entonces para cada $\theta \in \Theta$ la función $t \longrightarrow D(\theta \cdot t)z(t)$ es continua.*

Prueba: Sea $t \in \mathbb{R}$ fijo. Entonces

$$\begin{aligned} \|D(\theta \cdot (t+h))z(t+h) - D(\theta \cdot t)z(t)\| &= \|D(\theta \cdot (t+h))[z(t+h) - z(t)] \\ &- [D(\theta \cdot (t+h)) - D(\theta \cdot t)]z(t)\| \\ &\leq L\|z(t+h) - z(t)\| + \|D(\theta \cdot (t+h)) \\ &- D(\theta \cdot t)]z(t)\| \end{aligned}$$

donde $L = sup\{\|D(\theta)\| : \theta \in \Theta\}$ y $\theta \cdot t \in \Theta$ para $t \in \mathbb{R}$.

Por lo tanto,

$$\|D(\theta \cdot (t+h))z(t+h) - D(\theta \cdot t)z(t)\| \longrightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad h \longrightarrow 0.$$

Para precisar en qué sentido la ecuación (1.7) genera un producto de semiflujos cruzado lineal, vamos a consider las siguientes familias de ecuaciones integrales:

$$z(t) = S(t)z_0 + \int_0^t S(t-s)D(\theta \cdot s)z(s)ds, \quad t \geq 0, \quad \theta \in \Theta. \tag{1.8}$$

Definición 1.2. *(Solución Moderada). La solución $z(t) = z(t, \theta)$ de la ecuación (1.8) es llamada solución moderada de la ecuación (1.7).*

La prueba del teorema siguiente se puede encontrar en [7].

Teorema 1.4. *Sea A el generador infinitesimal de un semigrupo fuertemente continuo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ sobre Z y sea $D(\cdot) : \Theta \longrightarrow L(Z)$ un operador fuertemente continuo. Entonces para cada $\theta \in \Theta$ y $z_0 \in Z$ el problema*

$$\begin{cases} z'(t) = A(\theta \cdot t)z = (A + D(\theta \cdot t))z(t), \\ z(0) = z_0 \end{cases} \tag{1.9}$$

tiene como única solución moderada la función $\Phi_D(\theta, t)z_0$ dada por

$$\Phi_D(\theta, t)z_0 = S(t)z_0 + \int_0^t T(t-s)D(\theta \cdot s)\Phi_D(\theta, s)z_0 ds. \tag{1.10}$$

Si

$$\|S(t)\| \leq M\, e^{Wt}, \quad t \geq 0,$$

entonces

$$\|\Phi_D(\theta,t)\| \leq M\, e^{(W+LM)t}, \quad t \geq 0 \tag{1.11}$$

donde

$$L = \sup\{\|D(\theta)\| : \theta \in \Theta\}.$$

Más aún, la función $\pi_D : \mathcal{E} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathcal{E}$ *dada por*

$$\pi_D(z,\theta,t) = (\Phi_D(\theta,t)z, \theta \cdot t) \tag{1.12}$$

es producto cruzado de semiflujo sobre $\mathcal{E} = Z \times \Theta$.

1.3. Caracterización de Operadores con Rango Denso

Teorema 1.5. *Sean* V *y* W *espacios de Banach y consideremos* $S \in L(V,W)$ *con* $Rang(S) = W$. *Entonces, existen* $\alpha > 0$ *tal que para todo* $Q \in L(V,W)$ *con* $\|S - Q\| < \alpha$ *tenemos que el* $Rang(Q) = W$.

Lema 1.6. *(Ver [9]) Sean* W *y* Z *espacios de Banach y* $G \in L(W,Z)$ *tal que* $Rang(G) \subset Z$. *Entonces, existe una sucesión* $\{f_n\}_{\geq 1} \subset Z^\star$ *tal que*

$$\|f_n\| = 1 \quad y \quad \lim_{n \longrightarrow \infty} G^\star f_n = 0.$$

Teorema 1.7. *(Ver [9]) Sean* W *y* Z *espacio de Banach reflexivos y* $G \in L(W,Z)$. *Entonces*

1. $Rang(G) = Z$ *si y sólo si* $\|G^\star z^\star\| \geq \gamma \|z^\star\|$, $z^\star \in Z^\star$, *para algún* $\gamma > 0$.

2. $\overline{Rang(G)} = Z$ *si y sólo si* $Ker(G^\star) = \{0\}$.

1.3.1. El Teorema de Rothe y Otros Resultados

Los resultados que en esta sección enunciamos serán utilizado en la demostración del resultado principal del capítulo 3.

Proposición 1.8. *Sea* (Z, Σ, μ) *un espacio de medida con* $\mu(Z) < \infty$ *y* $1 \leq q < r < \infty$. *Entonces* $L^r(\mu) \subset L^q(\mu)$ *y*

$$\|f\|_q \leq \mu(Z)^{\frac{r-q}{rq}} \|f\|_r, \quad f \in L^r(\mu). \tag{1.13}$$

Prueba: Consideremos $p = \frac{r}{q} > 1$, entonces

$$\int_Z (|f|^q)^p d\mu = \int_Z |f|^r d\mu$$

de donde tenemos que $|f|^q \in L^p$ y $1 \in L^{p'}$, siendo $\frac{1}{p'} = 1 - \frac{1}{p} = 1 - \frac{q}{r}$.

Ahora, usando la desigualdad de Holder, resulta que

$$\begin{aligned} \int_Z \Big(|f|^q \cdot 1\Big) d\mu &\leq \Big(\int_Z |f|^{qp} d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_Z 1 d\mu\Big)^{\frac{1}{p'}} = \Big(\int_Z |f|^r d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} \mu(Z)^{\frac{1}{p'}} \\ &= \Big(\int_Z |f|^r d\mu\Big)^{\frac{q}{r}} \Big(\mu(Z)\Big)^{1-\frac{q}{r}} \end{aligned}$$

luego,

$$\Big(\int_Z |f|^q d\mu\Big)^{\frac{1}{q}} \leq \Big(\int_Z |f|^r d\mu\Big)^{\frac{1}{r}} \mu(Z)^{(1-\frac{q}{r})\cdot\frac{1}{q}}.$$

Así, tenemos que

$$\|f\|_{L^q} \leq \|f\|_{L^r} \cdot \mu(Z)^{(1-\frac{q}{r})\cdot\frac{1}{q}}.$$

Como $(1 - \frac{q}{r}) \cdot \frac{1}{q} = \frac{r-q}{qr}$, se sigue que

$$\|f\|_{L^q} \leq \mu(Z)^{\frac{r-q}{qr}} \|f\|_{L^r}.$$

Lema 1.9. *(Vea el Lema 3.14 de [9], pg. 62) Sea* $\{\alpha_j\}_{j\geq 1}$ *y* $\{\beta_{i,j} : i = 1, 2, \ldots, m\}_{j\geq 1}$ *dos sucesiones de números reales tales que :* $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 \cdots$. *Entonces*

$$\sum_{j=1}^{\infty} e^{\alpha_j t} \beta_{i,j} = 0, \quad \forall t \in [0, \tau], \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

si y sólo si

$$\beta_{i,j} = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, \infty.$$

Teorema 1.10. *(Teorema de Rothe, [18], pg. 129) Sea E un espacio vectorial topológico de Hausforff. Sea* $B \subset E$ *un subconjunto convexo y cerrado tal que el cero de* E *esta contenido en el interior de* B. *Sea* $\Phi : B \to E$ *una función continua con* $\Phi(B)$ *relativamente compacto en* E *y* $\Phi(\partial B) \subset B$. *Entonces, existe un punto* $z^\star \in B$ *tal que* $\Phi(z^\star) = z^\star$.

Capítulo 2

Controlabilidad de los Sistemas Lineales

Ahora, estudiaremos la controlabilidad del sistema no autónomo

$$z' = A(\theta \cdot t)z(t) + B(\theta \cdot t)u, \quad t \geq 0, \quad \theta \in \Theta, \tag{2.1}$$

donde el estado $z(t) \in Z$, la función control $u \in L^p(0, \tau; U)$, $p > 1$, y Z, U son espacios de Banach reflexivos y Θ un espacio topológico de Hausdorff compacto. También, asumiremos que la ecuación

$$z' = A(\theta \cdot t)z, \quad z \in Z, \quad \theta \in \Theta, \quad t \geq 0, \tag{2.2}$$

genera un producto cruzado de semiflujos lineal $\pi = (\Phi, \sigma)$ sobre $\mathcal{E} = Z \times \Theta$, dado por

$$\pi(z, \theta, t) = (\Phi(\theta, t)z, \theta \cdot t), \quad t \geq 0, \tag{2.3}$$

donde $\Phi(\theta, t)$ es el operador de evolución asociado con (2.2), tal que $\Phi(\theta, 0) = I$ es el operador identidad en Z.

Para todo control $u \in L^p(0, \tau; U)$, $p > 1$, el problema de valor inicial

$$\begin{cases} z'(t) = A(\theta \cdot t)z(t) + B(\theta \cdot t)u(t), \quad t \geq 0, \quad \theta \in \Theta, \\ z(0) = z_0 \end{cases} \tag{2.4}$$

admite una única solución moderada dada por

$$z(t) = z(t, z_0, \theta, u) = \Phi(\theta, t)z_0 + \int_0^t \Phi(\theta \cdot s, t - s)B(\theta \cdot s)u(s)ds, \quad 0 \leq t \leq \tau. \tag{2.5}$$

2.1. Controlabilidad

A continuación daremos la definiciones de controlabilidad exacta y aproximada, y probaremos algunas propiedades.

Definición 2.1. *(Controlabilidad Exacta) Diremos que el sistema (2.1) es exactamente controlable en* $[0,\tau]$, $\tau > 0$, *si para todo* $\theta \in \Theta$ *y* $z_0, z_1 \in Z$, *existe un control* $u \in L^p(0,\tau;U)$ *de tal manera que la solución* $z(t)$ *de (2.5) correspondiente a* θ *y* u, *verifica:*

$$z(0) = z_0 \quad y \quad z(\tau) = z_1. \quad \textit{Fig.1}$$

Podemos decir también que z_1 es accesible desde z_0 en un tiempo $\tau > 0$.
Ahora, vamos a considerar para todo $\theta \in \Theta$ el siguiente operador lineal acotado

$$\begin{aligned} G_\tau(\theta) &: L^p(0,\tau;U) \longrightarrow Z, \\ G_\tau(\theta)u &= \int_0^\tau \Phi(\theta\cdot s, \tau - s)B(\theta \cdot s)u(s)ds \end{aligned} \tag{2.6}$$

Proposición 2.1. *El sistema (2.1) es exactamente controlable en* $[0,\tau]$, *si y sólo si, el operador* $G_\tau(\theta)$ *es sobreyectivo, para todo* $\theta \in \Theta$, *es decir*

$$G_\tau(\theta)L^p(0,\tau;U) = G_\tau(\theta)L^p = Rang\big(G_\tau(\theta)L^p\big) = Z.$$

Definición 2.2. *(Controlabilidad Aproximada) Diremos que el sistema (2.1) es aproximadamente controlable en* $[0,\tau]$, $\tau > 0$, *si para todo* $\theta \in \Theta$, $\epsilon > 0$ *y* $z_0, z_1 \in Z$, *existe un control* $u \in L^p(0,\tau;U)$ *tal que la solución* $z(t)$ *de (2.5) correspondiente a* θ *y* u, *verifica:*

$$z(0) = z_0 \quad y \quad \|z(\tau) - z_1\| < \epsilon. \quad \textit{Fig.2}$$

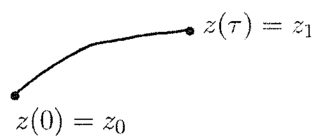

Fig.1

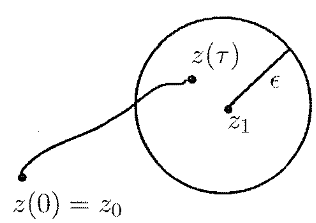

Fig.2

Proposición 2.2. *El sistema (2.1) es aproximadamente controlable en* $[0,\tau]$, *si y sólo si,*

$$\overline{G_\tau(\theta)L^p(0,\tau;U)} = Z, \quad \forall\, \theta \in \Theta.$$

Definición 2.3. *Consideremos el siguiente conjunto*

$$G_\infty(\theta) = \bigcup_{\tau>0} G_\tau(\theta) L^p(0,\tau;U), \quad \forall \theta \in \Theta.$$

Entonces, diremos que el sistema (2.1) es exactamente controlable en un tiempo libre, para todo $\theta \in \Theta$*, si* $G_\infty(\theta) = Z$ *(Aproximadamente Controlable en un tiempo libre, si* $\overline{G_\infty(\theta)} = Z$ *).*

Teorema 2.3. *El sistema (2.1) es exactamente controlable para algún tiempo fijo* $\tau > 0$*, para todo* $\theta \in \Theta$*. si y sólo si, es exactamente controlable en un tiempo libre.*

Prueba: La prueba es análoga a la prueba del Lema 1 en [20].

El siguiente teorema es una extensión del Teorema 2.19 de [9] y desempeñará un papel importante en la demostración del Teorema 2.6

Teorema 2.4. *Si* $\Phi(\theta,t)z_0$ *es débilmente continua en* t*, uniformemente en* θ*, entonces para cada* $\theta \in \Theta$*, la función* $\Phi(\theta,\cdot)$ *es fuertemente continua en* $[0,+\infty)$*.*

Prueba:

Definamos la siguiente función

$$z(t) = \Phi(\theta,t)z_0, \quad t \geq 0.$$

Para cada $t > 0$, la función $z(t)$ es débilmente continua en $[\alpha,\beta] \subset [0,+\infty)$, entonces por la Proposición 4 de [1], $z(t)$ es Bochner integrable.

Consideremos $\xi > 0$ y $0 < \alpha < \eta < \beta < \xi - \epsilon < \xi$, para $\epsilon > 0$. Entonces

$$\begin{aligned} z(\xi) &= \Phi(\theta,\xi)z_0 = \Phi(\theta, \xi - (\xi-\eta) + \xi - \eta)z_0 \\ &= \Phi(\theta \cdot (\xi - (\xi-\eta)), \xi-\eta)\Phi(\theta, \xi - (\xi-\eta))z_0 \\ &= \Phi(\theta\cdot\eta, \xi-\eta)\Phi(\theta,\eta)z_0 = \Phi(\theta\cdot\eta,\xi-\eta)z(\eta). \end{aligned}$$

Como el lado izquierdo es independiente de η, es integrable en $[\alpha,\beta]$, por lo tanto,

$$\int_\alpha^\beta z(\xi)\,d\eta = \int_\alpha^\beta \Phi(\theta\cdot\eta,\xi-\eta)z(\eta)\,d\eta.$$

Entonces,

$$(\beta-\alpha)z(\xi)=\int_{\alpha}^{\beta}\Phi(\theta\cdot\eta,\xi-\eta)z(\eta)\,d\eta.$$

También,

$$(\beta-\alpha)z(\xi\pm\epsilon)=\int_{\alpha}^{\beta}\Phi(\theta\cdot\eta,\xi\pm\epsilon-\eta)z(\eta)\,d\eta.$$

Ahora,

$$\begin{aligned}(\beta-\alpha)[z(\xi\pm\epsilon)-z(\xi)] &= \int_{\alpha}^{\beta}[\Phi(\theta\cdot\eta,\xi\pm\epsilon-\eta)-\Phi(\theta\cdot\eta,\xi-\eta)]x(\eta)\,d\eta\\ &= \int_{\alpha}^{\beta}[\Phi(\theta\cdot\eta,\xi\pm\epsilon-\eta)-\Phi(\theta\cdot\eta,\xi-\eta)]\Phi(\theta,\eta)z_0\,d\eta.\end{aligned}$$

Si hacemos $s=\xi-\eta$, tenemos

$$\begin{aligned}(\beta-\alpha)[z(\xi\pm\epsilon)-z(\xi)] &= -\int_{\xi-\alpha}^{\xi-\beta}[\Phi(\theta\cdot(\xi-s),s\pm\epsilon)-\Phi(\theta\cdot(\xi-s),s)]\Phi(\theta,(\xi-s))z_0\,ds\\ &= \int_{\xi-\beta}^{\xi-\alpha}[\Phi(\theta\cdot(\xi-s),s\pm\epsilon)-\Phi(\theta\cdot(\xi-s),s)]\Phi(\theta,(\xi-s))z_0\,ds.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}(\beta-\alpha)\|z(\xi\pm\epsilon)-z(\xi)\| \leq & \int_{\xi-\beta}^{\xi-\alpha}\|\Phi(\theta\cdot(\xi-s),s\pm\epsilon)-\Phi(\theta\cdot(\xi-s),s)\|\\ & \|\Phi(\theta,(\xi-s))z_0\|\,ds.\end{aligned}$$

De la Proposición 1.1, existen constantes $M\geq 1$, $a>0$ tal que

$$\|\Phi(\theta,t)\|\leq Me^{at},\quad \theta\in\Theta,\quad t\in\mathbb{R}_+.$$

Consecuentemente,

$$\|\Phi(\theta\cdot(\xi-s),s\pm\epsilon)-\Phi(\theta\cdot(\xi-s),s)\|\|\Phi(\theta,(\xi-s))z_0\|$$

es uniformemente acotado en $\Theta\times[\alpha,\beta]$.

Por lo tanto, aplicando el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, la integrar anterior tiende a cero cuando $\varepsilon\longrightarrow 0^{+}$. Así, la función $z(t)$ es fuertemente continua para todo $t\geq 0$.

Corolario 2.5. *Sea Z un espacio de Banach Reflexivo, entonces para cada $\theta \in \Theta$ fijo, la función $\Phi^\star(\theta, \cdot)$ es fuertemente continua en $[0, +\infty)$.*

Prueba: Para todo $\theta \in \Theta$ y $z^\star \in Z^\star$ la función $t \to \Phi^\star(\theta, t)z^\star$ es debil estrella continua. En efecto, para todo $x \in Z$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\langle \Phi^\star(\theta, t+h)z^\star - \Phi^\star(\theta, t)z^\star, z\rangle &= \lim_{h\to 0}\langle z^\star, \Phi(\theta, t+h)z - \Phi(\theta, t)z\rangle \\
&= \langle z^\star, \lim_{h\to 0}[\Phi(\theta, t+h)z - \Phi(\theta, t)z]\rangle \\
&= \langle z^\star, 0\rangle = 0.
\end{aligned}$$

Por otro lado, como Z es reflexivo, la topología debil y la topología debil estrella coinciden, se sigue que la función $t \to \Phi^\star(\theta, t)z^\star$ es también debilmente continua, y del Teorema anterior se obtiene la continuidad fuerte de la función.

Teorema 2.6. *El sistema (2.1) es exactamente controlable en un tiempo fijo $\tau > 0$ para todo $\theta \in \Theta$ si, y sólo si, existe $\gamma = \gamma(\theta) > 0$, tal que*

$$\gamma\|B^\star(\theta\cdot(\cdot))\Phi^\star(\theta\cdot(\cdot), \tau - \cdot)z^\star\|_{L^p} \geq \|z^\star\|, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad z^\star \in Z^\star. \tag{2.7}$$

Prueba: De la Proposición 2.1 y la parte (1) del Teorema 1.7 obtenemos

$$\text{Rango}(G_\tau(\theta)) = Z \iff \exists\, \gamma > 0 \;\; / \;\; \gamma\|G_\tau^\star(\theta)z^\star\| \geq \|z^\star\|, \quad z^\star \in Z^\star.$$

Calculemos $G_\tau^\star(\theta)$. Primero, del Corolario 2.5 tenemos que $B^\star(\theta\cdot s)\Phi^\star(\theta\cdot s, \tau - s)z^\star$ es una función continua en $[0, \tau]$. Por lo tanto, $B^\star(\theta\cdot(\cdot))\Phi^\star(\theta\cdot(\cdot), \tau - \cdot)z^\star \in L^q(0, \tau; U^\star)$. Esto nos permite calcular $G_\tau^\star(\theta)$.

En efecto,

$$\begin{aligned}
< z^\star, G_\tau(\theta)u >_{Z^\star, Z} &= < z^\star, \int_0^\tau \Phi(\theta\cdot s, \tau - s)B(\theta\cdot s)u(s)ds >_{Z^\star, Z} \\
&= \int_0^\tau < B^\star(\theta\cdot s)\Phi^\star(\theta\cdot s, \tau - s)z^\star, u(s) > ds \\
&= < B^\star(\theta\cdot(\cdot))\Phi^\star(\theta\cdot(\cdot), \tau - \cdot)z^\star, u(\cdot) >_{W^\star, W},
\end{aligned}$$

donde $W = L^p(0, \tau; U)$ y $W^\star = L^q(0, \tau; U)$ y $<,>_{W^\star, W}$ denota la dualidad entre $W^\star$ y W. Por lo tanto

$$G_\tau^\star(\theta)z^\star = B^\star(\theta\cdot(\cdot))\Phi^\star(\theta\cdot(\cdot), \tau - \cdot)z^\star \in L^q(0, \tau; U^\star).$$

Por lo tanto,

$$\gamma\|G_\tau^\star(\theta)z^\star\|_{L^q} = \|B^\star(\theta\cdot(\cdot))\Phi^\star(\theta\cdot(\cdot), \tau - \cdot)z^\star\|_{L^q} \geq \|z^\star\|, \quad z^\star \in Z^\star.$$

Lo cual concluye la prueba.

Teorema 2.7. *El sistema (2.1) es aproximadamente controlable en un tiempo fijo $\tau > 0$ si, y sólo si, para todo $\theta \in \Theta$,*

$$B^\star(\theta \cdot s)\Phi^\star(\theta \cdot s, \tau - s)z^\star = 0, \quad 0 \leq s \leq \tau \quad \Longrightarrow z^\star = 0.$$

Prueba: De la Proposición 2.1 y la parte (2) del Teorema 1.7, tendremos que

$$G_\tau^\star(\theta)z^\star = B^\star(\theta \cdot (\cdot))\Phi^\star(\theta \cdot (\cdot), \tau - \cdot)z^\star, \quad z^\star \in Z^\star,$$

luego

$$\begin{aligned}
\overline{Rang(G_\tau(\theta))} \;=\; Z \;&\Longleftrightarrow\; Ker(G_\tau^\star(\theta)) = \{0\} \\
&\Longleftrightarrow\; [G_\tau^\star(\theta \cdot (\cdot))z^\star = B^\star(\theta \cdot (\cdot))\Phi^\star(\theta \cdot (\cdot), \tau - (\cdot))z^\star \quad \Longrightarrow z^\star = 0] \\
&\Longleftrightarrow\; [G_\tau^\star(\theta)z^\star = B^\star(\theta \cdot s)\Phi^\star(\theta \cdot s, \tau - s)z^\star, \quad 0 \leq s \leq \tau \quad \Longrightarrow z^\star = 0].
\end{aligned}$$

Teorema 2.8. *El sistema (2.1) es aproximadamente controlable en un tiempo libre si, y sólo si, para todo $\theta \in \Theta$,*

$$B^\star(\theta \cdot t)\Phi^\star(\theta \cdot s, \tau - s)z^\star = 0, \quad 0 \leq s \leq \tau, \quad \forall \tau > 0 \Longrightarrow z^\star = 0.$$

Prueba: ($\Longrightarrow$) Supongamos que

$$\overline{\bigcup_{\tau>0} G_\tau(\theta)L^p(0,\tau;U)} = Z,$$

$$B^\star(\theta \cdot t)\Phi^\star(\theta \cdot s, \tau - s)z^\star = 0, \quad 0 \leq s \leq \tau, \quad \forall \tau > 0.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
< z^\star, G_\tau(\theta)u >_{Z^\star, Z} \;&=\; \int_0^\tau < B^\star(\theta \cdot s)\Phi^\star(\theta \cdot s, \tau - s)z^\star, u(s) > ds \\
&=\; < G_\tau^\star(\theta)z^\star, u >_{L^q, L^p} = 0, \quad \forall \tau > 0, \quad u \in L^p(0,\tau;U).
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$z^\star \in \Big[\overline{\bigcup_{\tau>0} G_\tau(\theta)L^p(0,\tau;U)}\Big]^\perp = Z^\perp = \{0\}$$

donde $\perp$ denota el anulador de $\bigcup_{\tau>0} G_\tau(\theta)L^p(0,\tau;U)$, así $z^\star = 0$.

La otra parte de la demostración puede hacerse por el método de reducción al absurdo con el fin de llegar a una contradicción.

Teorema 2.9. *El sistema (2.1) es aproximadamente controlable en un tiempo $\tau > 0$ si, y sólo si, para todo $\theta \in \Theta$,*

$$\overline{sp}\{\Phi(\theta \cdot s, \tau - s)B(\theta \cdot s)u : u \in U, \ s \in [0,\tau]\} = Z$$

Prueba: La prueba se sigue del Teorema de Hahn-Banach y el Teorema 2.7.

Corolario 2.10. *El sistema (2.1) es aproximadamente controlable en un tiempo libre para todo $\theta \in \Theta$ si, y sólo si,*

$$\overline{sp}\{\Phi(\theta \cdot s, \tau - s)B(\theta \cdot s)u : u \in U \; s \in [0, \tau],\ \tau > 0\} = Z.$$

Teorema 2.11. *El sistema (2.1) es exactamente controlable en un tiempo $\tau > 0$, entonces para todo $\theta \in \Theta$ se cumple:*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} B^\star(\theta \cdot s)\Phi^\star(\theta \cdot s, \tau - s)f_n = 0, \quad s \in [0, \tau] \quad \Longrightarrow \lim_{n \longrightarrow \infty} f_n = 0. \tag{2.8}$$

Prueba: Supongamos que el sistema (2.1) es exactamente controlable en el tiempo $\tau > 0$, entonces el operador $G_\tau(\theta) : L^p(0, \tau; U) \longrightarrow Z$ satisface que $\mathrm{Rang}(G_\tau(\theta)) = Z$. Así, del Teorema 2.6 existe $\gamma > 0$, tal que

$$\gamma \| B^\star(\theta \cdot (\cdot))\Phi^\star(\theta \cdot (\cdot), \tau - \cdot)z^\star\|_{L^q} \geq \|z^\star\|, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad z^\star \in Z^\star.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \lim_{n \longrightarrow \infty} \|f_n\| &\leq \gamma \lim_{n \longrightarrow \infty} \|B^\star(\theta \cdot (\cdot))\Phi^\star(\theta \cdot (\cdot), \tau - \cdot)f_n\|_{L_q} \\ &= \gamma \lim_{n \longrightarrow \infty} \left(\int_0^\tau \|B^\star(\theta \cdot s)\Phi^\star(\theta \cdot s, \tau - s)f_n\|^q \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Ahora, usando teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, obtenemos la condición (2.8).

2.2. Otras Caracterizaciones de la Controlabilidad Exacta

En está sección se presentan algunos resultados de la controlabilidad exacta del sistema lineal (2.1) en el espacio $L^2(0, \tau; U)$. El siguiente Teorema de [10] es una caracterización de la controlabilidad exacta del sistema lineal (2.1).

Teorema 2.12. *El sistema (2.1) es exactamente controlable en $[0, \tau]$ si, y sólo si, cualquiera de las siguientes condiciones se cumplen para cualquier $\gamma > 0$ y para todo $z \in Z$:*

i) $G_\tau(\theta)(L^2(0, \tau; U)) = Rang(G_\tau(\theta)) = Z$,

ii) $\langle G_\tau(\theta)G_\tau^\star(\theta)z, z\rangle \geq \gamma\|z\|_Z^2$, *iii)* $\|G_\tau^\star(\theta)z\|_Z^2 := \int_0^\tau \|(G_\tau^\star(\theta)z)(s)\|_U^2\, ds \geq \gamma\|z\|_Z^2$,

iv) $\int_0^\tau \|B^\star(\theta\cdot s)\Phi^\star(\theta\cdot s,\tau-s)z\|_U^2 ds \geq \gamma\|z\|_Z^2$,

v) $Ker(G_\tau^\star(\theta)) = \{0\}$ *y* $Rang(G_\tau^\star(\theta))$ *es cerrado.*

Ahora, formularemos y probaremos nuevos resultados para la controlabilidad exacta del sistema lineal (2.1).

Teorema 2.13. *El sistema (2.1) es exactamente controlable en* $[0,\tau]$ *si, y sólo si, el operador* $G_\tau(\theta)G_\tau^\star(\theta)$ *es invertible. Más aún, el control* $u \in L^2(0,\tau;U)$ *que lleva un estado inicial* z_0 *a un estado final* z_1 *en un tiempo* $\tau > 0$ *está dado por la siguiente fórmula:*

$$u(t) = B^\star(\theta\cdot s)\Phi^\star(\theta\cdot s,\tau-s)(G_\tau(\theta)G_\tau^\star(\theta))^{-1}(z_1 - \Phi(\theta,\tau)z_0). \tag{2.9}$$

Prueba: Supongamos que el sistema (2.1) es exactamente controlable en $[0,\tau]$. Entonces, del Teorema 2.12 obtenemos que

$$\gamma^2\|B^\star(\theta\cdot(\cdot))\Phi^\star(\theta\cdot(\cdot),\tau-\cdot)z\|_{L^2}^2 \geq \|z\|_Z^2, \quad z \in Z.$$

es decir,

$$\gamma^2\int_0^\tau \|B^\star(\theta\cdot s)\Phi^\star(\theta\cdot s,\tau-s)z\|_U^2 \geq \|z\|_Z^2, \quad z \in Z.$$

lo cual implica que

$$\gamma^2\int_0^\tau < B^\star(\theta\cdot s)\Phi^\star(\theta\cdot s,\tau-s)z, B^\star(\theta\cdot s)\Phi^\star(\theta\cdot s,\tau-s)z >_{U,U} \geq \|z\|_Z^2, \quad z \in Z.$$

así, obtenemos:

$$\gamma^2\int_0^\tau < \Phi(\theta\cdot s,\tau-s)B(\theta\cdot s)B^\star(\theta\cdot s)\Phi^\star(\theta\cdot s,\tau-s)z, z >_{U,U} \geq \|z\|_Z^2, \quad z \in Z.$$

Por lo tanto,

$$< G_\tau(\theta)G_\tau^\star(\theta)z, z > \geq \frac{1}{\gamma^2}\|z\|_Z^2, \quad z \in Z. \tag{2.10}$$

Esto implica que $G_\tau(\theta)G_\tau^\star(\theta)$ es inyectiva. Ahora, probaremos que que $G_\tau(\theta)G_\tau^\star(\theta)$ es sobreyectiva. Es decir, debemos ver que

$$\mathcal{R}(G_\tau(\theta)G_\tau^\star(\theta)) = \mathrm{Rang}(G_\tau(\theta)G_\tau^\star(\theta)) = Z.$$

Supongamos que no se cumple la igualdad, y consideremos que $\mathcal{R}(G_\tau(\theta)G_\tau^\star(\theta))$ está estrictamente contenida en Z. Usando la desigualdad de Cauchy Schwarz y (2.10), obtenemos que

$$\|G_\tau(\theta)G_\tau^\star(\theta)z\| \geq \frac{1}{\gamma^2}\|z\|_Z, \quad z \in Z,$$

lo cual implica que $\mathcal{R}(G_\tau(\theta)G_\tau^\star(\theta))$ es cerrado. Entonces, del Teorema de Hanh Banach, existe $z_0 \in Z$ con $z_0 \neq 0$ tal que

$$< G_\tau(\theta)G_\tau^\star(\theta), z_0 >= 0, \quad \forall z \in Z.$$

En particular, colocando $z = z_0$, obtenemos de (2.10) que

$$0 =< G_\tau(\theta)G_\tau^\star(\theta)z_0, z_0 >\geq \frac{1}{\gamma^2}\|z_0\|_Z^2.$$

Entonces $z_0 = 0$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $G_\tau(\theta)G_\tau^\star(\theta)$ es una biyección y del Teorema de la aplicación abierta, $(G_\tau(\theta)G_\tau^\star(\theta))^{-1}$ es un operador lineal acotado. Ahora, supongamos que $G_\tau(\theta)G_\tau^\star(\theta)$ es invertible. Entonces, dado $z \in Z$, probaremos la existencia de un control $u \in L^2$ tal que $G_\tau(\theta)u = z$. Este control u puede ser escogido de la siguiente manera:

$$u(t) = B^\star(\theta\cdot s)\Phi^\star(\theta\cdot s, \tau - s)(G_\tau(\theta)G_\tau^\star(\theta))^{-1}z.$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
G_\tau(\theta)u &= \int_0^\tau \Phi(\theta\cdot s, \tau - s)B(\theta\cdot s)u(s)ds \\
&= \int_0^\tau \Phi(\theta\cdot s, \tau - s)B(\theta\cdot s)B^\star(\theta\cdot s)\Phi^\star(\theta\cdot s, \tau - s)(G_\tau(\theta)G_\tau^\star(\theta))^{-1}zds \\
&= (G_\tau(\theta)G_\tau^\star(\theta))(G_\tau(\theta)G_\tau^\star(\theta))^{-1}z = z.
\end{aligned}$$

De la misma manera podemos demostrar que el control u dado por (2.9) lleva el estado inicial z_0 al estado final z_1 en un tiempo τ.

Corolario 2.14. *Si el sistema (2.1) es exactamente controlable, entonces el operador* $S : Z \longrightarrow L^2(0,\tau;U)$ *definido por*

$$S\xi = G_\tau^\star \mathcal{W}^{-1}\xi \quad o \quad (S\xi)(s) = B^\star(\theta\cdot s)\Phi^\star(\theta\cdot s, \tau - s)(G_\tau(\theta)G_\tau^\star(\theta))^{-1}\xi, \tag{2.11}$$

tiene una inversa a la derecha de $G_\tau(\theta)$. *Es decir,* $G_\tau(\theta)\circ S = I$

2.3. Perturbación de la Controlabilidad Exacta

En esta sección estudiaremos la controlabilidad del sistema (1.7) como una perturbación del siguiente sistema

$$z' = Az + B(\theta\cdot t)u, \quad t \geq 0, \quad \theta \in \Theta, \tag{2.12}$$

donde A es el generador infinitesimal del semigrupo fuertemente continuo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ en un espacio de Banach reflexivo Z; las funciones $D(\cdot)\,B(\cdot) : \Theta \longrightarrow L(Z)$ son fuertemente continuas. Probaremos que bajo ciertas condiciones, la controlabilidad del sistema (2.12) es preservada por el sistema

$$z' = (A + D(\theta \cdot t))z + B(\theta \cdot t)u, \quad t \geq 0, \quad \theta \in \Theta \tag{2.13}$$

Del Teorema 1.4 obtenemos que la ecuación

$$z' = (A + D(\theta \cdot t))z, \quad t \geq 0, \quad \theta \in \Theta \tag{2.14}$$

genera un producto cruzado de semiflujo $\pi_D : \mathcal{E} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathcal{E}$ dado por

$$\pi_D(z, \theta, t) = (\Phi_D(\theta, t)z, \theta \cdot t), \tag{2.15}$$

donde,

$$\Phi_D(\theta, t)z_0 = S(t)z_0 + \int_0^t S(t-s)D(\theta \cdot s)\Phi(\theta, s)z_0 ds, \tag{2.16}$$

es una solución moderada de la ecuación (2.14). Por lo tanto, para todo $u \in L_p(0, \tau; Z)$ $\tau > 0$, las soluciones de las ecuaciones (2.12) y (2.13) son dada respectivamente por

$$z(t) = S(t)z_0 + \int_0^t S(t-s)B(\theta \cdot s)u(s)ds, \tag{2.17}$$

y

$$z(t) = \Phi_D(\theta, t)z_0 + \int_0^t \Phi_D(\theta \cdot s, t-s)B(\theta \cdot s)u(s)ds. \tag{2.18}$$

Lema 2.15. *Si el sistema (2.12) es exactamente controlable en un tiempo* $\tau > 0$ *y* $\sup_{\theta \in \Theta} \|D(\theta)\|$ *es suficientemente pequeño, entonces el sistema (2.13) es controlable en un tiempo* τ.

Prueba: Consideremos el siguientes operadores lineales y acotado:

$$G_\tau(\theta, D), G_\tau(\theta) : L_p(0, \tau; U) \longrightarrow Z$$

dado por

$$G_\tau(\theta, D)u = \int_0^\tau \Phi_D(\theta \cdot s, \tau - s)B(\theta \cdot s)u(s)ds, \tag{2.19}$$

y

$$G_\tau(\theta)u = \int_0^\tau S(\tau - s)B(\theta \cdot s)u(s)ds, \tag{2.20}$$

Entonces, de la Proposición 2.1, la controlabilidad exacta de los sistemas (2.13) y (2.12) es equivalentes respectivamente a:

$$\mathrm{Rang}(G_\tau(\theta, D)) = Z \quad \text{y} \quad \mathrm{Rang}(G_\tau(\theta)) = Z.$$

Del Teorema 1.5 existe $\alpha > 0$ tal que, para todo todo $Q \in L(L_p(0,\tau;U),Z)$ con $\|G_\tau(\theta) - Q\| \leq \alpha$ tenemos que $\mathrm{Rang}(Q) = Z$. Ahora, podemos escribir $G_\tau(\theta, D)$ como sigue:

$$\begin{aligned} G_\tau(\theta, D)u &= \int_0^\tau S(\tau - s)B(\theta \cdot s)u(s)ds \\ &+ \int_0^\tau \int_s^\tau S(\tau - \beta)D(\theta \cdot \beta)\Phi_D(\theta \cdot s, \beta - s)B(\theta \cdot s)u(s)d\beta ds \\ &= G_\tau(\theta)u + H(\theta, D, B)u. \end{aligned}$$

Por otro lado, usando el Teorema 1.4 obtenemos que

$$\begin{aligned} \|H(\theta, D, B)u\| &\leq M \int_0^\tau \int_s^\tau \|D(\theta \cdot \beta)\| \|u(s)\| d\beta ds \\ &\leq M \int_0^\tau \int_0^\tau \|D(\theta \cdot \beta)\| \|u(s)\| d\beta ds. \end{aligned}$$

Si $\sup_{\theta \in \Theta} \|D(\theta)\|$ es lo suficientemente pequeño, entonces $\|H(\theta, D, B)\| < \alpha$. Por lo tanto

$$\|G_\tau(\theta) - G_\tau(\theta, D)\| \leq \alpha.$$

Así, $\mathrm{Rang}(G_\tau(\theta, D)) = Z$.

2.4. Aplicaciones.

En esta sección usamos los resultados preliminares para demostrar la controlabilidad aproximada interior de la siguiente amplia clase amplia de la ecuación reacción-difusión no autónomos en el espacio de Hilbert $Z = L^2(\Omega)$ dada por

$$\begin{cases} z' = A(\theta \cdot t)z + B_\omega u(t), & t \in [0, \tau], \quad \theta \in \Theta \\ z(0) = z_0 \end{cases} \tag{2.21}$$

donde Θ es un espacio de Hausdorff compacto, $A(\theta \cdot t) = -a(\theta \cdot t)A$ con $a : \Theta \to \mathbb{R}_+$ una función continua, el operador $B_\omega : Z \to Z$ se define por $B_\omega f = 1_\omega f$, Ω es un dominio en $\mathbb{R}^n$, ω es un subconjunto no vacío abierto de Ω, 1_ω denota la función característica del conjunto ω, el control $u \in L^2(0, \tau; L^2(\Omega))$, y $A : D(A) \subset Z \to Z$ es un operador lineal no acotado con la siguiente descomposición espectral:

$$Az = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \sum_{k=1}^{\gamma_j} \langle z, \phi_{j,k} \rangle \phi_{j,k} = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j E_j z, \tag{2.22}$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota un producto interno en Z, y

$$E_j z = \sum_{k=1}^{\gamma_j} \langle z, \phi_{j,k} \rangle \phi_{j,k}.$$

Los valores propios $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_j < \cdots \lambda_n \to \infty$ de A tienen multiplicidad finita γ_j igual a la dimensión del espacio propio correspondiente, y $\{\phi_{j,k}\}$ es un conjunto ortonormal completo de vectores propios de A. Así, $\{E_j\}$ es una familia completa de proyecciones ortogonales en Z y $z = \sum_{j=1}^{\infty} E_j z$, $z \in Z$. El operador $-A$ genera un semigrupo fuertemente continuo y compacto $\{S(t)\}$ dado por

$$S(t)z = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j t} E_j z. \tag{2.23}$$

Como caso particular, podemos probar la controlabilidad interior de la ecuación del calor no autónoma nD , la ecuación de Ornstein-Uhlenbeck, la ecuación Laguerre y la ecuación de Jacobi (ver [3] y [4]). Más concretamente, respectivamente tenemos:

$$\begin{cases} z_t = a(\theta \cdot t)\Delta z + 1_\omega u(t,x), & \text{en} \quad (0,\tau) \times \Omega, \quad \theta \in \Theta \\ z = 0, & \text{en} \quad (0,\tau) \times \partial\Omega, \\ z(0,x) = z_0(x), & \text{en} \quad \Omega, \end{cases} \tag{2.24}$$

donde Ω es un dominio acotado en $\mathbb{R}^n$, ω es un subconjunto no vacío y abierto de Ω, 1_ω denota la función característica del conjunto ω, $z_0 \in L^2(\Omega)$ y el control $u \in L^2(0,\tau; L^2(\Omega))$.

$$z_t = a(\theta \cdot t) \sum_{i=1}^{d} \left[x_i \frac{\partial^2 z}{\partial x_i^2} - x_i \frac{\partial z}{\partial x_i} \right] + 1_\omega u(t,x) \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad \theta \in \Theta, \tag{2.25}$$

donde $u \in L^2(0,\tau; L^2(\mathbb{R}^d, \mu))$, $\mu(x) = \frac{1}{\pi^{d/2}} \prod_{i=1}^{d} e^{-|x_i|^2}\, dx$ es la medida Gaussian en $\mathbb{R}^d$ y ω es un subconjunto no vacío y abierto de $\mathbb{R}^d$.

$$z_t = a(\theta \cdot t) \sum_{i=1}^{d} \left[x_i \frac{\partial^2 z}{\partial x_i^2} + (\alpha_i + 1 - x_i) \frac{\partial z}{\partial x_i} \right] + 1_\omega u(t,x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d_+, \quad \theta \in \Theta, \tag{2.26}$$

donde $u \in L^2(0,\tau; L^2(\mathbb{R}^d_+, \mu_\alpha))$, $\mu_\alpha(x) = \prod_{i=1}^{d} \frac{x_i^{\alpha_i} e^{-x_i}}{\Gamma(\alpha_i+1)}\, dx$ es la medida Gamma en $\mathbb{R}^d_+$ y ω es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^d_+$.

$$z_t = a(\theta \cdot t) \sum_{i=1}^{d} \left[(1 - x_i^2) \frac{\partial^2 z}{\partial x_i^2} + (\beta_i - \alpha_i - (\alpha_i + \beta_i + 2)\, x_i) \frac{\partial z}{\partial x_i} \right] + 1_\omega u(t,x), \quad \theta \in \Theta, \tag{2.27}$$

donde $u \in L^2(0,\tau; L^2([-1,1]^d, \mu_{\alpha,\beta}))$, con $\mu_{\alpha,\beta}(x) = \prod_{i=1}^{d} (1 - x_i)^{\alpha_i} (1 + x_i)^{\beta_i}\, dx$ es la medida de Jacobi en $[-1,1]^d$, $t > 0$, $x \in [-1,1]^d$, y ω es un conjunto no vacío y abierto de $[-1,1]^d$.

La controlabilidad aproximada interior es muy conocida y fascinate tema importante para los sistemas autónomos ([36], [37] y [38]). En particular, en [38], el autor demuestra la controlabilidad aproximada interior del sistema (2.24) con $a(\theta \cdot t) = 1$(caso autónoma) de dos maneras. En el primero método, el utiliza el teorema de Hahn-Banach, integración por partes, la ecuación adjunto correspondiente y estimaciones de Carleman, que dependen del operador Laplaciano Δ. El segundo método es constructivo y utiliza técnicas de variacionales.

El enfoque dado aquí, para demostrar la controlabilidad interior del sistema no autónomo (2.21), es muy corto y puede ser aplicado a las ecuaciones que no envuelvan el operador Laplaciano, como la ecuación Ornstein-Uhlenbeck, la ecuación Laguerre y la ecuación de Jacobi ([3],[4]). Es basado en el Teorema 2.8 y los siguientes resultados:

Ahora, probaremos la controlabilidad interior del sistema no autónomo (2.21).

Teorema 2.16. *Si para un subconjunto no vacío y abierto $\omega \subset \Omega$ las restricciones $\phi^{\omega}_{j,k} = \phi_{j,k}|_{\omega}$ a ω son funciones linealmente independientes en ω, entonces para $\tau > 0$ el sistema (2.21) es aproximadamente controlable en $[0,\tau]$.*

Prueba: Aplicaremos el Teorema 2.8 para probar la controlabilidad aproximada del sistema (2.21). Para esto, observamos que $B_\omega = B^*_\omega$ y asociamos la ecuación lineal con el sistema (2.21)

$$z' = A(\theta \cdot t)z, \quad t \in [0,\tau], \quad \theta \in \Theta \tag{2.28}$$

genera un producto cruzado de semiflujo lineal $\pi : \Theta \times Z \times \mathbb{R}_+ \to \Theta \times Z$ dada por

$$\pi(\theta, z, t) = (\Phi(\theta,t)z, \theta \cdot t), \quad t \geq 0, \tag{2.29}$$

y

$$\Phi(\theta,t)z = S(\Gamma_\theta(t))z, \tag{2.30}$$

donde $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ está dada por (2.23) y

$$\Gamma_\theta(t) = \int_0^t a(\theta \cdot s)ds$$

Supongamos que $B^\star_\omega \Phi^\star(\theta,t)z = 0, \quad \forall t \in [0,\tau]$. Entonces,

$$B^\star_\omega \Phi^\star(\theta,t)z \;=\; \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j \Gamma_\theta(t)} B^\star_\omega E_j z = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j \Gamma_\theta(t)} \sum_{k=1}^{\gamma_j} \langle z, \phi_{j,k}\rangle 1_\omega \phi_{j,k} = 0.$$

Ya que $\Gamma_\theta(t)$ es continua, positiva y $\Gamma_\theta(0) = 0$, obtenemos que $\mathrm{Rang}(\Gamma_\theta) = [0, T_\theta]$ con $T_\theta > 0$. Entonces, haciendo que el cambio de variable $r = \Gamma_\theta(t), \quad t \in [0, \tau]$, resulta que

$$B_\omega^\star \Phi^\star(\theta, t) z \;=\; \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j r} \sum_{k=1}^{\gamma_j} \langle z, \phi_{j,k} \rangle 1_\omega \phi_{j,k} = 0, \quad r \in [0, T_\theta].$$

Por lo tanto, del Lema 1.9, obtenemos

$$\sum_{k=1}^{\gamma_j} \langle z, \phi_{j,k} \rangle \phi_{j,k}(x) = 0, \quad \forall x \in \omega, \quad j = 1, 2, 3, \ldots.$$

Ya que $\phi_{j,k}$ son linealmente independientes en ω, obtenemos que

$$\langle z, \phi_{j,k} \rangle = 0, \quad j = 1, 2, 3, \ldots.$$

Po lo tanto, $E_j z = 0, \quad j = 1, 2, 3, \ldots$, lo cual implica que $z = 0$. Así, el sistema (2.21) es aproximadamente controlable en $[0, \tau]$.

Capítulo 3

Controlabilidad de los Sistemas No Lineales

3.1. Controlabilidad de los Sistemas No Lineales

Consideremos el siguiente sistema evolucionario semilineal no autónomo

$$z' = A(\theta \cdot t)z + B(\theta \cdot t)u(t) + F(\theta \cdot t, z(t), u(t)), \quad t \in [0, \tau] \tag{3.1}$$

donde la función control $u(t)$ pertenece a $L^2(0, \tau; U)$, y $Z = U$ es un espacio de Hilbert. El conjunto Θ es un espacio topológico de Hausdorff y compacto el cual es invariante bajo el flujo $\sigma(\theta, t) = \theta \cdot t$, para todo $\theta \in \Theta$, $t \in [0, \tau]$, $A(\theta)$ es el generador de un operador de evolución fuertemente continuo y compacto $\Phi(\theta, t)$ en Z, con dominio común $D(A(\theta)) = D$, $B(\theta) \in L(U, Z)$ y la función $\theta \longrightarrow B(\theta)z$ es continua en θ para todo z fijo. $L(U, Z)$ es el espacio de Banach de todos los operadores lineales y acotados de U a Z, en particular $L(Z) = L(Z, Z)$.

Las siguientes hipótesis serán usadas:

La función no lineal $F : \Theta \times Z \times U \to Z$ es suficientemente suave y existen constantes $a, b \in \mathbb{R}$, $R > 0$ y $\frac{1}{2} \leq \beta < 1$ tal que

$$\|F(\theta, z, u)\|_Z \leq a\|u\|^\beta + b, \quad \forall u, z \in Z, \theta \in \Theta, \|u\| \geq R. \tag{3.2}$$

Además, supondremos que el sistema lineal

$$z' = A(\theta \cdot t)z(t) + B(\theta \cdot t)u(t), \tag{3.3}$$

es aproximadamente controlable.

Observación 3.1. *La condición (3.2) puede ser reemplazada por la siguiente ecuación más general:*
Existen constantes $a, b, c \in \mathbb{R}$, $R > 0$ y $\frac{1}{2} \leq \beta < 1$ tal que

$$\|F(\theta, z, u) - cz\|_Z \leq a\|u\|^\beta + b, \quad \forall u, z \in Z, \theta \in \Theta, \|u\|, \|z\| \geq R. \tag{3.4}$$

Esto implica que

$$\|F(\theta, z, u)\|_Z \leq a\|u\|^\beta + c\|z\| + b, \quad \forall u, z \in Z, \theta \in \Theta, \|u\|, \|z\| \geq R.$$

Ahora, vamos a describir la estrategia utilizada para abordar este problema de esta sección:
En primer lugar, observamos que la controlabilidad aproximada del sistema lineal (3.3) es equivalente a que el operador de controlabilidad tenga rango denso, lo que nos permite encontrar una inversa aproximada por derecha de dicho operador.

Después, vemos que la controlabilidad aproximada del sistema semilineal (3.1) es equivalente a que el rango del operador de controlabilidad del sistema semilineal sea denso. Por último, la controlabilidad aproximada del sistema (3.1) se sigue de la controlabilidad aproximada de (3.3), la compacidad del operador de evolución $\Phi(\theta, t)$ generado por el operador $A(\theta)$, la acotación uniforme (3.4) del término no lineal F y aplicando el Teorema del punto fijo de Rothe.

3.2. Sistemas Lineales

En esta sección se caracterizamos la controlabilidad aproximada del sistema lineal (3.3). Para esto, notamos que para todo $z_0 \in Z$ arbitrario y $u \in L^2(0, \tau; U)$ el problema de valor inicial

$$\begin{cases} z' = A(\theta \cdot t)z + B(\theta \cdot t)u(t), \, \theta \in \Theta, \; z \in Z, \, t \in [0, \tau], \\ z(0) = z_0, \end{cases} \tag{3.5}$$

admite como única solución moderada la ecuación dada por

$$z(t) = \Phi(\theta, t)z_0 + \int_0^t \Phi(\theta \cdot s, t - s)B(\theta \cdot s)u(s)ds, \;\; t \in [0, \tau]. \tag{3.6}$$

A partir de ahora vamos a utilizar el parámetro $\theta \in \Theta$ solamente cuando sea necesario.

Definición 3.1. *(***Controlabilidad Aproximada***) El sistema (3.3) se dice que es aproximadamente controlable en $[0, \tau]$ si para todo $\theta \in \Theta$ y z_0, $z_1 \in Z$, $\varepsilon > 0$ existe $u \in L^2(0, \tau; U)$ tal que la solución $z(t)$ de (3.6) correspondiente a u verifica:*

$$\|z(\tau) - z_1\| < \varepsilon.$$

Definición 3.2. *Para el sistema (3.3) precisamos las siguientes definiciones: La función de controlabilidad (para $\tau > 0$) $G = G(\theta) : L^2(0,\tau;U) \longrightarrow Z$ está dada por*

$$Gu = \int_0^{\tau} \Phi(\theta \cdot s, \tau - s) B(\theta \cdot s) u(s) ds. \tag{3.7}$$

cuyo operador adjunto $G^* : Z \longrightarrow L^2(0,\tau;Z)$ es

$$(G^* z)(s) = B^*(\theta \cdot s) \Phi^*(\theta \cdot s, t - s) z, \quad \forall s \in [0,\tau], \quad \forall z \in Z, \tag{3.8}$$

como consecuencia del Corolario 2.5.

Lema 3.1. *Si el operador de evolución $\Phi(\theta, t)$ generado por la ecuación (0.7) es compacto para todo $\theta \in \Theta$, $t > 0$, entonces para todo operador $C \in L_\infty(0,\tau; L(U,Z))$, el operador $K : L^2(0,\tau;U) \longrightarrow Z$, dado por*

$$K(u) = \int_0^{\tau} \Phi(\theta \cdot s, \tau - s) C(s) u(s) ds$$

es compacto.

Prueba:

En efecto, para $0 < \delta < \tau$, el operador K puede ser escrito como sigue:

$$K(u) = \int_0^{\tau-\delta} \Phi(\theta \cdot s, \tau - s) C(s) u(s) ds + \int_{\tau-\delta}^{\tau} \Phi(\theta \cdot s, \tau - s) C(s) u(s) ds.$$

Poniendo

$$K_\delta(u) = \int_0^{\tau-\delta} \Phi(\theta \cdot s, \tau - s) C(s) u(s) ds \quad y \quad S_\delta(u) = \int_{\tau-\delta}^{\tau} \Phi(\theta \cdot s, \tau - s) C(s) u(s) ds.$$

obtenemos que:

$$K = K_\delta + S_\delta,$$

Afirmación 1. El operador K es compacto. En efecto,

$$\begin{aligned}
K_\delta(u) &= \int_0^{\tau-\delta} \Phi(\theta \cdot s, \tau - s) C(s) u(s) ds = \int_0^{\tau-\delta} \Phi(\theta \cdot s, \tau - \delta - s + \delta) C(s) u(s) ds \\
&= \int_0^{\tau-\delta} \Phi(\theta \cdot s \cdot (\tau - \delta - s), \delta) \Phi(\theta \cdot s, \tau - \delta - s) C(s) u(s) ds \\
&= \int_0^{\tau-\delta} \Phi(\theta \cdot (\tau - \delta - s + s), \delta) \Phi(\theta \cdot s, \tau - \delta - s) C(s) u(s) ds \\
&= \int_0^{\tau-\delta} \Phi(\theta \cdot (\tau - \delta), \delta) \Phi(\theta \cdot s, \tau - \delta - s) C(s) u(s) ds \\
&= \Phi(\theta \cdot (\tau - \delta), \delta) \int_0^{\tau-\delta} \Phi(\theta \cdot s, \tau - \delta - s) C(s) u(s) ds \\
&= \Phi(\theta \cdot (\tau - \delta), \delta) H_\delta(u).
\end{aligned}$$

donde

$$H_\delta(u) = \int_0^{\tau-\delta} \Phi(\theta \cdot s, \tau-\delta-s)C(s)u(s)ds$$

Ya que $\Phi(\theta\cdot(\tau-\delta),\delta)$ es compacto y el operador H_δ es acotado, entonces K_δ es compacto.

Afirmación 2. Para $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\|S_\delta\| < \epsilon$. En efecto, aplicando la inecuación de Holder resulta que

$$\begin{aligned} \|S_\delta\| &= \| \int_{\tau-\delta}^{\delta} \Phi(\theta\cdot s, \tau-s)C(s)u(s)ds\| \le \int_{\tau-\delta}^{\tau} \|\Phi(\theta\cdot s,\tau-s)\|\,\|C(s)\|\,\|u(s)\|ds \\ &\le M\|C\|_\infty \int_{\tau-\delta}^{\tau}\|u(s)\|ds \le M\|C\|_\infty \delta^{\frac{1}{2}}\|u\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Al tomar

$$\delta^{\frac{1}{2}} \le \frac{\epsilon}{M\,\|C\|_\infty\,\|u\|_{L^2}}$$

obtenemos que

$$\|K-K_{\delta_n}\| = \|S_\delta\| < \epsilon.$$

Así, podemos construir una sucesión $\{\delta_n\}_{n\ge1}$ de tal manera que converja a cero y

$$\|K-K_{\delta_n}\| \le \|S_{\delta_n}\| < \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2\cdots.$$

Por lo tanto, la sucesión de operadores compacto $\{K_{\delta_n}\}$ converge uniformemente a K. Así, podemos aplicar los resultados de la teoría de operadores lineales para obtener que K es compacto.

Corolario 3.2. *El operador $G(\theta)$ es compacto.*

El siguiente lema en general se cumple para operadores lineales y acotados $G: W \to Z$ entre espacios de Hilbert W y Z.

Lema 3.3. *(ver [9], [10], [2] y [23]) La ecuación (3.3) es aproximadamente controlable en $[0,\tau]$ si y sólo si una de las siguientes afirmaciones se cumple:*

a) $\overline{\text{Rang}(G)} = Z$.

b) $Ker(G^\star) = \{0\}$.

c) $\langle GG^\star z, z\rangle > 0$, $z \neq 0$ *in* Z.

d) $\lim_{\alpha\to0^+} \alpha(\alpha I + GG^\star)^{-1}z = 0$.

e) $B^\star(\theta\cdot s)\Phi^\star(\theta\cdot s, t-s)z = 0, \forall\theta\in\Theta, \quad \forall t\in[0,\tau], \quad \Rightarrow z = 0.$

f) Para todo $z \in Z$ tenemos que $Gu_\alpha = z - \alpha(\alpha I + GG^\star)^{-1}z$, donde

$$u_\alpha = G^\star(\alpha I + GG^\star)^{-1}z, \quad \alpha \in (0,1].$$

Así, $\lim_{\alpha\to 0} Gu_\alpha = z$ y el error $E_\alpha z$ de esta aproximación, está dada por la fórmula

$$E_\alpha z = \alpha(\alpha I + GG^\star)^{-1}z, \quad \alpha \in (0,1].$$

Observación 3.2. *El Lema 3.3 implica que la familia de operadores lineales $\Gamma_\alpha : Z \to L^2(0,\tau;U)$, definido para $0 < \alpha \leq 1$ por*

$$\Gamma_\alpha z = B^\star(\theta\cdot s)\Phi^\star(\theta\cdot s, \tau - s)(\alpha I + GG^\star)^{-1}z = G^\star(\alpha I + GG^\star)^{-1}z,$$

es una inversa aproximada por la derecha del operador G, en el sentido que

$$\lim_{\alpha\to 0} G\Gamma_\alpha = I,$$

en la topología fuerte.

Proposición 3.4. *Si el $\overline{\mathrm{Rang}(G)} = Z$, entonces*

$$\sup_{\alpha>0} \|\alpha(\alpha I + GG^\star)^{-1}\| \leq 1. \tag{3.9}$$

3.3. Controlabilidad de los Sistemas No Lineales

En esta sección probaremos el resultado principal de nuestra investigación, la controlabilidad aproximada del sistema semilineal de variación del tiempo (3.1). Es decir, para todo $z_0 \in Z$ y $u \in L^2(0,\tau;U)$ el problema de valor inicial

$$\begin{cases} z' = A(\theta\cdot t)z + B(\theta\cdot t)u(t) + F(\theta\cdot t, z, u(t)), \\ z(0) = z_0 \end{cases} \tag{3.10}$$

donde $t \in [0,\tau]$ and $z \in Z$, admite como única solución moderada la ecuación dada por

$$\begin{aligned} z_u(t) &= \Phi(\theta\cdot s, t-s)z_0 + \int_0^t \Phi(\theta\cdot s, t-s)B(\theta\cdot s)u(s)ds \\ &+ \int_0^t \Phi(\theta\cdot s, t-s)F(\theta\cdot s, z_u(s), u(s))ds, \ t\in[0,\tau]. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Definición 3.3. *(**Controlabilidad Aproximada**) El sistema (3.1) se dice que aproximadamente controlable en $[0,\tau]$ si para cada $\theta \in \Theta$ y z_0, $z_1 \in Z$, $\varepsilon > 0$ existe $u \in L^2(0,\tau;U)$ tal que la solución $z(t)$ de (3.11) correspondiente a u verifica:*

$$\|z(\tau) - z_1\| < \varepsilon.$$

Definición 3.4. *Para el sistema (3.1) definimos el siguiente concepto: La función de controlabilidad no lineal (para $\tau > 0$)* $G_F = G_F(\theta) : L^2(0,\tau;U) \longrightarrow Z$ *está dada por*

$$\begin{aligned} G_F u &= \int_0^\tau \Phi(\theta\cdot s, t-s)B(\theta\cdot s)u(s)ds \\ &+ \int_0^\tau \Phi(\theta\cdot s, t-s)F(\theta\cdot s, z_u(s), u(s))ds \\ &= G(u) + H(u), \end{aligned} \tag{3.12}$$

donde $H = H(\theta) : L^2(0,\tau;U) \longrightarrow Z$ *es el operador no lineal dado por*

$$H(u) = \int_0^\tau \Phi(\theta\cdot s, t-s)F(\theta\cdot s, z_u(s), u(s))ds, \quad u \in L^2(0,\tau;U) \tag{3.13}$$

El siguiente Lema es inmediato del Lema 3.3.

Observación 3.3. *Sin perder generalidad, supondremos que z_0 está fijo.*

Lema 3.5. *La ecuación (3.1) es aproximadamente controlable en $[0,\tau]$ si y sólo si* $\overline{\mathrm{Rang}(G_F)} = Z$.

Definición 3.5. *La siguiente ecuación se llama la ecuación de controlabilidad asociadas a la ecuación no lineal (3.1)*

$$u_\alpha = \Gamma_\alpha(z - H(u_\alpha)) = G^\star(\alpha I + GG^\star)^{-1}(z - H(u_\alpha)), \quad (0 < \alpha \leq 1). \tag{3.14}$$

Teorema 3.6. *El sistema (3.1) es aproximadamente controlable en $[0,\tau]$. Más aún, una sucesión de controles que lleva el sistema (3.1) del dato inicial z_0 a una ϵ vecindad del dato final z_1 en un tiempo $\tau > 0$ está dada por*

$$u_\alpha(t) = B^\star(\theta\cdot s)\Phi^\star(\theta\cdot s, \tau - s)(\alpha I + GG^\star)^{-1}(z_1 - \Phi(\theta,\tau)z_0 - H(u_\alpha)),$$

y el error de esta aproximación E_α, está dada por

$$E_\alpha = \alpha(\alpha I + GG^\star)^{-1}(z_1 - \Phi(\theta,\tau)z_0 - H(u_\alpha)).$$

Prueba: Para cada $\theta \in \Theta$ y $z \in Z$ fijo, consideremos la siguiente familia de operadores no lineales $K_\alpha : L^2(0,\tau;U) \to L^2(0,\tau;U)$ dados por

$$K_\alpha(u) = \Gamma_\alpha(z - H(u)) = G^\star(\alpha I + GG^\star)^{-1}(z - H(u)), \quad (0 < \alpha \leq 1). \tag{3.15}$$

Primero, probaremos que para todo $\alpha \in (0,1]$ el operador K_α tiene un punto fijo u_α. En efecto, como F es suave y satisface (3.4) y el operador evolución $\Phi(\theta,t)$ dado por (2.2) es compacto, entonces usando la idea de la prueba de la Lema 3.1 y la inecuación (3.4), probamos que el operador H es compacto. Más aún,

$$\overline{\text{lím}}_{\|u\|_{L^2}\to\infty}\frac{\|K_\alpha(u)\|_{L^2}}{\|u\|_{L^2}}=0. \tag{3.16}$$

En efecto, de la definición del operador $H(u)$, Proposición 1.1 y 1.8 tenemos que, para $u\in L^2(0,\tau;U)$, la siguiente estimación

$$\begin{aligned}
\|H(u)\| &\leq \int_0^\tau Me^{\omega(\tau-s)}\|F(s,z_u(s),u(s))\|ds,\\
&\leq \left(\int_0^\tau M^2e^{2\omega(\tau-s)}ds\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^\tau \|F(s,z_u(s),u(s))\|^2ds\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= N\left(\int_0^\tau \|F(s,z_u(s),u(s))\|^2ds\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq N\left(\int_0^\tau \left(a\|u(s)\|^\beta+b\right)^2ds\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq N\left(\int_0^\tau (4a^2\|u(s)\|^{2\beta}+4b^2)ds\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq 2Na\left(\int_0^\tau \|u(s)\|^{2\beta}\right)^{\frac{1}{2}}+2b\sqrt{\tau}\\
&\leq 2Na\left\{\left(\int_0^\tau \|u(s)\|^{2\beta}\right)^{\frac{1}{2\beta}}\right\}^\beta+2b\sqrt{\tau}\\
&= 2aN\|u\|^\beta_{L^{2\beta}}+2b\sqrt{\tau}.
\end{aligned}$$

Ahora, como $\frac{1}{2}\leq\beta<1\Leftrightarrow 1\leq 2\beta<2$, aplicando la Proposición 1.8 obtenemos que :

$$\|H(u)\|\leq 2aN\tau^{\frac{1-\beta}{2}}\|u\|^\beta_{L^2}+2b\sqrt{\tau}.$$

Por lo tanto,

$$\overline{\text{lím}}_{\|u\|_{L^2}\to\infty}\frac{\|H(u)\|_{L^2}}{\|u\|_{L^2}}=0.$$

Consecuentemente,

$$\overline{\text{lím}}_{\|u\|_{L^2}\to\infty}\frac{\|K_\alpha(u)\|}{\|u\|_{L^2}}=0.$$

Entonces, de la condición (3.16) obtenemos que, para ρ fijo, $0<\rho<1$, existe R_α tal que

$$\|K_\alpha(u)\|_{L^2}\leq\rho\|u\|_{L^2},\quad \|u\|_{L^2}=R_\alpha.$$

Por lo tanto, si denotamos por $B(0,R_\alpha)$ la bola de centro cero y radio $R_\alpha>0$, resulta que $K_\alpha(\partial B(0,R_\alpha))\subset B(0,R_\alpha)$. Como K_α es compacto y manda la esfera of $\partial B(0,R_\alpha)$ en el interior de la bola $B(0, R_\alpha)$, podemos aplicar el Teorema de punto fijo de Rothe (Teorema 1.10) to ensure the existence of a control $u_\alpha \in L_2(0, \tau; U)$ tal que

$$u_\alpha = K_\alpha u_\alpha = \Gamma_\alpha(z - H(u_\alpha)) = G^\star(\alpha I + GG^\star)^{-1}(z - H(u_\alpha)), \quad (0 < \alpha \leq 1).$$

Afirmación. La familia de puntos fijos $\{u_\alpha\}_{0<\alpha\leq 1}$ es acotada.
En efecto, con el proposito de llegar a una contradicción, supongamos lo contrario. Entonces, existe una subsucesión $\{u_{\alpha_n}\}_{n\geq 1} \subset \{u_\alpha\}_{0<\alpha\leq 1}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|u_{\alpha_n}\|_{L^2} = \infty.$$

Por otro lado, tenemos que $u_{\alpha_n} = K_\alpha u_{\alpha_n}$. Así,

$$\|u_{\alpha_n}\|_{L^2} = \|K_\alpha u_{\alpha_n}\|_{L^2} \iff \frac{\|K_\alpha(u_{\alpha_n})\|_{L^2}}{\|u_{\alpha_n}\|_{L^2}} = 1.$$

Por lo tanto,

$$\overline{\lim}_{\|u_{\alpha_n}\|_{L^2}\to\infty} \frac{\|K_\alpha(u_{\alpha_n})\|_{L^2}}{\|u_{\alpha_n}\|_{L^2}} = 1,$$

que es evidentemente una contradicción. Entonces, la afirmación es verdadera y existe $\gamma > 0$ tal que

$$\|u_{\alpha_n}\|_{L^2} \leq \gamma, \quad (0 < \alpha \leq 1).$$

Por lo tanto, sin perder generalidad, podemos suponer que la sucesión $H(u_\alpha)$ converge a $y \in Z$. Así, si

$$u_\alpha = \Gamma_\alpha(z - H(u)) = G^\star(\alpha I + GG^\star)^{-1}(z - H(u_\alpha)).$$

Entonces,

$$\begin{aligned} Gu_\alpha &= G\Gamma_\alpha(z - H(u)) = GG^\star(\alpha I + GG^\star)^{-1}(z - H(u_\alpha)) \\ &= (\alpha I + GG^\star - \alpha I)(\alpha I + GG^\star)^{-1}(z - H(u_\alpha)) \\ &= z - H(u_\alpha) - \alpha(\alpha I + GG^\star)^{-1}(z - H(u_\alpha)) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$Gu_\alpha + H(u_\alpha) = z - \alpha(\alpha I + GG^\star)^{-1}(z - H(u_\alpha)).$$

Para finalizar la prueba de este teorema, es suficiente demostrar que

$$\lim_{\alpha\to 0}\{-\alpha(\alpha I + GG^\star)^{-1}(z - H(u_\alpha))\} = 0.$$

Del Lema 3.3.d) obtenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha\to 0}\{-\alpha(\alpha I + GG^\star)^{-1}(z - H(u_\alpha))\} &= -\lim_{\alpha\to 0}\{-\alpha(\alpha I + GG^\star)^{-1}H(u_\alpha)\} \\ = -\lim_{\alpha\to 0} -\alpha(\alpha I + GG^\star)^{-1}y &- \lim_{\alpha\to 0} -\alpha(\alpha I + GG^\star)^{-1}(H(u_\alpha) - y) \\ &= \lim_{\alpha\to 0} -\alpha(\alpha I + GG^\star)^{-1}(H(u_\alpha) - y). \end{aligned}$$

Por otro lado, de la Proposición 3.4, tenemos que

$$\|\alpha(\alpha I + GG^\star)^{-1}(H(u_\alpha) - y)\| \leq \|(H(u_\alpha) - y)\|.$$

Por lo tanto, ya que $H(u_\alpha)$ converge a y, se sigue que

$$\lim_{\alpha \to 0}\{-\alpha(\alpha I + GG^\star)^{-1}(H(u_\alpha) - y)\} = 0.$$

Consecuentemente,

$$\lim_{\alpha \to 0}\{-\alpha(\alpha I + GG^\star)^{-1}(z - H(u_\alpha))\} = 0$$

Así, poniendo $z = z_1 - \Phi(\theta, \tau)z_0$ y usando (3.11),obtenemos el resultado deseado:

$$\begin{aligned} z_1 &= \lim_{\alpha \to 0^+}\{\Phi(\theta, \tau)z_0 + \int_0^\tau \Phi(\theta \cdot s, \tau - s)B(\theta \cdot s)u_\alpha(s)ds \\ &+ \int_0^\tau \Phi(\theta \cdot s, \tau - s)F(\theta \cdot s, z_{u_\alpha}(s), u_\alpha(s))ds\}. \end{aligned}$$

3.4. Aplicaciones.

En esta sección usamos los resultados para demostrar la controlabilidad aproximada interior de la siguiente amplia clase de la ecuación de reacción-difusión no autónomos en el espacio de Hilbert $Z = L^2(\Omega)$ dada por

$$\begin{cases} z' = A(\theta \cdot t)z + B(\theta \cdot t)u(t) + F(\theta \cdot t, z, u(t)), & t \in [0, \tau], \quad \theta \in \Theta \\ z(0) = z_0 \end{cases} \tag{3.17}$$

donde el control $u \in L^2(0, \tau; L^2(\Omega))$, con $U = Z$, Θ es un espacio de Hausdorff y compacto, $A(\theta \cdot t) = -a(\theta \cdot t)A$ con $a : \Theta \to \mathbb{R}^+$ una función continua, el operador $B : Z \to Z$ es lineal y acotada, y $A : D(A) \subset Z \to Z$ es un operador lineal no acotado con la siguiente descomposición espectral:

$$Az = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \sum_{k=1}^{\gamma_j} \langle z, \phi_{j,k} \rangle \phi_{j,k} = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j E_j z, \tag{3.18}$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto interno en Z, y

$$E_j z = \sum_{k=1}^{\gamma_j} \langle z, \phi_{j,k} \rangle \phi_{j,k}.$$

Los valores propios $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_j < \cdots \lambda_n \to \infty$ de A tiene multiplicidad finita γ_j igual a la dimensión del espacio propio correspondiente, y $\{\phi_{j,k}\}$ es un conjunto

ortonormal completo de vectores propios de A. Así, $\{E_j\}$ es una familia completa de proyectores ortogonales en Z y $z = \sum_{j=1}^{\infty} E_j z$, $z \in Z$.
La función no lineal $F : \Theta \times Z \times U \to Z$ es suficientemente pequeña y existen constantes $a, b \in \mathbb{R}, R > 0$ y $\frac{1}{2} \leq \beta < 1$ tal que

$$\|F(\theta, z, u)\|_Z \leq a\|u\|^{\beta} + b, \quad \forall u, z \in Z, \theta \in \Theta, \|u\| \geq R. \tag{3.19}$$

El operador $-A(\theta \cdot t)$ genera un operador de evolución compacto $\Phi(\theta, t)$ dado por

$$\Phi(\theta, t)z = T(g_\theta(t))z = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j g_\theta(t)} E_j z, \tag{3.20}$$

donde $g_\theta(t) = \int_0^t a(\theta \cdot s)ds > 0, t \neq 0$.

Teorema 3.7. *Si los vectores $B^\star(\theta \cdot t)\phi_{j,k}$ son linealmente independientes en Z, el sistema (3.17) es aproximadamente controlable en $[0, \tau]$. Más aún, una sucesión de controles que llevan al sistema (3.17) del estado inicial z_0 a una ϵ vecindad del estado final z_1 en un tiempo $\tau > 0$ dado por*

$$u_\alpha(t) = B^\star(\theta \cdot t)\Phi^\star(\theta \cdot t, \tau - t)(\alpha I + GG^\star)^{-1}(z_1 - \Phi(\theta, \tau)z_0 - H(u_\alpha)),$$

y el error de la aproximación E_α, está dado por

$$E_\alpha = \alpha(\alpha I + GG^\star)^{-1}(z_1 - \Phi(\theta, \tau)z_0 - H(u_\alpha)),$$

donde

$$H(u) = \int_0^\tau \Phi(\theta \cdot s, \tau - s)F(\theta \cdot s, z_u(s), u(s))ds, \quad u \in L^2(0, \tau; U).$$

Prueba: Es suficiente probar que la parte lineal del sistema (3.17)

$$\begin{cases} z' = A(\theta \cdot t)z + B(\theta \cdot t)u(t), & t \in [0, \tau], \quad \theta \in \Theta \\ z(0) = z_0 \end{cases} \tag{3.21}$$

es aproximadamente controlable en $[0, \tau]$. Es decir, aplicando el Lema 3.3.e); observamos que

$$\Phi^\star(\theta, t)z = T^\star(g_\theta(t))z = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j g_\theta(t)} E_j z,$$

donde $g_\theta(t) = \int_0^t a(\theta \cdot s)ds \neq 0$. Entonces,

$$\begin{aligned} B^\star(\theta \cdot t)\Phi^\star(\theta, t)z &= B^\star(\theta \cdot t)\sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j g_\theta(t)} E_j z \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j g_\theta(t)} B^\star(\theta \cdot t)E_j z = 0, \quad \forall\, t \in [0, \tau]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, del Lema 1.9 obtenemos que

$$B^\star(\theta \cdot t)E_j z = \sum_{k=1}^{\gamma_j} < z, \phi_{j,k} > B^\star(\theta \cdot t)\phi_{j,k} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots.$$

Como por hipótesis, el conjunto de todos los vectores $B^*(\theta \cdot t)\phi_{j,k}$ son linealmente independientes, obtenemos que

$$< z, \phi_{j,k} >= 0 \quad j = 1, 2, \ldots. \quad \text{and} \quad k = 1, 2, \ldots \gamma_j.$$

Así, $E_j z = 0, \quad j = 1, 2, \ldots$, lo cual implica que $z = 0$.
Por lo tanto, el sistema (3.21) es aproximadamente controlable en $[0, \tau]$.

Ejemplo 3.1. Controlabilidad Interior de la Ecuación del Calor n-Dimensional en Variación del Tiempo.
En este caso, como un ejemplo, probaremos la controlabilidad aproximada interior de la ecuación del calor semilineal de variación del tiempo.

$$\begin{cases} z_t(t,x) = e(\theta \cdot t)\Delta z(t,x) + 1_\omega u(t,x) + f(t, z, u(t,x)) & en \quad (0,\tau] \times \Omega, \\ z = 0, & en \quad (0,\tau) \times \partial\Omega, \\ z(0,x) = z_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{3.22}$$

donde Ω es un dominio acotado en $\mathbb{R}^N(N \geq 1)$, $z_0 \in L^2(\Omega)$, ω es un subconjunto no vacío y abierto de Ω, 1_ω denota la función característica del conjunto ω, la función control distribución u pertenece a $L^2([0,\tau]; L^2(\Omega;))$, con $e : \Theta \to \mathbb{R}^+$ y la función no lineal $f : [0,\tau] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suficientemente suave y existen constantes $a, b \in \mathbb{R}, R > 0$ y $\frac{1}{2} \leq \beta < 1$ tal que

$$|f(\theta, z, u)| \leq a|u|^\beta + b, \quad \forall u, z \in \mathbb{R}, \theta \in \Theta, |u| \geq R, \tag{3.23}$$

en este caso, $B(\theta \cdot t)f = 1_\omega f$.

Describiremos el espacio en el cual el problema será formulado como una ecuación diferencial ordinaria abstracta. Consideremos el espacio $Z = L^2(\Omega)$ y el operador lineal no acotado $A : D(A) \subset Z \to Z$ definido por $A(\theta \cdot t)\phi = -a(\theta \cdot t)\Delta\phi$, donde

$$D(A) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega). \tag{3.24}$$

El operador A tiene las siguientes propiedades bien conocidas: el espectro de A consiste de solo valores propios

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_j \to \infty,$$

cada uno con multiplicidad γ_j igual a la dimensión del espacio propio correspondiente.
a) Existe un conjunto ortonormal completo $\{\phi_{j,k}\}$ de vectores propios de A.

b) Para todo $z \in D(A)$ tenemos que

$$-\Delta z = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \sum_{k=1}^{\gamma_j} < z, \phi_{j,k} > \phi_{j,k} = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j E_j z, \tag{3.25}$$

donde $< \cdot, \cdot >$ es el producto interno en Z y

$$E_n z = \sum_{k=1}^{\gamma_j} < z, \phi_{j,k} > \phi_{j,k}. \tag{3.26}$$

Así, $\{E_j\}$ es una familia de proyectores ortogonales completo en Z y

$$z = \sum_{j=1}^{\infty} E_j z, \quad z \in Z. \tag{3.27}$$

c) $-a(\theta)\Delta$ genera un operador de evolución compacto $\Phi(\theta \cdot t)$ dado por

$$\Phi(\theta \cdot t)z = T(g_\theta(t))z = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j g_\theta(t)} E_j z,$$

donde $g_\theta(t) = \int_0^t a(\theta \cdot s)ds \neq 0$.

El sistema (3.22) puede escribirse como una ecuación abstracta en el espacio $Z = L^2(\Omega)$

$$\begin{cases} z' = -A(\theta \cdot t)z + B(\theta \cdot t)u(t) + F(t, z, u), z \in Z, \\ z(0) = z_0 \end{cases} \tag{3.28}$$

donde la función control u pertenece a $L^2(0, \tau; Z)$ y $F : [0, \tau] \times Z \times U \to Z$, está definida por $F(t, z, u)(x) = f(t, z(x), u(x)), \quad \forall x \in \Omega$.

Proposición 3.8. *Los vectores $B^\star(\theta \cdot t)\phi_{j,k} = 1_\omega \phi_{j,k}$ son linealmente independientes en Z.*

Prueba:

Consideremos cualquier combinación lineal de la forma:

$$\sum_{k=1}^{\gamma_j} a_{j,k} B^\star(\theta \cdot t)\phi_{j,k}(z) = \sum_{k=1}^{\gamma_j} a_{j,k} 1_\omega \phi_{j,k}(z) = 0, \quad \forall z \in \Omega.$$

Por lo tanto,

$$\sum_{k=1}^{\gamma_j} a_{j,k} 1_\omega \phi_{j,k}(z) = \sum_{k=1}^{\gamma_j} a_{j,k} \phi_{j,k}(z) = 0, \quad \forall z \in \omega.$$

Ahora, haciendo $f(z) = \sum_{k=1}^{\gamma_j} a_{j,k}\phi_{j,k}(z), \quad \forall z \in \Omega$, obtenemos que

$$\begin{cases} (\Delta + \lambda_j I)f \equiv 0 \quad \text{en} \quad \Omega, \\ f(z) = 0 \quad \forall z \in \omega. \end{cases}$$

Entonces, del principio de continuación única para ecuaciones Elíptica (ver [27]), se sigue que $f(z) = 0, \quad \forall z \in \Omega$. Así,

$$\sum_{k=1}^{\gamma_j} a_{j,k}\phi_{j,k}(z) = 0, \quad \forall z \in \Omega.$$

Por otro lado, $\{\phi_{j,k}\}$ es un conjunto ortonormal completo en $Z = L^2(\Omega)$, lo cual implica que $a_{j,k} = 0$.

Proposición 3.9. *Bajo la condiciones (3.23) la función $F : [0,\tau] \times Z \times U \to Z$ definida por $F(t,z,u)(x) = f(t,z(x),u(x)), \quad \forall x \in \Omega$, satisface que $\forall u, z \in Z = L^2(\Omega), \theta \in \Theta$:*

$$\|F(\theta,z,u)\|_Z \leq 2a\mu(\Omega)^{\frac{1-\beta}{2}}\|u\|_Z^\beta + 2b\sqrt{\mu(\Omega)}, \quad \|u\|_Z \geq R\sqrt{\mu(\Omega)}, \tag{3.29}$$

Prueba:

$$\begin{aligned}
\|F(\theta,z,u)\|_Z &= \left(\int_\Omega |f(\theta,z(x),u(x))|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\int_\Omega \left(a|u(x)|^\beta + b\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\int_\Omega (4a^2\|u(x)\|^{2\beta} + 4b^2)dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq 2a\left\{\left(\int_\Omega \|u(x)\|^{2\beta}\right)^{\frac{1}{2\beta}}\right\}^\beta + 2b\sqrt{\mu(\Omega)} \\
&= 2a\|u\|_{L^{2\beta}(\Omega)}^\beta + 2b\sqrt{\mu(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Ahora, como $\frac{1}{2} \leq \beta < 1 \Leftrightarrow 1 \leq 2\beta < 2$, aplicando la Proposición 1.8, obtenemos que:

$$\|F(\theta,z,u)\|_Z \leq 2a\mu(\Omega)^{\frac{1-\beta}{2}}\|u\|_Z^\beta + 2b\sqrt{\mu(\Omega)}, \quad \|u\|_Z \geq R\sqrt{\mu(\Omega)}.$$

Usando la compacidad del operador de evolución $\Phi(\theta \cdot t)z = T(g_\theta(t))z = \sum_{j=1}^\infty e^{-\lambda_j g_\theta(t)}E_j z$ generado por $-a(\theta)\Delta$, donde $g_\theta(t) = \int_0^t a(\theta \cdot s)ds > 0$, y de las dos Proposiciones anteriores, podemos probar que la ecuación del calor semilineal (3.22) es aproximadamente controlable en $[0,\tau]$:

Teorema 3.10. *El sistema (3.22) es aproximadamente controlable en $[0,\tau]$. Más aún, una sucesión de controles que llevan al sistema (3.22) de un estado inicial z_0 a una ϵ vecindad del estado final z_1 en un tiempo $\tau > 0$ es dada por*

$$u_\alpha(t) = 1_\omega T(g_\theta(\tau - t))(\alpha I + GG^*)^{-1}(z_1 - T(g_\theta(t))z_0 - H(u_\alpha)),$$

y el error de esta aproximación E_α *esta dada por*

$$E_\alpha = \alpha(\alpha I + GG^\star)^{-1}(z_1 - T(g_\theta(\tau))z_0 - H(u_\alpha)),$$

donde

$$H(u) = \int_0^\tau T(g_\theta(\tau - t))F(\theta \cdot s, z_u(s), u(s))ds, \quad u \in L^2(0, \tau; U)$$

Conclusiones

El objetivo central de este trabajo es estudiar la teoría de **Producto Cruzado de Flujos**, los cuales son **Operadores de Evolución** que aparecen de manera natural cuando se estudian sistemas de ecuaciones diferenciales no autónomo, y es una forma de asociarles un sistema dinámico a estas ecuaciones.

Resolvimos la controlabilidad de sistemas de control gobernados por ecuaciones de evolución no autónomos, a los cuales se le puede asociar un sistema dinámico, usando las técnicas de Producto Cruzado de Semiflujos en espacio de dimensión infinita.

Con esta técnica, estudiamos la controlabilidad exacta y la controlabilidad aproximada de ecuaciones de evolución en espacios de Banach, en particular en espacios de Hilbert, cuya dinámica viene dada a través de un producto cruzado de semiflujos y son aplicada a sistemas lineales no autónomo gobernado por ecuaciones en derivadas parciales.

Estudiamos la controlabilidad de la siguiente clase de ecuaciones evolución no autónomas

$$z' = A(\theta \cdot t)z(t) + B(\theta \cdot t)u(t), \quad t \geq 0, \quad \theta \in \Theta, \quad z(t) \in Z,$$

lo cual se hace gracias al Teorema 2.4 y Corolario 2.5, que nos permite obtener la continuidad fuerte del operador adjunto $\Phi(t, \theta)$ y así poder calcular explícitamente el adjunto del correspondiente operador de controlabilidad G_θ y así W_θ, llamado Grammian, que nos permite dar condiciones necesarias y suficientes para la controlabilidad exacta y aproximada del sistema no autónomo (0.5). Estos resultados son probados en esta investigación y publicado en [6].

Por último estudiamos la controlabilidad aproximada del siguiente sistema evolucionario semilineal no autónomo

$$z' = A(\theta \cdot t)z + B(\theta \cdot t)u(t) + F(\theta \cdot t, z(t), u(t)), \quad t \in [0, \tau]$$

donde lo hacemos acotando la función no lineal F de la siguiente forma

$$\|F(\theta, z, u)\|_Z \leq a\|u\|^\beta + b, \quad \forall u, z \in Z, \theta \in \Theta, \|u\| \geq R,$$

y usando la controlabilidad aproximada del sistema lineal

$$z' = A(\theta \cdot t)z(t) + B(\theta \cdot t)u(t).$$

Si la función no lineal F, tiene una acotación de la siguiente manera

$$\|F(\theta, z, u)\|_Z \leq a\|z\| + b\|u\|^{\beta} + c,$$

el sistema semilineal no es aproximadamente controlable, quedando como problema abierto.

Estos resultado son aplicado a la ecuación reacción-difusión no autónomos en el espacio de Hilbert $Z = L^2(\Omega)$.

Bibliografía

[1] J. ARIAS De REYNA, J. DIESTEL, V. LOMONOSOV AND L. RODRIGUEZ PIAZZA, Some observations about the space of weakly continuous functions from a compact space into a Banach space, (1994), Quaest. Math., pp. 415-425.

[2] J. APPELL, H. LEIVA, N. MERENTES ANDA A. VIGNOLI, *Un espectro de compresión no lineal con aplicaciones a la controlabilidad aproximada de sistemas semilineales*, preprint

[3] D. BARCENAS, H. LEIVA AND W. URBINA, *Controllability of the Ornstein-Uhlenbeck Equation.* IMA J. Math. Control Inform. **23** no. 1, (2006), 1–9.

[4] D. BARCENAS, H. LEIVA, Y. QUINTANA AND W. URBINA, *Controllability of Laguerre and Jacobi Equations.* International Journal of Control, Vol. 80, No. 8, August 2007, 1307-1315.

[5] D. BARCENAS AND J. DIESTEL, "Constrained controllability in non-reflexive Banach spaces", Quaestiones Math., 18(1995)185-198.

[6] D. BARCENAS, S. N. CHOW, H. LEIVA AND A. TINEO MOYA, "Skew-product semi-flows and non-autonomous control systems", J. Math. Anal. Appl. 381 (2011) 247-262.

[7] S. N. CHOW AND H. LEIVA, Dynamical spectrum for time dependent linear systems in Banach spaces, JJIAM, Appl. Math., 11 (1994), pp 379-415

[8] S. N. CHOW AND H. LEIVA, Existence and roughness of the exponential dichotomy for linear skew - product semiflows in Banach space, J. Differential Equations 120 (1995) 429 - 477.

[9] R. F. CURTAIN AND A. J. PRITCHARD "Infinite dimensional linear systems", Lecture Notes in control and information science, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg(1978).

[10] R.F. CURTAIN, H.J. ZWART, *An Introduction to Infinite Dimensional Linear Systems Theory.* Text in Applied Mathematics, **21**. Springer Verlag, New York (1995).

[11] J. P. DAUR AND N. I. MAHMUDOV, "Approximate Controllability of Some Semilinear Functional Equations in Hilbert Sapces", J.Math. Anal. 273 (2002). N°. 2, 310-327.

[12] J. P. DAUR AND N. I. MAHMUDOV, "Controllability of Some Non Linear Systems in Hilbert Sapces", J.Optim.Theory Appl. 123 (2004). N°. 2, 319-329.

[13] J. DIESTEL, "Geometry of Banach Spaces"LNM, 485, Springer Verlag, New York (1975)

[14] J. DIESTEL AND J. J. UHL, "Vector Measures", A.M.S. Survey N0 15, Providence, R.I.(1977).

[15] E. FERNANDEZ-CARA, " Remark on Approximate and Null Controllability of Semilinear Parabolic Equations" ESAIM:Proceeding OF CONTROLE ET EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES, Vol.4, 1998, 73-81.

[16] E. FERNANDEZ-CARA AND E. ZUAZUA,"Controllability for Blowing up Semilinear Parabolic Equations", C.R. Acad. Sci. Paris, t. 330, serie I, p. 199-204, 2000.

[17] D. HINRICHSEN AND A. J. PRITCHARD, Robust Stability of Linear Evolution operators on Banach Spaces, report Nr.269(1992), Institut f *ür* Dynamische Systeme F.M.I Universit *üt* Bremen, Germany

[18] G. ISAC, "On Rothe's Fixed Point Theorem in General Topological Vector Space", An. St. Univ. Ovidius Constanta, Vol. 12(2), 2004, 127-134.

[19] R. JOHNSON AND M. NERURKAR, On null Controllability of Linear Systems with Recurrent coefficients and constrained Controls, to appear in the Journal of Dynamics and Differential Equations (1992).

[20] V. I. KOROBOV AND R. RABAKH, Exact Controllabity in Banach Spaces, A.M. Gorki Kharkov State University. Translated from Differentsial'nye Uravheniya, Vol. !5 N012, pp. 2142-2150, December (1979).

[21] H. LEIVA, N. MERENTE AND J. L. SANCHEZ, " Approximate Controllability of Semilinear Reaction Diffusion Equations". Mathematical Control and Related Fields, Vol 2, N° 2, June 2012, pp 171-182

[22] H. LEIVA, N. MERENTE, J. L. SANCHEZ AND A. TINEO MOYA, "Approximate Controllability of Semilinear Non-Autonomous Systems in Hilbert Spaces". To Appear in Advances in Dynamical Systems and Applications.

[23] H. LEIVA AND Y. QUINTANA, "Interior Controllability of a Broad Class of Reaction Diffusion Equations", Mathematical Problems in Engineering, Vol. 2009, Article ID 708516, 8 pages, doi:10.1155/2009/708516.

[24] L. M. *MAGALHÃES* (1987), "The sprectrum of invariant sets for dissipative semiflows in dynamics of infinite dimensional systems", NATO ASI series, N°.F-37, Springer Verlag, New York.

[25] NAZIM I. MAHMUDOV., Approximate Controllability Deterministic of Semilinear Deterministic and Stochastic Evolution Equations in Abstract Spaces, SIAM J. Control Optim. 42 (5), 1604-1622. Evolution Equations in Abstract Spaces, SIAM J. Control Optim., 42 (5), 1604-1622, (19 pages)

[26] A. PAZY, "Semigroups of linear operators with application to partial differential equations", Springer Verlag, Berlin, New York(1983).

[27] M. H. PROTTER, "Unique continuation for elliptic equations. Transaction of the American Mathematical Society, Vol. 95, Nž 1, Apr., 1960

[28] K. NAITO, Controllability of semilinear control systems dominated by the linear part. SIAM J. CONTROL OPTIM. Vol 25 , 3 (1987).

[29] K. NAITO, Approximate controllability for trajectories of semilinear control systems. J. of Optimization Theory and Appl., Vol. 60 , 1(1989)

[30] R. J. SACKER AND G. R. SELL., A spectral Theory for Linear Differential Systems, Journal of Differential Equations, 27, pp. 320-358 (1978).

[31] R. J. SACKER AND G. R. SELL., Dichotomies for Linear Evolutionary Equations in Banach Spaces, Journal of Differential Equations, 113, 17-67 (1994).

[32] A. L. SASU, Stability and Controllability for System of Difference Equations, J. Differ. Equations Appl.12(2006),821-826.

[33] A. L. SASU, On Exact Controllability of Variational Discrete Systems, to appear in Applied Mathematical Letters.

[34] L. DE TERESA, Approximate Controllability of Semilinear Heat Equation in $\mathbb{R}^N$. SIAM J. CONTROL OPTIM. Vol. 36, No. 6, pp. 2128-2147 (1998)

[35] L. DE TERESA AND E. ZUAZUA, Approximate Controllability of Semilinear Heat Equation in Unbounded Domians. Nonlinear Anal. 8 (1999).

[36] XU ZHANG, *A Remark on Null Exact Controllability of the Heat Equation.* IAM J. CONTROL OPTIM. Vol. 40, No. 1(2001), pp. 39-53.

[37] E. ZUAZUA, *Controllability of a System of Linear Thermoelasticity*, J. Math. Pures Appl., **74**, (1995), 291-315.

[38] E. ZUAZUA, *Control of Partial Differential Equations and its Semi-Discrete Approximation.* Discrete and Continuous Dynamical Systems, vol. **8**, No. 2. April (2002), 469-513.