

UN ESTIMADOR DE ERROR RESIDUAL EXPLÍCITO PARA ADAPTATIVIDAD ORIENTADA AL RESULTADO

José Antonio Prieto Paredes

www.bdigital.ula.ve



Tesis de Maestría
Tutor: Giovanni Calderón
Mérida, Mayo 2014

Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, Universidad de Los Andes

DEDICATORIA

Cuando se inicia una meta se trazan caminos a corto, mediano y largo plazo, alcanzando los ciclos como etapas planificadas tanto en lo personal, formación académica y profesional. Este triunfo está dedicado:

A Dios todopoderoso, al Dr. José Gregorio Hernández, por escuchar mis oraciones.

Omaira y José Antonio mis padres, inmenso tesoro que el padre celestial me ha dado, le debo mi ser, me guiaron por el camino del amor y respeto, los amo.

Omaira Josefina y Elio mis hermanos, que le sirva de ejemplo para lograr sus propias metas.

Mis grandes recuerdos: Catalina y Elio Ramón (abuelos), Bernarda (tía) que desde el más allá me dieron voluntad y fuerza para vencer obstáculos.

Mis tíos, en especial a Sonia quien es ejemplo de lucha, valentía y empeño.

RESUMEN

Existen una gran variedad de problemas físicos cuya formulación desde, un punto de vista matemático, es una ecuación diferencial en derivadas parciales. Tal es el caso de la transmisión del calor, del electromagnetismo, de la mecánica de fluido o de análisis estructural, entre otros. En general, estos problemas resultan de gran complejidad y se tiene que recurrir a técnicas numéricas para encontrar soluciones aproximadas. Dentro de estas técnicas se encuentra el método de los elementos finitos (MEF), que actualmente se considera un método general aplicable a la mayoría de los problemas matemáticos y de ingeniería.

Por consiguiente, surge el interés de controlar la calidad de la solución aproximada. El mejor control será aquél que proporcione la solución más exacta con el menor número de incógnitas. Una forma de conseguir esto, es utilizar un proceso adaptativo de la malla para aproximar eficientemente la solución numérica del problema, para ello se introducen dos estimas de error residual explícito a posteriori para problemas elípticos orientadas a cantidades de interés, propuesto por Rosales y Díez, (ver referencia [3]). La representación del error a partir de cantidades de interés involucra la solución de elementos finitos del problema original (primal) y la de un problema adjunto o dual. En este trabajo, la representación del error se completa al usar una familia de funciones para definir el error. Estas funciones son conocidas como funciones burbujas. Para este fin, es necesario definir y analizar criterios de remallado para el proceso adaptativo orientado al control del error en cantidades de interés. Recientemente, Calderón y Díez [31], siguiendo las ideas introducidas por Li y Bettess [32], definen y analizan criterios de remallado para cantidades de interés, probando además la optimalidad de uno de los criterios propuestos. Adicionalmente, en esta tesis, se implementa una familia distinta de funciones burbujas las cuales resultan más óptimas para la estimación del error.

AGRADECIMIENTOS

A Dios todopoderoso por iluminarme en sabiduría, inteligencia, paciencia y poder superar los obstáculos encontrados en el camino.

A mis padres que me dieron la vida, apoyo económico, consejos y ejemplo de lucha y constancia para superarme.

Al Dr. Giovanni Calderón, profesor tutor que sirvió de orientador en el desarrollo del trabajo metodológico, siendo un apoyo incondicional muy objetivo, para mi aprendizaje de formación académica, quien además con su ejemplo me lleno de esperanza para alcanzar uno de mis grandes sueños hoy hecho realidad. Como su estudiante, con admiración le agradezco su paciencia y dedicación de su valioso tiempo, clave esencial del éxito.

A todo los profesores de la Universidad de Los Andes, Facultad de Ciencias, área de Matemáticas a Nivel de Pre-Postgrado, que sirvieron de pilar fundamental estratégico para el proceso de enseñanza-aprendizaje praxis teórica en mi condición de autor de esta tesis para optar al grado de Maestría de Matemática. Mi agradecimiento, seguiré sus ejemplos con mística, ética y vocación profesional.

A la ilustre Universidad de Los Andes por recibirme y cobijarme, permitiéndome lograr la meta propuesta.

Índice general

Introducción	1
1. Estimador de error residual explícito a posteriori para problemas elíptico	7
1.1. Planteamiento del problema	7
1.1.1. Problema modelo y residuo primal	7
1.1.2. Cantidad de interés y problema dual	9
1.1.3. Representación del error	12
1.2. Estima con función burbuja	14
1.2.1. Residuo interior	14
1.2.2. Residuo sobre arista	18
1.2.3. Estimadores introducidos	24
1.3. Función burbuja	27
1.4. Integración numérica necesaria en la implementación de las estimas	32
2. Proceso adaptativo a partir de cantidades de interés	35
2.1. Introducción	35
2.2. Marco general para los criterios de remallado	37
2.2.1. Notación y objetivos	37
2.2.2. Hipótesis requeridas: orden de convergencia local, distribución óptima del error	38
2.2.3. Derivación del criterio de remallado	39
2.2.4. Optimalidad de la distribución uniforme del error	41

3. Experimentación numérica	43
Ejemplo 1	44
Ejemplo 2	48
Ejemplo 3	52
Ejemplo 4	59
3.1. Comentarios finales	64
Bibliografía	67

www.bdigital.ula.ve

Introducción

Existen una gran variedad de problemas físicos cuya formulación desde, un punto de vista matemático, es una ecuación diferencial en derivadas parciales. Tal es el caso de la transmisión del calor, del electromagnetismo, de la mecánica de fluido o de análisis estructural, entre otros. En general, estos problemas resultan de gran complejidad y se tiene que recurrir a técnicas numéricas para encontrar soluciones aproximadas. Dentro de estas técnicas se encuentra el método de los elementos finitos (MEF)¹, que actualmente se considera un método general aplicable a la mayoría de los problemas matemáticos y de ingeniería.

Independientemente del método de mallado utilizado, en la fase de discretización del MEF surge el interés de controlar la calidad de la solución aproximada. El mejor control será aquél que proporcione la solución más exacta con el menor número de incógnitas. Una forma de conseguir esto, es utilizar un proceso adaptativo de la malla para aproximar eficientemente la solución numérica del problema. Esta manera de resolución requiere, además de las herramientas del MEF clásico, el desarrollo de una representación espacial del error y de un estimador del mismo, que sea capaz de detectar las regiones críticas del problema. En la literatura se puede encontrar una variedad de estimadores de error para el MEF; entre muchas, se citan las que pueden cubrir los antecedentes del problema a desarrollar en este trabajo: ver desde [1] a [30], especialmente, [2] y [4], donde se hace una recopilación general de los estimadores de error en el

¹Se advierte al lector que el MEF no se estudia en este trabajo, por el contrario, se supone que se tienen los conocimientos básicos del método.

MEF. También se necesita el diseño de estrategias para refinar esas regiones. Fundamentalmente existen tres tipos de refinamiento en los que se aumenta el número de incógnitas del problema:

- Tipo h : se modifica el tamaño de los elementos de la malla, es decir, se crean nuevos elementos allí donde el error es mayor.
- Tipo p : se modifica el orden del polinomio de la función de interpolación de los elementos.
- Tipo hp : es un enfoque híbrido que combina las estrategias h y p .

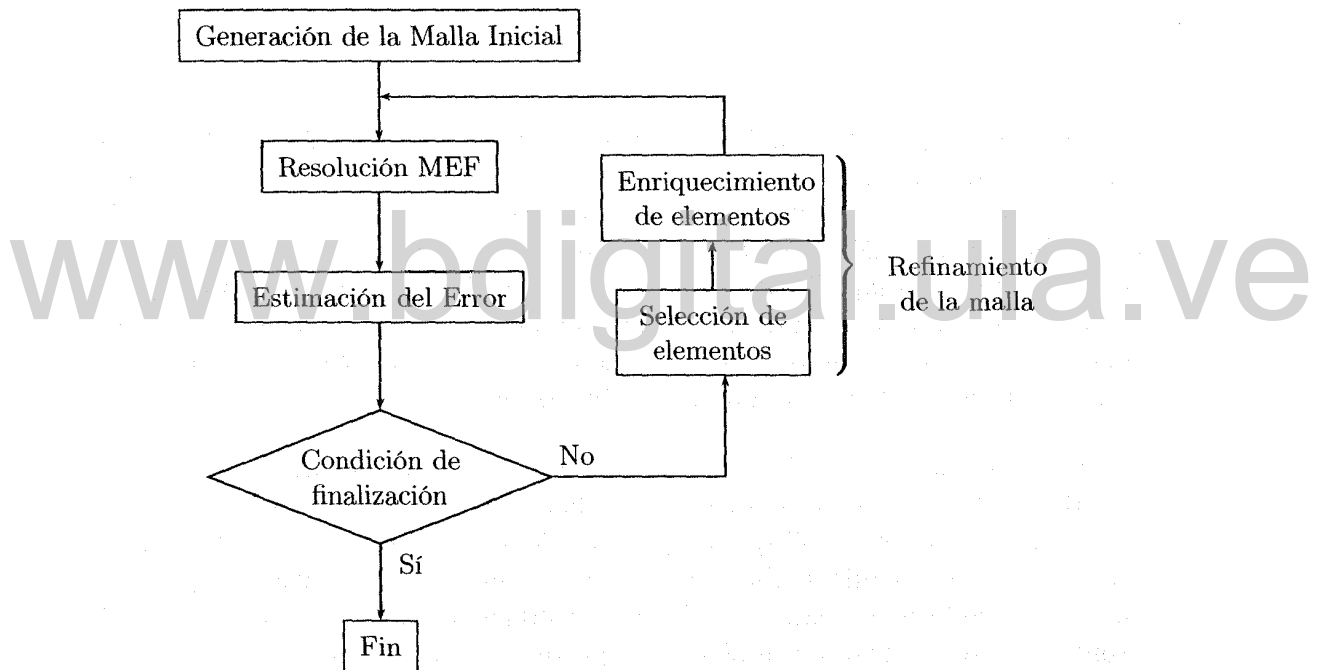


Figura 1: Diagrama de flujo del MEF adaptativo

El proceso adaptativo del MEF consiste en generar una malla inicial con pocos elementos y resolver el problema con esa discretización, se estima² el error cometido en el cálculo de la solución y se añaden grados de libertad al problema

²Se utilizarán las palabras estimación y estima en el mismo sentido a lo largo de este trabajo, sin importar el significado de la real academia.

en aquellas zonas donde esté presente una discretización más pobre, es decir, donde el error cometido es mayor. Este proceso se repite hasta que tiene lugar la condición de finalización. Esta condición puede consistir, por ejemplo, en la obtención de una precisión preestablecida o en alcanzar un número de grados de libertad máximo. En la Figura 1 se muestra el diagrama de flujo del MEF adaptativo, donde se pueden distinguir tres puntos fundamentales de un método adaptativo: la estimación del error en cada elemento, la elección de los elementos que deben ser refinados, y el enriquecimiento o aumento de grados de libertad en los elementos seleccionados.

Cualquiera que sea el tipo de adaptación escogido, el MEF adaptativo presenta dos ventajas fundamentales frente a la versión clásica del método:

- Mejora en eficiencia al optimizar la distribución de las incógnitas en la malla, de modo que el número de elementos final del problema sea el mínimo requerido para obtener la exactitud deseada. Esta disminución en el número de incógnitas del sistema supone un coste computacional menor.
- Comodidad en la introducción de datos. En la versión adaptativa del MEF solo es necesaria la generación de una malla inicial con pocos elementos. El algoritmo de adaptación se encarga de generar la malla óptima.

Los estimadores de error existentes en la literatura se clasifican de dos maneras:

- *Estimadores a priori*: son usados principalmente para predecir la convergencia de la solución numérica al enriquecer la discretización, es decir, al refinar la malla o aumentar el grado de interpolación.
- *Estimadores a posteriori*: calculan el error (global y local) una vez que la solución numérica ha sido hallada.

Entre los estimadores del error a posteriori globales se distinguen dos grandes familias: residuales y de suavizado (recovery). Los primeros resuelven de manera aproximada la ecuación residual del error (ver, entre otros, [9, 22, 23, 25]), mientras los segundos obtienen una solución mejorada mediante un método de postproceso (ver, [18, 19, 20]).

Dentro de los residuales se distinguen los explícitos que solo requieren calcular integrales ponderadas de los residuos (ver [3]) y los implícitos que requieren resolver un problema local en el que el residuo juega un papel de término fuente (ver [8]). Entre los primeros se clasifican también los estimadores basados en la técnica de Dual Weighted Residual (DWR) para los que se requiere contar con

una aproximación mejorada de la solución de un problema adjunto (ver, [7, 6]). Entre los implícitos se encuentran los que toman a los elementos como soporte de los problemas locales del error (element residual methods, [8]) y aquellos que utilizan otros subdominios, generalmente patches de elementos (subdomain residual methods, [2, 9, 25]).

No obstante, dentro de estos estimadores, existen hoy en día dos grandes vertientes: los estimadores en norma de energía y los estimadores en cantidades de interés. Los primeros toman en cuenta el error cometido en todo el dominio (error global), mientras los segundos lo hacen a través de cantidades de interés que define el usuario según el problema a resolver. Vale señalar, que en el pasado se utilizaba generalmente una medida energética para definir el error, mientras en el presente, se prefiere que la medida del error sea en base a cantidades de interés que determina el usuario ([6, 7, 3, 2]).

Las cantidades de interés suelen ser de utilidad en el campo de la ingeniería, y en general, son necesarias para la decisión sobre el diseño y control de modelos matemáticos. Desde un punto de vista matemático, se restringe la atención a cantidades de interés que estén caracterizadas por un funcional lineal, $J(u)$, $J : V \rightarrow \mathbb{R}$, donde u representa la solución del problema, y V es el espacio de funciones admisible para el problema en cuestión. Ejemplo de tal cantidad podría estar dado por el flujo que fluye a lo largo de una porción Γ de la frontera del dominio,

$$J(u) = \int_{\Gamma} n \cdot q(u) ds,$$

donde $q(u) = -a \nabla u$ es el vector de flujo y n es el vector normal unitario exterior. Otra alternativa, resulta al desear estimar el valor de una solución en un punto particular x_0 , es decir,

$$J(u) = u(x_0).$$

En este caso, los valores puntuales reales de la solución y su gradiente predicha por un modelo en particular puede ser "infinito" en regiones críticas del dominio, tales como esquinas reentrantes. Obviamente, no tiene sentido tratar de estimar el valor en tales casos. En cambio, se puede estar conforme de trabajar con el valor promedio de la cantidad en una vecindad pequeña $\omega_\varepsilon(x_0)$ del punto crítico, y definir la cantidad de interés

$$J(u) = \frac{1}{|\omega_\varepsilon(x_0)|} \int_{\omega_\varepsilon(x_0)} u ds.$$

A menudo, la cantidad de interés será un valor vectorial, o incluso tensor multi-valuada, la función, tal como el valor medio de las tensiones en una parte crítica

ω de una estructura

$$\frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} \sigma(u) ds,$$

donde u es el desplazamiento de la estructura (elástico lineal) y σ es el campo de tensiones asociado.

La cantidad de interés en cada uno de los ejemplos anteriores se puede representar en forma de un funcional lineal J . Sin embargo, como se señalaba anteriormente, para determinadas cantidades de interés, tales como los valores puntuales, el funcional no está acotado y no tiene sentido tratar de estimar la cantidad. No obstante, es posible tratar estos casos como acotados mediante el uso de un funcional lineal acotado estrechamente relacionado, tal como un promedio local, como se sugirió anteriormente, o por el uso de fórmulas de extracción apropiada.

La forma más sencilla para estimar la cantidad de interés J en la solución u exacta teniendo en cuenta la aproximación de elementos finitos u_H , es simplemente tomar $J(u) \approx J(u_H)$. ¿Es posible determinar la precisión de esta aproximación? La linealidad del funcional J significa que el error en la aproximación puede ser escrito de la forma

$$J(u) - J(u_H) = J(e),$$

donde $e = u - u_H$ es el error en la aproximación de elementos finitos.

Esto constituirá el punto de partida en la investigación en este trabajo, en el cual se introducen dos estimas de error residual explícito a posteriori para problemas elípticos orientados a cantidades de interés, propuestos por Rosales y Díez [3]. La representación del error a partir de cantidades de interés involucra la solución de elementos finitos del problema original (primal) y la de un problema adjunto o dual. La representación del error se completa al usar una familia de funciones para definir el error. Estas funciones son conocidas como funciones burbujas.

Con todo lo dicho, dado un problema de contorno (ecuación diferencial parcial elíptica), el objetivo central de este trabajo consiste en crear un proceso adaptativo tipo h para el control del error usando como medida una cantidad de interés. Para este fin, es necesario definir y analizar criterios de remallado para el proceso adaptativo orientado al control del error en cantidades de interés. Recientemente, Calderón y Díez [31], siguiendo las ideas introducidas por Li y Bettess [32], definen y analizan criterios de remallado para cantidades de interés, probando además la optimalidad de uno de los criterios propuestos.

El resto de la tesis queda estructurada de la siguiente manera. En el siguiente capítulo se introducen el problema modelo a trabajar a lo largo del trabajo, las representaciones del error y las estimaciones del mismo para controlar el error en una cantidad de interés. El proceso adaptativo a partir de estos estimadores es definido en el Capítulo 2, además de un criterio de remallado utilizado para la definición de la malla. El tercer capítulo muestra los resultados alcanzados mediante la experimentación numérica y las conclusiones. Por último se presentan las referencias del trabajo.

www.bdigital.ula.ve

Estimador de error residual explícito a posteriori para problemas elíptico

En este capítulo se introducen dos estimas de error residual explícito a posteriori para problemas elípticos orientadas a cantidades de interés, propuesto por Rosales y Díez, (ver referencia [3]). La representación del error a partir de cantidades de interés involucra la solución de elementos finitos del problema original (primal) y la de un problema adjunto o dual. En este trabajo, la representación del error se completa al usar una familia de funciones para definir el error. Estas funciones son conocidas como funciones burbujas.

1.1. Planteamiento del problema

En la presente sección se introduce el problema de contorno modelo (problema primal), la cantidad de interés, el problema dual y las representaciones del error.

1.1.1. Problema modelo y residuo primal

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, un dominio abierto, acotado y con frontera suave a trozos $\partial\Omega = \bar{\Gamma}_N \cup \bar{\Gamma}_D$, con $\Gamma_N \cap \Gamma_D = \emptyset$. Γ_N es la parte de la frontera donde se imponen condiciones del tipo Neumann y Γ_D la parte donde se imponen condiciones del tipo Dirichlet. Se quiere encontrar la solución u del problema de valor de frontera

elíptico dado por la ecuación de equilibrio y condiciones de contorno:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = u_N & \text{sobre } \Gamma_N, \\ u = \bar{u} & \text{sobre } \Gamma_D, \end{cases} \quad (1.1)$$

donde Δ es el operador Laplaciano espacial, u representa la temperatura, f es el término fuente, u_N es el flujo prescrito sobre la porción de contorno Γ_N con normal unitaria exterior \mathbf{n} y \bar{u} la temperatura prescrita sobre Γ_D .

Para calcular una solución aproximada del problema (1.1) usando el método de los elementos finitos se establece su formulación variacional, que consiste en encontrar $u \in V$ tal que

$$B(u, v) = L(v), \text{ para todo } v \in V_0, \quad (1.2)$$

donde, la forma bilineal $B(\cdot, \cdot)$ y el funcional lineal $L(\cdot)$ quedan definidos por:

$$\begin{aligned} B(u, v) &:= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega, \\ L(v) &:= \int_{\Omega} f v \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} u_N v \, ds. \end{aligned}$$

El espacio de funciones V , donde se encuentra la solución (1.1), se define como

$$V := \{u \in \mathcal{H}^1(\Omega) : u = \bar{u} \text{ en } \Gamma_D\},$$

y el espacio de variaciones, V_0 , se define como

$$V_0 := \{u \in \mathcal{H}^1(\Omega) : u = 0 \text{ en } \Gamma_D\}.$$

La solución de elementos finitos u_H de (1.2) pertenece al espacio funcional discreto $V_H \subset V$, inducido por la discretización del dominio Ω en elementos Ω_k , con $k = 1, 2, \dots, n_{el}$, tales que

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{k=1}^{n_{el}} \bar{\Omega}_k, \quad \text{y } \Omega_k \cap \Omega_j = \emptyset \text{ para } k \neq j,$$

y verificando

$$B(u_H, v) = L(v), \text{ para todo } v \in V_{H_0} \subset V_0, \quad (1.3)$$

con V_{H_0} la contraparte discreta del espacio V_0 .

El error numérico asociado a u_H se denota por $e := u - u_H$, en general $e \notin V_0$, sin embargo $\|e\|$ es suficientemente pequeña para asumir que $e \in V_0$, además satisface la ecuación del error

$$\begin{aligned} B(e, v) &= B(u - u_H, v) = B(u, v) - B(u_H, v), \\ &= L(v) - B(u_H, v), \\ &=: \mathcal{R}^P(v), \text{ para todo } v \in V_0, \end{aligned} \quad (1.4)$$

donde $\mathcal{R}^P(\cdot)$ define el *residuo débil* o *residuo primal* asociado a la solución u_H del problema primal. Observe que $\mathcal{R}^P(\cdot)$ es una aplicación lineal.

1.1.2. Cantidad de interés y problema dual

El objetivo que se desea alcanzar se centra en controlar la exactitud numérica de la solución u_H , donde la aproximación es obtenida por el método de los elementos finitos al ser aplicado en el problema modelo (1.1). Este control se medirá mediante una cierta cantidad de interés representada por un funcional lineal $J(\cdot)$, es decir, se pretende controlar el error en la evaluación de $J(u)$; la precisión de $J(u_H)$ se puede estimar en términos del error $J(e) = J(u) - J(u_H)$. A primera vista, para evaluar $J(e)$ se debería calcular e usando (1.4), es decir, encontrar $e \in V_0$ tal que

$$B(e, v) = \mathcal{R}^P(v), \text{ para todo } v \in V_0, \quad (1.5)$$

y luego obtener $J(e)$. En principio se podría buscar una aproximación a la función error e con la precisión con que se desee. Sin embargo, es claro que este procedimiento sería equivalente a resolver el problema primal en un espacio más rico que V_H , es decir, en un espacio $V_h \supset V_H$. De esta manera el costo asociado con el computador es mayor, la aproximación del error para evaluar la cantidad de interés, $J(e)$, sería demasiado costoso. En consecuencia, en la búsqueda de una estimación del error a posteriori a menudo se sobreentiende que se debe excluir cualquier procedimiento que implique un esfuerzo computacional mayor que el de resolver el problema original.

Otra alternativa, consiste en relacionar $J(e)$ con el residuo primal sin tener que computar el error e . Es decir, obtener $z \in V_0$ tal que $J(e) = \mathcal{R}^P(z)$. De esta forma, se introduce el problema *dual* o *adjunto*, como un problema auxiliar para estimar el error en la cantidad de interés, $J(e)$, que consiste en hallar un $z \in V_0$ tal que

$$B(v, z) = J(v), \text{ para todo } v \in V_0. \quad (1.6)$$

Observe que al reemplazar v por z en (1.4) se obtiene que

$$B(e, z) = \mathcal{R}^P(z)$$

y al sustituir v por e en (1.6) se deduce que

$$B(e, z) = J(e),$$

por consiguiente, $J(e) = \mathcal{R}^P(z)$.

Por otra parte, el problema dual (1.6) presenta la misma dificultad de resolución que el problema primal (1.2). Por lo tanto, es necesario introducir la solución de elementos finitos $z_H \in V_{H_0}$ que satisface:

$$B(v, z_H) = J(v), \text{ para todo } v \in V_{H_0}. \quad (1.7)$$

El error numérico asociado a z_H se denota por $\varepsilon := z - z_H$ y pertenece al espacio V_0 , además satisface la ecuación del error

$$\begin{aligned} B(v, \varepsilon) &= B(v, z - z_H) = B(v, z) - B(v, z_H), \\ &= J(v) - B(v, z_H), \\ &=: \mathcal{R}^D(v), \text{ para todo } v \in V_0, \end{aligned} \quad (1.8)$$

donde $\mathcal{R}^D(\cdot)$ define el *residuo débil* o *residuo dual* asociado a la solución aproximada z_H del problema dual. Observe que $\mathcal{R}^D(\cdot)$ es una aplicación lineal.

Por otro lado, del Teorema de Representación de Riesz se tiene que dado un funcional lineal $J(\cdot)$ se puede escribir como

$$J(u) = (j, u),$$

donde (\cdot, \cdot) representa el producto interno usual en $L_2(\Omega)$ y la función j es única y pertenece al espacio $L_2(\Omega)$. Luego, de (1.6) se sigue que

$$\int_{\Omega} \nabla z \cdot \nabla v \, d\Omega = \int_{\Omega} j v \, d\Omega, \text{ para todo } v \in V_0,$$

con $z \in V_0$. Puesto que $\partial\Omega = \bar{\Gamma}_N \cup \bar{\Gamma}_D$ se tiene que

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial z}{\partial \mathbf{n}} \cdot v \, ds = \int_{\Gamma_N} \frac{\partial z}{\partial \mathbf{n}} \cdot v \, ds + \int_{\Gamma_D} \frac{\partial z}{\partial \mathbf{n}} \cdot v \, ds. \quad (1.9)$$

Nótese que

$$\int_{\Gamma_D} \frac{\partial z}{\partial \mathbf{n}} \cdot v \, ds = 0, \text{ para todo } v \in V_0. \quad (1.10)$$

Además, supongamos que

$$\frac{\partial z}{\partial \mathbf{n}} = 0, \text{ en } \Gamma_N,$$

entonces

$$\int_{\Gamma_N} \frac{\partial z}{\partial \mathbf{n}} \cdot v \, ds = 0, \text{ para todo } v \in V_0. \quad (1.11)$$

Utilizando (1.10) y (1.11) en (1.9) se obtiene

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial z}{\partial \mathbf{n}} \cdot v \, ds = 0, \text{ para todo } v \in V_0.$$

Por consiguiente,

$$\int_{\Omega} \nabla z \cdot \nabla v \, d\Omega - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial z}{\partial \mathbf{n}} \cdot v \, ds = \int_{\Omega} j v \, d\Omega, \text{ para todo } v \in V_0,$$

por la fórmula de Green, se sigue que

$$\int_{\Omega} -\Delta z \cdot v \, d\Omega = \int_{\Omega} j v \, d\Omega, \text{ para todo } v \in V_0.$$

Esto implica que la forma fuerte del problema dual (1.6) es, encontrar $z \in V_0$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta z = j & \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial z}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \text{sobre } \Gamma_N, \\ z = 0 & \text{sobre } \Gamma_D. \end{cases} \quad (1.12)$$

Cantidades de interés

Una de las cantidades de interés utilizadas en esta tesis, es el valor de la solución en un punto \mathbf{x}_0 , dado. En este caso se tiene que $j = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ que denota una δ -distribución en el punto \mathbf{x}_0 con la propiedad

$$\int_{\Omega} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) u(\mathbf{x}) \, d\Omega = u(\mathbf{x}_0),$$

debido a que

$$J(u) = (j, u) = \int_{\Omega} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) u(\mathbf{x}) \, d\Omega$$

se tiene que $J(u) = u(\mathbf{x}_0)$. Pero el funcional lineal J definido así, produce singularidades en el problema dual. Para sortear esta dificultad se utiliza

$$j(\mathbf{x}) = W_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0),$$

donde las funciones W_ε forman una familia de funciones infinitas veces diferenciables, caracterizadas por el parámetro ε , y se obtiene el funcional

$$J(u) = (j, u) = \int_{\Omega} W_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) u(\mathbf{x}) d\Omega.$$

La cantidad $J(u) \approx u(\mathbf{x}_0)$ es el promedio de u sobre una pequeña vecindad de \mathbf{x}_0 . Las funciones W_ε , son escogidas como

$$W_\varepsilon(\mathbf{x}) := \begin{cases} C e^{-\varepsilon^2/(\varepsilon^2 - \|\mathbf{x}\|^2)}, & \text{si } \|\mathbf{x}\|^2 < \varepsilon, \\ 0, & \text{si } \|\mathbf{x}\|^2 \geq \varepsilon, \end{cases} \quad (1.13)$$

con $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ y $\varepsilon > 0$ dados, y la constante C es tal que

$$\int_{\Omega} W_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) d\Omega = 1.$$

1.1.3. Representación del error

Se ha dicho que para estimar el error en la cantidad de interés, $J(e)$, se tiene que resolver un problema dual que consiste en hallar $z \in V_0$ tales que

$$B(v, z) = J(v), \text{ para todo } v \in V_0,$$

y por lo tanto $J(e) = \mathcal{R}^P(z)$. Esto implica que se debe encontrar una aproximación a la función z con la mayor precisión posible, con el propósito de evaluar el residual $\mathcal{R}^P(z)$ y obtener una estimación del error en la cantidad de interés, $J(e)$. Otras alternativas para representar el error son dadas en el siguiente teorema. Dejando, además, claro que la representación para el error no es única.

Teorema 1 Sean, $u_H \in V_H$ y $z_H \in V_{H_0}$, las aproximaciones del problemas primal (1.3) y del problema dual (1.7), respectivamente. Entonces, el error en la cantidad de interés asociado a estas soluciones, $J(e)$, se puede representar de las siguientes formas:

$$J(e) = \mathcal{R}^P(\varepsilon), \quad (1.14)$$

$$= \mathcal{R}^D(e), \quad (1.15)$$

donde \mathcal{R}^P y \mathcal{R}^D representan los residuos del problema primal y dual dados por (1.4) y (1.8).

Prueba: Sea $u \in V$ la solución exacta del problema continuo (1.2), de la ortogonalidad del error para problemas elípticos de Galerkin, se deduce que

$$B(u - u_H, v) = 0 \text{ para todo } v \in V_{H_0},$$

Puesto que $z_H \in V_{H_0}$ resulta que

$$B(e, z_H) = 0. \quad (1.16)$$

Por otra parte, v puede ser reemplazada por e en (1.6), pues $e \in V_0$, así

$$J(e) = B(e, z). \quad (1.17)$$

Combinando (1.16) y (1.17), se obtiene que

$$\begin{aligned} J(e) &= B(e, z) - B(e, z_H), \\ &= B(e, z - z_H). \end{aligned}$$

Dado que z es la solución exacta del problema continuo (1.6), se sigue que

$$J(e) = B(e, \varepsilon), \quad (1.18)$$

Aplicando (1.4) en (1.18), pues $\varepsilon \in V_0$, se obtiene

$$J(e) = \mathcal{R}^P(\varepsilon),$$

lo cual prueba (1.14).

Por otro lado, v puede ser reemplazada por e en (1.8), pues $e \in V_0$, así

$$\mathcal{R}^D(e) = B(e, \varepsilon). \quad (1.19)$$

De (1.18) y (1.19) se sigue que

$$J(e) = \mathcal{R}^D(e)$$

esto prueba (1.15). ■

En la prueba, la ecuación (1.18) también puede ser usada para representar el error. Sin embargo, en esta representación una doble estimación debe hacerse.

1.2. Estima con función burbuja

En esta sección se introducen dos estimadores para el error en la evaluación de la cantidad de interés, $J(e)$, utilizando la solución de elementos finitos de un problema primal y uno adjunto. Para ello, se buscará una aproximación del error en el problema dual, válida desde el punto de vista energético, a través de la suma del error interior, ε^{int} , y del error sobre aristas, ε^{arist} , es decir

$$\varepsilon \approx \varepsilon^{int} + \varepsilon^{arist}, \quad (1.20)$$

donde $\varepsilon^{int}, \varepsilon^{arist} \in V_0$. O bien, se procede a buscar una aproximación del error en el problema primal, válida desde el punto de vista energético, a través de la suma del error interior, e^{int} , y del error sobre aristas, e^{arist} , es decir

$$e \approx e^{int} + e^{arist}, \quad (1.21)$$

donde $e^{int}, e^{arist} \in V_0$.

Luego, teniendo en cuenta la representación del error en la cantidad de interés, $J(e)$, (1.14) y (1.15), y la linealidad del residuo primal y del residuo dual, se sigue que

$$\begin{aligned} J(e) &= \mathcal{R}^P(\varepsilon) \approx \mathcal{R}^P(\varepsilon^{int} + \varepsilon^{arist}), \\ &\approx \mathcal{R}^P(\varepsilon^{int}) + \mathcal{R}^P(\varepsilon^{arist}), \end{aligned} \quad (1.22)$$

y

$$\begin{aligned} J(e) &= \mathcal{R}^D(e) \approx \mathcal{R}^D(e^{int} + e^{arist}), \\ &\approx \mathcal{R}^D(e^{int}) + \mathcal{R}^D(e^{arist}). \end{aligned} \quad (1.23)$$

Por consiguiente, (1.22) y (1.23) representan dos estimadores para el error en la cantidad de interés, $J(e)$, que se expondrán explícitamente a continuación.

1.2.1. Residuo interior

Para estimar el residuo primal del error cometido en el problema dual sobre el interior de los elementos Ω_k , se construye una familia de funciones burbujas interior $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n_{el}}\}$ del modo siguiente: para cada $k \in \{1, 2, \dots, n_{el}\}$ se define una función burbuja interior $\psi(\xi, \eta)$ sobre la clausura del elemento de referencia

$$\hat{\Omega} := (-1, 1) \times (-1, 1),$$

tales que ψ es positiva en $\hat{\Omega}$ y se anula en $\partial\hat{\Omega}$, luego se construye la función burbuja interior ψ_k sobre la clausura del elemento físico Ω_k usando una aplicación desde el elemento de referencia $\hat{\Omega}$ hacia el elemento físico Ω_k , como es típico en el cálculo con el método de los elementos finitos. Luego se procede a extender el dominio de ψ_k sobre $\bar{\Omega}$ de la siguiente manera: si $(x, y) \in \bar{\Omega} \setminus \bar{\Omega}_k$ entonces $\psi_k(x, y) = 0$.

Teniendo en cuenta lo mencionado, el error interior cometido en el problema dual se aproximará por medio de una combinación lineal de las funciones burbujas ψ_k , es decir,

$$\varepsilon^{int} := \sum_{k=1}^{n_{el}} c_k \psi_k, \quad (1.24)$$

para ciertas constantes c_k .

Supongamos que se elige ψ_k con una suavidad apropiada, tal que $\psi_k \in V_0$ para todo k , esto implica que $\varepsilon^{int} \in V_0$. Utilizando la expresión anterior y la linealidad del residuo primal \mathcal{R}^P , resulta que

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^P(\varepsilon^{int}) &= \mathcal{R}^P\left(\sum_{k=1}^{n_{el}} c_k \psi_k\right), \\ &= \sum_{k=1}^{n_{el}} c_k \mathcal{R}^P(\psi_k). \end{aligned} \quad (1.25)$$

Para determinar las constantes c_k , se utiliza la expresión (1.24) y la bilinealidad de $B(\cdot, \cdot)$, para obtener

$$\begin{aligned} B(\psi_k, \varepsilon^{int}) &= B\left(\psi_k, \sum_{j=1}^{n_{el}} c_j \psi_j\right), \\ &= \sum_{j=1}^{n_{el}} c_j B(\psi_k, \psi_j). \end{aligned} \quad (1.26)$$

Proposición 1 $B(\psi_k, \psi_j) = 0$ para todo $j \in \{1, 2, \dots, n_{el}\} \setminus \{k\}$.

Prueba: Sea $j \in \{1, 2, \dots, n_{el}\} \setminus \{k\}$ y observe que

$$\begin{aligned} B(\psi_k, \psi_j) &= \int_{\Omega} \nabla \psi_k \cdot \nabla \psi_j \, d\Omega, \\ &= \int_D \nabla \psi_k \cdot \nabla \psi_j \, dD + \int_{\Omega_k} \nabla \psi_k \cdot \nabla \psi_j \, d\Omega_k, \end{aligned}$$

donde $D = \Omega \setminus \Omega_k$. Debido a que ψ_k se anula en D , se sigue que $\nabla\psi_k = \mathbf{0}$, por consiguiente $\nabla\psi_k \cdot \nabla\psi_j = 0$, así

$$\int_D \nabla\psi_k \cdot \nabla\psi_j \, dD = 0.$$

Esto implica que

$$B(\psi_k, \psi_j) = \int_{\Omega_k} \nabla\psi_k \cdot \nabla\psi_j \, d\Omega_k.$$

Como $j \neq k$ por hipótesis, se deduce que $\Omega_j \cap \Omega_k = \emptyset$, en consecuencia $\Omega_k \subset \Omega \setminus \Omega_j$. Ahora, puesto que ψ_j se anula en $\Omega \setminus \Omega_j$, se infiere que ψ_j también se anula en Ω_k , de donde se tiene que $\nabla\psi_j = \mathbf{0}$, por consiguiente $\nabla\psi_k \cdot \nabla\psi_j = 0$, así

$$\int_{\Omega_j} \nabla\psi_k \cdot \nabla\psi_j \, d\Omega_j = 0,$$

por lo tanto, $B(\psi_k, \psi_j) = 0$. ■

De (1.26) y la Proposición 1, se sigue que

$$B(\psi_k, \varepsilon^{int}) = c_k B(\psi_k, \psi_k).$$

Ahora, debido a que ψ_k es positiva, resulta que $B(\psi_k, \psi_k) \neq 0$, para todo $k \in \{1, 2, \dots, n_{el}\}$, en consecuencia

$$c_k = \frac{B(\psi_k, \varepsilon^{int})}{B(\psi_k, \psi_k)}. \quad (1.27)$$

Puesto que, ε^{int} es desconocido para calcular c_k , la forma de hallarlo, es asumir que $B(\psi_k, \varepsilon^{int}) = B(\psi_k, \varepsilon)$, pues $\varepsilon \approx \varepsilon^{int}$, y como $\psi_k \in V_0$ de (1.8) se sigue que

$$B(\psi_k, \varepsilon^{int}) = \mathcal{R}^D(\psi_k). \quad (1.28)$$

De (1.27) y (1.28) se tiene que

$$c_k = \frac{\mathcal{R}^D(\psi_k)}{B(\psi_k, \psi_k)}. \quad (1.29)$$

Por lo tanto, de (1.24) y (1.29) se obtiene la siguiente expresión para el error interior del problema dual,

$$\varepsilon^{int} = \sum_{k=1}^{n_{el}} \frac{\mathcal{R}^D(\psi_k)}{B(\psi_k, \psi_k)} \psi_k.$$

De (1.25) y (1.29) se tiene

$$\mathcal{R}^P(\varepsilon^{int}) = \sum_{k=1}^{n_{el}} c_k \mathcal{R}^P(\psi_k), \text{ donde } c_k = \frac{\mathcal{R}^D(\psi_k)}{B(\psi_k, \psi_k)}. \quad (1.30)$$

Por otro lado, al igual que lo hecho anteriormente, para estimar el residuo dual del error en el problema primal sobre el interior de los elementos Ω_k , con $k = 1, 2, \dots, n_{el}$, se procede a estimar el error interior del problema primal por medio de una combinación lineal de las funciones burbujas ψ_k , es decir,

$$e^{int} := \sum_{k=1}^{n_{el}} \tilde{c}_k \psi_k, \quad (1.31)$$

para ciertas constantes \tilde{c}_k .

Puesto que $\psi_k \in V_0$ para todo k , se deduce que $e^{int} \in V_0$. Utilizando la expresión anterior y la linealidad del residuo dual \mathcal{R}^D , resulta que

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^D(e^{int}) &= \mathcal{R}^D\left(\sum_{k=1}^{n_{el}} \tilde{c}_k \psi_k\right), \\ &= \sum_{k=1}^{n_{el}} \tilde{c}_k \mathcal{R}^D(\psi_k). \end{aligned} \quad (1.32)$$

Para determinar las constantes \tilde{c}_k , se utiliza la expresión (1.31) y la bilinealidad de $B(\cdot, \cdot)$, para obtener

$$\begin{aligned} B(\psi_k, e^{int}) &= B\left(\psi_k, \sum_{j=1}^{n_{el}} \tilde{c}_j \psi_j\right), \\ &= \sum_{j=1}^{n_{el}} \tilde{c}_j B(\psi_k, \psi_j), \end{aligned}$$

como $B(\psi_k, \psi_j) = 0$, para $k \neq j$, por la Proposición 1, resulta

$$B(\psi_k, e^{int}) = \tilde{c}_k B(\psi_k, \psi_k),$$

y debido a que ψ_k es positiva se tiene que $B(\psi_k, \psi_k) \neq 0$, para todo $k \in \{1, 2, \dots, n_{el}\}$, en consecuencia

$$\tilde{c}_k = \frac{B(\psi_k, e^{int})}{B(\psi_k, \psi_k)}. \quad (1.33)$$

Puesto que, e^{int} es desconocido para calcular \tilde{c}_k , la forma de hallarlo, es asumir que $B(\psi_k, e^{int}) = B(\psi_k, e)$, pues $e \approx e^{int}$, y como $\psi_k \in V_0$ de (1.4) se sigue que

$$B(\psi_k, e^{int}) = \mathcal{R}^P(\psi_k). \quad (1.34)$$

De (1.33) y (1.34) se tiene que

$$\tilde{c}_k = \frac{\mathcal{R}^P(\psi_k)}{B(\psi_k, \psi_k)}. \quad (1.35)$$

Luego de (1.31) y (1.35) se obtiene la siguiente expresión para el error interior del problema primal.

$$e^{int} = \sum_{j=1}^{n_{el}} \frac{\mathcal{R}^P(\psi_k)}{B(\psi_k, \psi_k)} \psi_k. \quad (1.36)$$

De (1.32) y (1.35) se tiene

$$\mathcal{R}^D(e^{int}) = \sum_{k=1}^{n_{el}} \tilde{c}_k \mathcal{R}^D(\psi_k), \text{ donde } \tilde{c}_k = \frac{\mathcal{R}^P(\psi_k)}{B(\psi_k, \psi_k)}. \quad (1.37)$$

1.2.2. Residuo sobre arista

Para estimar el residuo primal del error cometido en el problema dual sobre cada arista $\gamma_l = \overline{\Omega}_k \cap \overline{\Omega}_{k'}$ de la malla de elementos finitos, donde l es un elemento del conjunto $\{1, 2, \dots, n_{art}\}$, $k \neq k'$, Ω_k y $\Omega_{k'}$ son los elementos que comparten la arista γ_l , como se puede observar en la Figura 1.1, entonces para la arista γ_l se define una función burbuja sobre la arista χ_l , en el subconjunto $\Lambda_l \subset \overline{\Omega}_k \cup \overline{\Omega}_{k'}$. Luego se procede a extender el dominio de χ_l sobre $\overline{\Omega}$ de la siguiente manera: si $(x, y) \in \overline{\Omega} \setminus \Lambda_l$, entonces $\chi_l(x, y) = 0$.

Teniendo en cuenta esto, el error sobre aristas del problema dual será aproximado a través de una combinación lineal de las funciones burbujas χ_l , es decir

$$\varepsilon^{arist} := \sum_{l=1}^{n_{art}} d_l \chi_l, \quad (1.38)$$

para ciertas constantes d_l .

Se supone que se elige χ_l con una suavidad apropiada, tal que $\chi_l \in V_0$ para todo l , esto implica que $\varepsilon^{arist} \in V_0$. Utilizando la expresión anterior y la linealidad

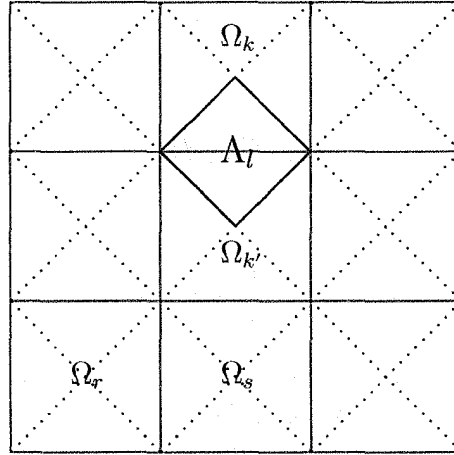


Figura 1.1: Soporte de funciones burbuja sobre arista

del residuo primal \mathcal{R}^P , resulta que

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^P(\varepsilon^{arist}) &= \mathcal{R}^P\left(\sum_{l=1}^{n_{art}} d_l \chi_l\right), \\ &= \sum_{l=1}^{n_{art}} d_l \mathcal{R}^P(\chi_l). \end{aligned} \quad (1.39)$$

Para determinar las constantes d_l , se utiliza la expresión (1.38) y la bilinealidad de $B(\cdot, \cdot)$, para obtener

$$\begin{aligned} B(\chi_l, \varepsilon^{arist}) &= B\left(\chi_l, \sum_{j=1}^{n_{art}} d_j \chi_j\right), \\ &= \sum_{j=1}^{n_{art}} d_j B(\chi_l, \chi_j). \end{aligned} \quad (1.40)$$

La siguiente proposición resulta necesaria.

Proposición 2 $B(\chi_l, \chi_j) = 0$ para todo $j \in \{1, 2, \dots, n_{ed}\} \setminus \{l\}$.

Prueba: Sea $j \in \{1, 2, \dots, n_{ed}\} \setminus \{l\}$ y observe que

$$\begin{aligned} B(\chi_l, \chi_j) &= \int_{\Omega} \nabla \chi_l \cdot \nabla \chi_j \, d\Omega, \\ &= \int_D \nabla \chi_l \cdot \nabla \chi_j \, dD + \int_{\Lambda_l} \nabla \chi_l \cdot \nabla \chi_j \, d\Lambda_l, \end{aligned}$$

donde $D = \Omega \setminus \Lambda_l$. Debido a que χ_l se anula en D , se sigue que $\nabla \chi_l = \mathbf{0}$, por consiguiente $\nabla \chi_l \cdot \nabla \chi_j = 0$, así

$$\int_D \nabla \chi_l \cdot \nabla \chi_j \, dD = 0,$$

esto implica que

$$B(\chi_l, \chi_j) = \int_{\Lambda_l} \nabla \chi_l \cdot \nabla \chi_j \, d\Lambda_l,$$

como $j \neq l$ por hipótesis, se deduce que $\Lambda_j \cap \Lambda_l = \emptyset$, en consecuencia $\Lambda_l \subset \Omega \setminus \Lambda_j$. Puesto que χ_j se anula en $\Omega \setminus \Lambda_j$, se infiere que χ_j también se anula en Λ_l , de donde se tiene que $\nabla \chi_j = \mathbf{0}$, por consiguiente $\nabla \chi_l \cdot \nabla \chi_j = 0$, así

$$\int_{\Lambda_l} \nabla \chi_l \cdot \nabla \chi_j \, d\Lambda_l = 0,$$

por lo tanto, $B(\chi_l, \chi_j) = 0$. ■

De (1.40) y la Proposición 2 se sigue que

$$B(\chi_l, \varepsilon^{arist}) = d_l B(\chi_l, \chi_l).$$

debido a que χ_l es positiva resulta que $B(\chi_l, \chi_l) \neq 0$, para todo $l \in \{1, 2, \dots, n_{art}\}$, en consecuencia

$$d_l = \frac{B(\chi_l, \varepsilon^{arist})}{B(\chi_l, \chi_l)}. \quad (1.41)$$

Puesto que, ε^{arist} es desconocido para calcular d_l , la forma de hallarlo, es asumir que $B(\chi_l, \varepsilon^{arist}) = B(\chi_l, \varepsilon - \varepsilon^{int})$, pues $\varepsilon \approx \varepsilon^{int} + \varepsilon^{arist}$ por (1.20). De la bilinealidad de $B(\cdot, \cdot)$ se sigue que

$$B(\chi_l, \varepsilon^{arist}) = B(\chi_l, \varepsilon) - B(\chi_l, \varepsilon^{int}),$$

y de (1.8) se deduce que $B(\chi_l, \varepsilon) = \mathcal{R}^D(\chi_l)$, así

$$B(\chi_l, \varepsilon^{arist}) = \mathcal{R}^D(\chi_l) - B(\chi_l, \varepsilon^{int}). \quad (1.42)$$

De (1.41) y (1.42) resulta que

$$d_l = \frac{\mathcal{R}^D(\chi_l) - B(\chi_l, \varepsilon^{int})}{B(\chi_l, \chi_l)}. \quad (1.43)$$

Utilizando (1.24) y la bilinealidad de $B(\cdot, \cdot)$ se sigue que

$$\begin{aligned} B(\chi_l, \varepsilon^{int}) &= B\left(\chi_l, \sum_{j=1}^{n_{el}} c_j \psi_j\right), \\ &= \sum_{j=1}^{n_{el}} c_j B(\chi_l, \psi_j), \end{aligned} \quad (1.44)$$

donde,

$$c_j = \frac{\mathcal{R}^D(\psi_j)}{B(\psi_j, \psi_j)},$$

por (1.29).

Proposición 3 Si Ω_k y $\Omega_{k'}$ son los elementos que comparten la arista γ_l , como se puede observar en la Figura 1.1, entonces $B(\chi_l, \psi_j) = 0$ para todo j que pertenece a $\{1, 2, \dots, n_{el}\} \setminus \{k, k'\}$.

Prueba: Sea $j \in \{1, 2, \dots, n_{el}\} \setminus \{k, k'\}$ y observe que

$$\begin{aligned} B(\chi_l, \psi_j) &= \int_{\Omega} \nabla \chi_l \cdot \nabla \psi_j \, d\Omega = \int_{\bar{\Omega}} \nabla \chi_l \cdot \nabla \psi_j \, d\bar{\Omega}, \\ &= \int_D \nabla \chi_l \cdot \nabla \psi_j \, dD + \int_{\bar{\Omega} \setminus D} \nabla \chi_l \cdot \nabla \psi_j \, d(\bar{\Omega} \setminus D), \end{aligned}$$

donde $D = \bar{\Omega}_k \cup \bar{\Omega}_{k'}$. Debido a que χ_l se anula en $\bar{\Omega} \setminus D$ y $\Lambda_l \subset D$, se infiere que χ_l también se anula en $\bar{\Omega} \setminus D$, por consiguiente $\nabla \chi_l = 0$, de donde se sigue que $\nabla \chi_l \cdot \nabla \psi_j = 0$, así

$$\int_{\bar{\Omega} \setminus D} \nabla \chi_l \cdot \nabla \psi_j \, d(\bar{\Omega} \setminus D),$$

esto implica que

$$B(\chi_l, \psi_j) = \int_D \nabla \chi_l \cdot \nabla \psi_j \, dD.$$

Puesto que, $j \neq k$ y $j \neq k'$ por hipótesis, se tiene que $\Omega_j \cap \Omega_k = \emptyset$ y $\Omega_j \cap \Omega_{k'} = \emptyset$, es decir $\Omega_k \subset \Omega \setminus \Omega_j$ y $\Omega_{k'} \subset \Omega \setminus \Omega_j$. Debido a que ψ_j se anula en $\Omega \setminus \Omega_j$, se infiere que ψ_j también se anula en Ω_k y $\Omega_{k'}$, en consecuencia $\nabla \psi_j = \mathbf{0}$. De donde se sigue que $\nabla \chi_l \cdot \nabla \psi_j = 0$, así

$$\int_{\Omega_k} \nabla \chi_l \cdot \nabla \psi_j \, d\Omega_k = 0 \quad \text{y} \quad \int_{\Omega_{k'}} \nabla \chi_l \cdot \nabla \psi_j \, d\Omega_{k'} = 0.$$

Esto es equivalente a

$$\int_{\bar{\Omega}_k} \nabla \chi_l \cdot \nabla \psi_j \, d\bar{\Omega}_k = 0 \quad \text{y} \quad \int_{\bar{\Omega}_{k'}} \nabla \chi_l \cdot \nabla \psi_j \, d\bar{\Omega}_{k'} = 0,$$

se sigue entonces que

$$\int_D \nabla \chi_l \cdot \nabla \psi_j \, dD = 0,$$

y por lo tanto, $B(\chi_l, \psi_j) = 0$. ■

De (1.44) y la Proposición 3 se sigue que

$$B(\chi_l, \varepsilon^{int}) = c_k B(\chi_l, \psi_k) + c_{k'} B(\chi_l, \psi_{k'}), \quad (1.45)$$

además, de (1.43) y (1.45) resulta que

$$d_l = \frac{\mathcal{R}^D(\chi_l) - c_k B(\chi_l, \psi_k) - c_{k'} B(\chi_l, \psi_{k'})}{B(\chi_l, \chi_l)}. \quad (1.46)$$

Al sustituir (1.46) en (1.39), se tiene que

$$\mathcal{R}^P(\varepsilon^{arist}) = \sum_{l=1}^{n_{art}} \frac{\mathcal{R}^D(\chi_l) - c_k B(\chi_l, \psi_k) - c_{k'} B(\chi_l, \psi_{k'})}{B(\chi_l, \chi_l)} \mathcal{R}^P(\chi_l), \quad (1.47)$$

donde

$$c_k = \frac{\mathcal{R}^D(\psi_k)}{B(\psi_k, \psi_k)} \quad \text{y} \quad c_{k'} = \frac{\mathcal{R}^D(\psi_{k'})}{B(\psi_{k'}, \psi_{k'})}.$$

Por otra parte, el error sobre aristas del problema primal será aproximado a través de una combinación lineal de las funciones burbujas χ_l , es decir

$$e^{arist} := \sum_{l=1}^{n_{art}} \tilde{d}_l \chi_l, \quad (1.48)$$

para ciertas constantes \tilde{d}_l .

Puesto que $\chi_l \in V_0$ para todo l , se deduce que $e^{arist} \in V_0$. Utilizando la expresión anterior y la linealidad del residuo dual \mathcal{R}^D , resulta que

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^D(e^{arist}) &= \mathcal{R}^D\left(\sum_{l=1}^{n_{art}} \tilde{d}_l \chi_l\right), \\ &= \sum_{l=1}^{n_{art}} \tilde{d}_l \mathcal{R}^D(\chi_l). \end{aligned} \quad (1.49)$$

Para determinar las constantes \tilde{d}_l , se utiliza la expresión (1.48) y la bilinealidad de $B(\cdot, \cdot)$, para obtener

$$\begin{aligned} B(\chi_l, e^{arist}) &= B\left(\chi_l, \sum_{j=1}^{n_{art}} \tilde{d}_j \chi_j\right), \\ &= \sum_{j=1}^{n_{art}} \tilde{d}_j B(\chi_l, \chi_j). \end{aligned} \quad (1.50)$$

De (1.50) y la Proposición 2 se sigue que

$$B(\chi_l, e^{arist}) = \tilde{d}_l B(\chi_l, \chi_l).$$

Debido a que χ_l es positiva resulta que $B(\chi_l, \chi_l) \neq 0$, para todo $l \in \{1, 2, \dots, n_{art}\}$, en consecuencia

$$\tilde{d}_l = \frac{B(\chi_l, e^{arist})}{B(\chi_l, \chi_l)}. \quad (1.51)$$

Ahora, puesto que, e^{arist} es desconocido para calcular \tilde{d}_l , la forma de hallarlo, es asumir que $B(\chi_l, e^{arist}) = B(\chi_l, e - e^{int})$, pues $e \approx e^{int} + e^{arist}$ por (1.21), y de la bilinealidad de $B(\cdot, \cdot)$ se sigue que

$$B(\chi_l, e^{arist}) = B(\chi_l, e) - B(\chi_l, e^{int}),$$

de (1.4) se deduce que $B(\chi_l, e) = \mathcal{R}^P(\chi_l)$, así

$$B(\chi_l, e^{arist}) = \mathcal{R}^P(\chi_l) - B(\chi_l, e^{int}). \quad (1.52)$$

Así, de (1.51) y (1.52) resulta que

$$\tilde{d}_l = \frac{\mathcal{R}^P(\chi_l) - B(\chi_l, e^{int})}{B(\chi_l, \chi_l)}. \quad (1.53)$$

Utilizando (1.31) y la bilinealidad de $B(\cdot, \cdot)$ se sigue que

$$\begin{aligned} B(\chi_l, e^{int}) &= B\left(\chi_l, \sum_{j=1}^{n_{el}} \tilde{c}_j \psi_j\right), \\ &= \sum_{j=1}^{n_{el}} \tilde{c}_j B(\chi_l, \psi_j), \end{aligned} \quad (1.54)$$

donde

$$\tilde{c}_j = \frac{\mathcal{R}^P(\psi_j)}{B(\psi_j, \psi_j)},$$

por (1.35).

De (1.54) y la Proposición 3, se sigue que

$$B(\chi_l, e^{int}) = \tilde{c}_k B(\chi_l, \psi_k) + \tilde{c}_{k'} B(\chi_l, \psi_{k'}), \quad (1.55)$$

de (1.53) y (1.55) resulta que

$$\tilde{d}_l = \frac{\mathcal{R}^P(\chi_l) - \tilde{c}_k B(\chi_l, \psi_k) - \tilde{c}_{k'} B(\chi_l, \psi_{k'})}{B(\chi_l, \chi_l)}. \quad (1.56)$$

Al sustituir (1.56) en (1.49), se tiene que

$$\mathcal{R}^D(e^{arist}) = \sum_{l=1}^{n_{art}} \frac{\mathcal{R}^P(\chi_l) - \tilde{c}_k B(\chi_l, \psi_k) - \tilde{c}_{k'} B(\chi_l, \psi_{k'})}{B(\chi_l, \chi_l)} \mathcal{R}^D(\chi_l), \quad (1.57)$$

donde

$$\tilde{c}_k = \frac{\mathcal{R}^P(\psi_k)}{B(\psi_k, \psi_k)} \quad \text{y} \quad \tilde{c}_{k'} = \frac{\mathcal{R}^P(\psi_{k'})}{B(\psi_{k'}, \psi_{k'})}$$

1.2.3. Estimadores introducidos

De (1.22) se sigue que el error en la cantidad de interés $J(e)$ representada a través de $\mathcal{R}^P(\varepsilon)$ se puede aproximar como la suma de los residuos interior y sobre aristas, es decir

$$J(e) = \mathcal{R}^P(\varepsilon) \approx \mathcal{R}^P(\varepsilon^{int}) + \mathcal{R}^P(\varepsilon^{arist}) =: E_1$$

Sustituyendo (1.30) y (1.47) en la expresión anterior se obtiene la siguiente estima del error:

$$E_1 = \sum_{k=1}^{n_{el}} c_k \mathcal{R}^P(\psi_k) + \sum_{l=1}^{n_{art}} d_l \mathcal{R}^P(\chi_l), \quad (1.58)$$

donde

$$c_k = \frac{\mathcal{R}^D(\psi_k)}{B(\psi_k, \psi_k)} \quad \text{y} \quad d_l = \frac{\mathcal{R}^D(\chi_l) - c_k B(\chi_l, \psi_k) - c_{k'} B(\chi_l, \psi_{k'})}{B(\chi_l, \chi_l)}.$$

En consecuencia, (1.58) representa el primer estimador del error en la cantidad de interés $J(e)$. Reemplazando las constantes indicadas y reordenando las expresiones, la estima se puede escribir como:

$$E_1 = \sum_{k=1}^{n_{el}} \frac{\mathcal{R}^D(\psi_k) \mathcal{R}^P(\psi_k)}{B(\psi_k, \psi_k)} + \sum_{l=1}^{n_{art}} \frac{\mathcal{R}^D(\chi_l) \mathcal{R}^P(\chi_l)}{B(\chi_l, \chi_l)} - \sum_{l=1}^{n_{art}} \left[\frac{\mathcal{R}^D(\psi_k) B(\chi_l, \psi_k) \mathcal{R}^P(\chi_l)}{B(\psi_k, \psi_k) B(\chi_l, \chi_l)} + \frac{\mathcal{R}^D(\psi_{k'}) B(\chi_l, \psi_{k'}) \mathcal{R}^P(\chi_l)}{B(\psi_{k'}, \psi_{k'}) B(\chi_l, \chi_l)} \right].$$

Al mismo tiempo, de (1.23) se sigue que el error en la cantidad de interés $J(e)$ representada a través de $\mathcal{R}^D(e)$ se puede aproximar como la suma de los residuos interior y sobre aristas, es decir

$$J(e) = \mathcal{R}^D(e) \approx \mathcal{R}^D(e^{int}) + \mathcal{R}^D(e^{arist}) =: E_2$$

Sustituyendo (1.37) y (1.57) en la expresión anterior, se obtiene la siguiente estima del error:

$$E_2 = \sum_{k=1}^{n_{el}} \tilde{c}_k \mathcal{R}^D(\psi_k) + \sum_{l=1}^{n_{art}} \tilde{d}_l \mathcal{R}^D(\chi_l), \quad (1.59)$$

donde

$$\tilde{c}_k = \frac{\mathcal{R}^P(\psi_k)}{B(\psi_k, \psi_k)} \quad \text{y} \quad \tilde{d}_l = \frac{\mathcal{R}^P(\chi_l) - \tilde{c}_k B(\chi_l, \psi_k) - \tilde{c}_{k'} B(\chi_l, \psi_{k'})}{B(\chi_l, \chi_l)}$$

Así, (1.59) representa el segundo estimador del error en la cantidad de interés $J(e)$. Reemplazando las constantes indicadas y reordenando las expresiones, el estima se puede escribir como:

$$E_2 = \sum_{k=1}^{n_{el}} \frac{\mathcal{R}^P(\psi_k) \mathcal{R}^D(\psi_k)}{B(\psi_k, \psi_k)} + \sum_{l=1}^{n_{art}} \frac{\mathcal{R}^P(\chi_l) \mathcal{R}^D(\chi_l)}{B(\chi_l, \chi_l)} - \sum_{l=1}^{n_{art}} \left[\frac{\mathcal{R}^P(\psi_k) B(\chi_l, \psi_k) \mathcal{R}^D(\chi_l)}{B(\psi_k, \psi_k) B(\chi_l, \chi_l)} + \frac{\mathcal{R}^P(\psi_{k'}) B(\chi_l, \psi_{k'}) \mathcal{R}^D(\chi_l)}{B(\psi_{k'}, \psi_{k'}) B(\chi_l, \chi_l)} \right]$$

Se debe observar que la primera sumatoria de las estimas E_1 y E_2 son iguales, también se tiene que la contribución del error interior en el elemento Ω_k esta dada por la siguiente expresión

$$\frac{\mathcal{R}^P(\psi_k) \mathcal{R}^D(\psi_k)}{B(\psi_k, \psi_k)}$$

La segunda y tercera sumatoria de las estimas E_1 y E_2 , son las contribuciones del error sobre cada arista que no pertenezca a la frontera de Ω . Puesto que, el objetivo de este trabajo es diseñar un proceso adaptativo a partir de la cantidad de interés, esto requiere que las estimas del error estén dadas de modo que se conozca el error en cada uno de los elementos Ω_k , esto conduce a la siguiente pregunta, ¿cual es la contribución del error sobre las aristas en el elemento Ω_k que no pertenezca a la frontera de Ω ?

Para responder a esta pregunta, consideremos la arista γ_l y supongamos que Ω_k y $\Omega_{k'}$ son los elementos que comparten la arista γ_l , como se puede observar

en la Figura 1.1, por consiguiente, el soporte de la función burbuja χ_l es Λ_l . Entonces la contribución en la arista γ_l para la estima E_1 está dada por

$$\frac{\mathcal{R}^D(\chi_l) \mathcal{R}^P(\chi_l)}{B(\chi_l, \chi_l)} - \left[\frac{\mathcal{R}^D(\psi_k) B(\chi_l, \psi_k) \mathcal{R}^P(\chi_l)}{B(\psi_k, \psi_k) B(\chi_l, \chi_l)} + \frac{\mathcal{R}^D(\psi_{k'}) B(\chi_l, \psi_{k'}) \mathcal{R}^P(\chi_l)}{B(\psi_{k'}, \psi_{k'}) B(\chi_l, \chi_l)} \right].$$

En consecuencia, el aporte de la contribución en la arista γ_l en el elemento Ω_k se considera mediante la siguiente expresión

$$\frac{1}{2} \frac{\mathcal{R}^D(\chi_l) \mathcal{R}^P(\chi_l)}{B(\chi_l, \chi_l)} - \frac{\mathcal{R}^D(\psi_k) B(\chi_l, \psi_k) \mathcal{R}^P(\chi_l)}{B(\psi_k, \psi_k) B(\chi_l, \chi_l)},$$

y el aporte de la contribución en la arista γ_l en el elemento $\Omega_{k'}$ se considera por

$$\frac{1}{2} \frac{\mathcal{R}^D(\chi_l) \mathcal{R}^P(\chi_l)}{B(\chi_l, \chi_l)} - \frac{\mathcal{R}^D(\psi_{k'}) B(\chi_l, \psi_{k'}) \mathcal{R}^P(\chi_l)}{B(\psi_{k'}, \psi_{k'}) B(\chi_l, \chi_l)}.$$

Procediendo de esta manera con cada arista que no sea de frontera de Ω , se obtiene la contribución del error sobre las aristas en cada uno de los elementos de la discretización de Ω , para la estima E_1 .

Por otro lado, la contribución en la arista γ_l , para la estima E_2 , está dada por

$$\frac{\mathcal{R}^P(\chi_l) \mathcal{R}^D(\chi_l)}{B(\chi_l, \chi_l)} - \left[\frac{\mathcal{R}^P(\psi_k) B(\chi_l, \psi_k) \mathcal{R}^D(\chi_l)}{B(\psi_k, \psi_k) B(\chi_l, \chi_l)} + \frac{\mathcal{R}^P(\psi_{k'}) B(\chi_l, \psi_{k'}) \mathcal{R}^D(\chi_l)}{B(\psi_{k'}, \psi_{k'}) B(\chi_l, \chi_l)} \right],$$

en consecuencia, el aporte de la contribución en la arista γ_l en el elemento Ω_k se considera mediante la siguiente expresión

$$\frac{1}{2} \frac{\mathcal{R}^P(\chi_l) \mathcal{R}^D(\chi_l)}{B(\chi_l, \chi_l)} - \frac{\mathcal{R}^P(\psi_k) B(\chi_l, \psi_k) \mathcal{R}^D(\chi_l)}{B(\psi_k, \psi_k) B(\chi_l, \chi_l)},$$

y el aporte de la contribución en la arista γ_l en el elemento $\Omega_{k'}$ se considera por

$$\frac{1}{2} \frac{\mathcal{R}^P(\chi_l) \mathcal{R}^D(\chi_l)}{B(\chi_l, \chi_l)} - \frac{\mathcal{R}^P(\psi_{k'}) B(\chi_l, \psi_{k'}) \mathcal{R}^D(\chi_l)}{B(\psi_{k'}, \psi_{k'}) B(\chi_l, \chi_l)},$$

procediendo de esta manera con cada arista que no sea de frontera de Ω , se obtiene la contribución del error sobre las aristas en cada uno de los elementos de la discretización de Ω , para la estima E_2 .

1.3. Función burbuja

Las funciones no negativas comúnmente se conocen como funciones burbujas. Los dos tipos de funciones burbujas son: las funciones burbujas interior, soportadas en un solo elemento y las funciones burbujas sobre aristas, soportadas en uno o en un par de elementos, dependiendo si la arista es de frontera o interior.

Como se ha dicho, resulta conveniente definir cada función de la familia de las funciones burbujas, que se utilizan en las estimas presentadas en la sección anterior, sobre un elemento de referencia y luego se construye la función burbuja sobre el elemento físico usando una transformación desde el elemento de referencia hacia el elemento físico, como es típico en el cálculo con el método de los elementos finitos. En la experimentación numérica se utilizará una función burbuja interior y dos familias de funciones burbujas sobre arista.

La función burbuja interior es definida sobre el elemento de referencia *cua-*
drilátero y es elegido como

$$K := \{(\xi, \eta) : -1 \leq \xi \leq 1, -1 \leq \eta \leq 1\}.$$

La función burbuja interior $\psi : K \rightarrow \mathbb{R}$ es definido por

$$\psi(\xi, \eta) := (1 - \xi^2)(1 - \eta^2).$$

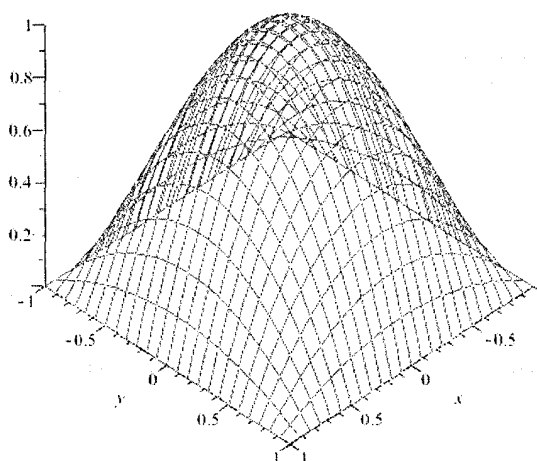
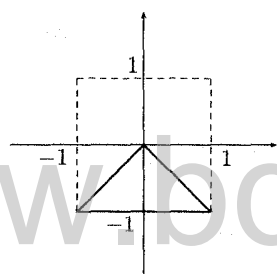


Figura 1.2: Función burbuja interior en el elemento de referencia.

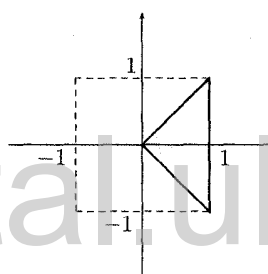
La primera y segunda familia de funciones burbujas sobre arista, es definido sobre los elementos de referencia *triangular* y son elegidos como

$$\begin{aligned}
 K_1 &:= \{(\xi, \eta) : -1 \leq \xi \leq 1, -1 \leq \eta \leq 0, \eta \leq \xi, \eta \leq -\xi\}, \\
 K_2 &:= \{(\xi, \eta) : 0 \leq \xi \leq 1, -1 \leq \eta \leq 1, \eta \leq \xi, \eta \geq -\xi\}, \\
 K_3 &:= \{(\xi, \eta) : -1 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \eta \leq 1, \eta \geq \xi, \eta \geq -\xi\}, \\
 K_4 &:= \{(\xi, \eta) : -1 \leq \xi \leq 0, -1 \leq \eta \leq 1, \eta \geq \xi, \eta \leq -\xi\},
 \end{aligned}$$

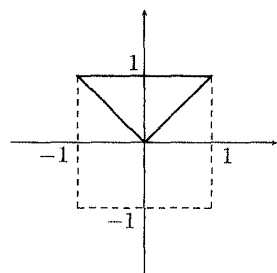
ver Figura 1.3.



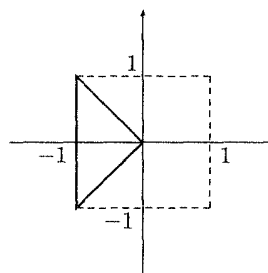
Elemento de referencia triangular K_1



Elemento de referencia triangular K_2



Elemento de referencia triangular K_3



Elemento de referencia triangular K_4

Figura 1.3: Elemento de referencia triangular

La primera familia de funciones burbujas sobre arista es introducida por

Rosales y Díez [3]:

$$\chi_1(\xi, \eta) := \frac{1}{9}(\xi^2 - \eta^2)(\xi^2 - (\eta - 2)^2), \text{ para todo } (\xi, \eta) \in K_1$$

$$\chi_2(\xi, \eta) := \frac{1}{9}(\xi^2 - \eta^2)((\xi + 2)^2 - \eta^2), \text{ para todo } (\xi, \eta) \in K_2$$

$$\chi_3(\xi, \eta) := \frac{1}{9}(\xi^2 - \eta^2)(\xi^2 - (\eta + 2)^2), \text{ para todo } (\xi, \eta) \in K_3$$

$$\chi_4(\xi, \eta) := \frac{1}{9}(\xi^2 - \eta^2)((\xi - 2)^2 - \eta^2), \text{ para todo } (\xi, \eta) \in K_4$$

ver Figura 1.4.

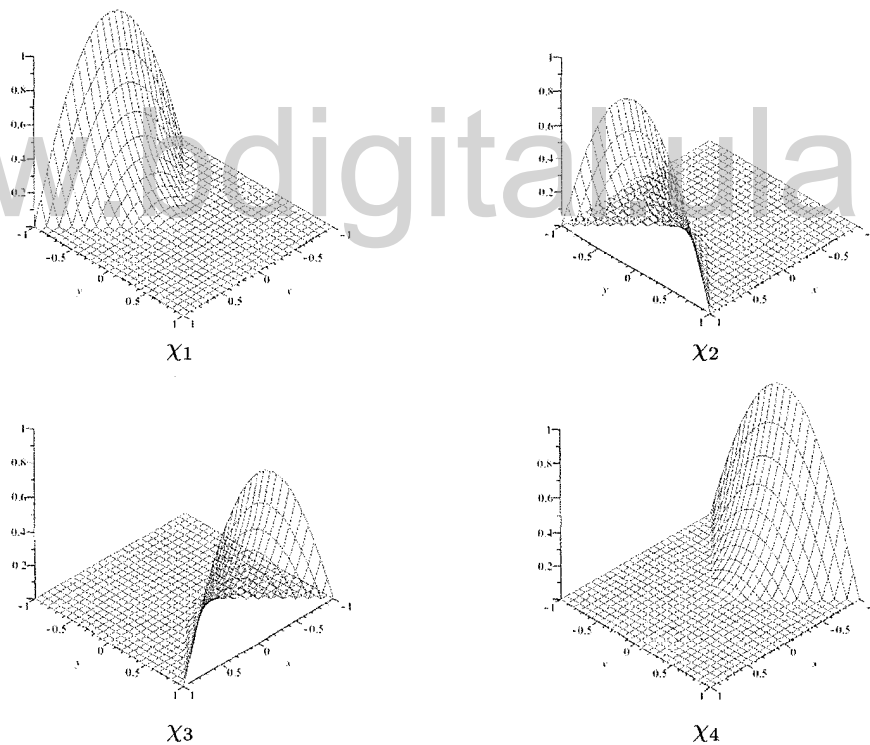


Figura 1.4: Funciones burbujas sobre arista en el elemento de referencia dadas por Rosales y Díez [3].

La segunda familia de funciones burbujas sobre arista, propuestas en este

trabajo, vienen dadas por

$$\chi_1(\xi, \eta) := (\xi^2 - \eta^2)^2, \text{ para todo } (\xi, \eta) \in K_1$$

$$\chi_2(\xi, \eta) := (\xi^2 - \eta^2)^2, \text{ para todo } (\xi, \eta) \in K_2$$

$$\chi_3(\xi, \eta) := (\xi^2 - \eta^2)^2, \text{ para todo } (\xi, \eta) \in K_3$$

$$\chi_4(\xi, \eta) := (\xi^2 - \eta^2)^2, \text{ para todo } (\xi, \eta) \in K_4$$

ver Figura 1.5.

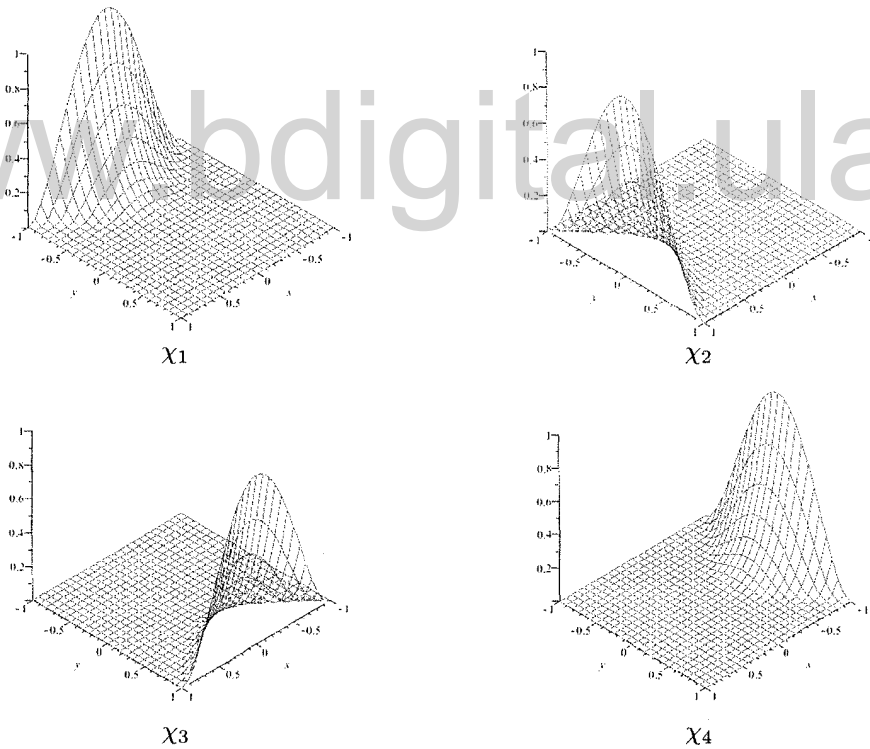


Figura 1.5: Funciones burbujas sobre arista en el elemento de referencia

Una familia adicional de funciones burbujas sobre arista y definidas sobre el

elemento de referencia cuadrilátero K es la introducida por Oden [2]:

$$\chi_1(\xi, \eta) := \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta),$$

$$\chi_2(\xi, \eta) := \frac{1}{2}(1 + \xi)(1 - \eta^2),$$

$$\chi_3(\xi, \eta) := \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta),$$

$$\chi_4(\xi, \eta) := \frac{1}{2}(1 - \xi)(1 - \eta^2),$$

para todo $(\xi, \eta) \in K$ (cuadrilátero), ver Figura 1.6.

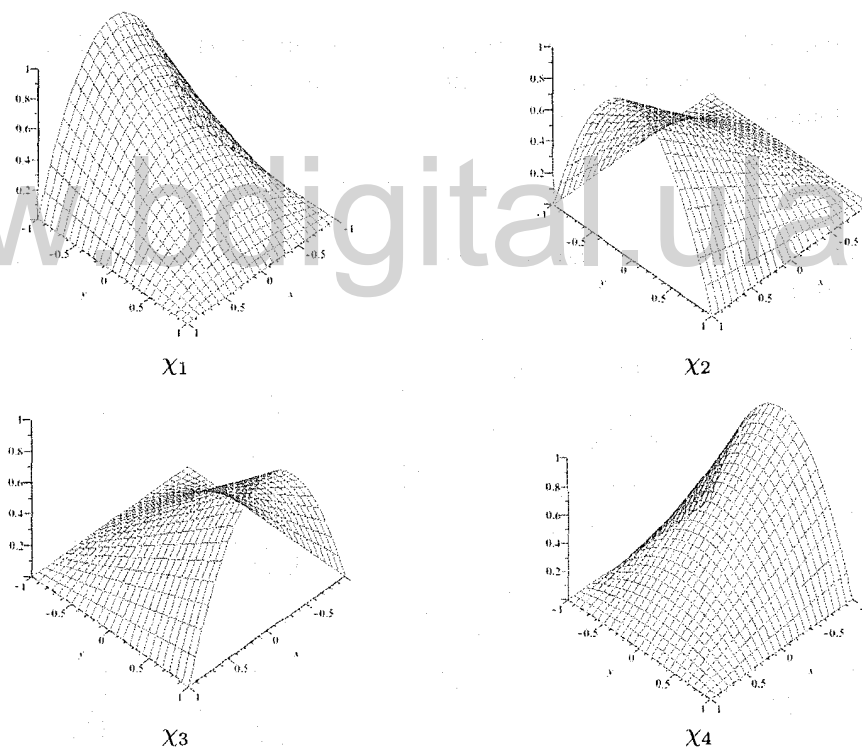


Figura 1.6: Funciones burbuja sobre arista en el elemento de referencia dadas por Oden [2].

Observe que esta familia de funciones burbuja no satisface la Proposición 2, por consiguiente no se puede estimar el error E_1 y E_2 utilizando esta familia. No

se realizará ninguna experimentación numérica con ellas, estas son dadas solo de forma informativa.

1.4. Integración numérica necesaria en la implementación de las estimas

Teniendo en cuenta la solución aproximada del problema primal y dual obtenida por el MEF, inducida por la discretización del dominio Ω en los elementos Ω_k con $k = 1, 2, \dots, n_{el}$, tal que

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{k=1}^{n_{el}} \bar{\Omega}_k, \quad \text{y} \quad \Omega_k \cap \Omega_j = \emptyset \text{ para } k \neq j,$$

el siguiente paso en la implementación del proceso adaptativo, es hallar un estima para el residuo interior elemento a elemento, donde se utiliza una transformación desde el elemento de referencia

$$\hat{\Omega} = (0, 1) \times (0, 1),$$

hacia el elemento físico Ω_k , como es típico en el cálculo con el método de los elementos finitos.

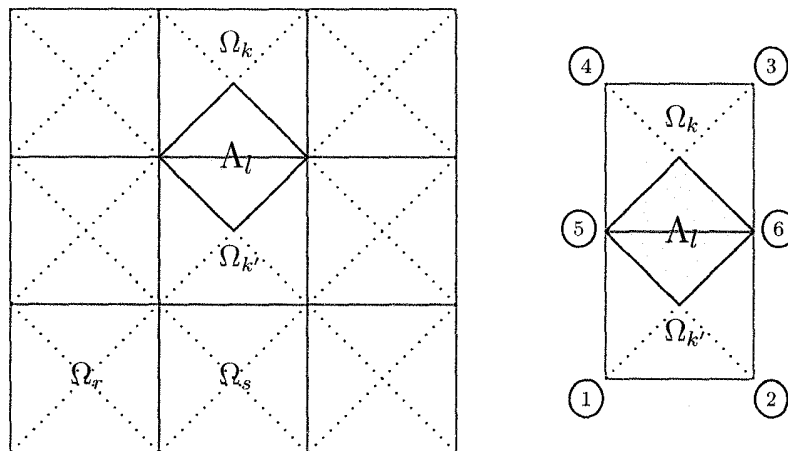


Figura 1.7

Por otra parte, al mismo tiempo, se debe obtener un estima para el residuo sobre arista para cada una de las aristas que no sea de frontera. Para esto,

supongamos que se está estimando el aporte de la arista l que comparten los elementos Ω_k y $\Omega_{k'}$ sobre la región Λ_l , como se puede observar en la Figura 1.7 (izquierda). Dependiendo de la topología de la malla, la arista l perteneciente al elemento Ω_k puede estar en cualquier lado i , donde $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, esto permite definir cuatro transformaciones desde el elemento de referencia triangular K_i hacia el elemento físico $\Lambda_l \cap \Omega_k$, estos elementos de referencia se pueden observar en la Figura 1.3. Por ejemplo, si los nodos que conforma los elementos Ω_k y $\Omega_{k'}$ están enumerados como se muestra en la Figura 1.7 (derecha), y considera que la topología del elemento Ω_k es $[5 \ 6 \ 3 \ 4]$ y la del elemento $\Omega_{k'}$ es $[1 \ 2 \ 6 \ 5]$, esto indica que la arista l se encuentra en el lado 1 del elemento Ω_k y del lado 3 en $\Omega_{k'}$. Por consiguiente, se procede a utilizar dos transformaciones

$$T_1 : K_1 \rightarrow \Lambda_l \cap \Omega_k \quad \text{y} \quad T_2 : K_3 \rightarrow \Lambda_l \cap \Omega_{k'}$$

para calcular

$$\mathcal{R}^P(\chi_l), \quad \mathcal{R}^D(\chi_l), \quad B(\chi_l, \chi_l) \quad \text{y} \quad B(\chi_l, \psi_k)$$

www.bdigital.ula.ve



www.bdigital.ula.ve

Proceso adaptativo a partir de cantidades de interés

2.1. Introducción

Existe una gran variedad de problemas físicos cuya formulación desde un punto de vista matemático es una ecuación diferencial en derivadas parciales. En general, estos problemas resultan de gran complejidad y se tiene que recurrir a técnicas numéricas para encontrar soluciones aproximadas. Dentro de estas técnicas se encuentra el MEF. No obstante, la resolución numérica de un problema de contorno requiere controlar la calidad de la solución aproximada. Este control puede lograrse mediante un proceso adaptativo de la malla para aproximar eficientemente la solución numérica del problema. Como ya se dijo previamente, se usará un proceso adaptativo tipo h , es decir, se modifica el tamaño de los elementos de la malla.

Este enfoque de resolución requiere, además de las herramientas del MEF clásico, desarrollo de estimadores de error que detecten las regiones críticas del problema. Si bien, en el pasado, se utilizaba generalmente una medida energética para definir el error; en el presente, se prefiere que la medida del error sea en base a cantidades de interés que determina el usuario. Estas cantidades suelen ser de utilidad en el campo de la ingeniería y representan regularmente: tensiones, desplazamientos o gradientes térmicos, entre otras. Desde un punto de vista matemático, se restringe la atención a cantidades que estén caracterizadas por un funcional lineal $J(u)$ de la solución u del problema.

Como se ha comentado, la representación del error a partir de cantidades de interés involucra las soluciones del problema original u_H y la de un problema

adjunto o dual z_H . Dichas soluciones se pueden combinar de diferentes maneras; en otras palabras la representación de error no es única. En este trabajo se utiliza las estimas E_1 y E_2 dada en (1.58) y (1.59) respectivamente, para la representación del error de la cantidad de interés, $J(e)$.

Una vez que se ha estimado el error y evaluado la representación del error elegida en cada elemento Ω_k del dominio, se debe usar estos valores para definir un nuevo tamaño de elemento (criterio de remallado) que nos conduzca a la malla apropiada para la resolución numérica del problema (malla óptima). En otras palabras, un componente fundamental dentro de un proceso adaptativo está dado por el criterio de remallado.

La estrategia más simple para controlar el error de aproximación consiste en un proceso iterativo cuyos pasos son descritos en el Algoritmo 2.1. Esta estrategia es muy general, ya que no requiere ninguna información sobre el tipo de problema.

Algoritmo 2.1 Control adaptativo del error a partir de cantidades de interés

- 1: Se define la malla inicial (se utilizara el mallador ez4u).
 - 2: Se calculan las soluciones: u_H y z_H con el MEF.
 - 3: Se utiliza el estimador residual E_1 (o bien E_2) para estimar el error de la cantidad de interés $J(e)$.
 - 4: Mientras $E_k < J(u)To1$ hacer los pasos 5 hasta 7. $\triangleright (k = 1 \text{ o } k = 2)$
con $To1$ la tolerancia dada para el error.
 - 5: Según el criterio de remallado, generar una nueva malla con el mallador.
 - 6: Se calculan las soluciones: u_H y z_H con la nueva malla.
 - 7: Calcular E_k .
-

El MEF adaptativo presenta dos ventajas fundamentales frente a la versión clásica del método:

- Mejora en eficiencia al optimizar la distribución de las incógnitas en la malla, de modo que el número de elementos final del problema sea el mínimo requerido para obtener la exactitud deseada. Esta disminución en el número de incógnitas del sistema supone un coste computacional menor.
- Comodidad en la introducción de datos. En la versión adaptativa del MEF sólo es necesaria la generación de una malla inicial con pocos elementos. El algoritmo de adaptación se encarga de generar la malla óptima.

2.2. Marco general para los criterios de remallado

En este trabajo se siguen las ideas dadas por Calderón y Díez [31], donde definen y analizan criterios de remallado para cantidades de interés, probando además la optimalidad de uno de los criterios propuestos.

2.2.1. Notación y objetivos

Una vez se ha estimado el error, un ingrediente importante en el proceso adaptativo es el criterio de remallado. El criterio de remallado toma como input la distribución de las medidas elementales del error y produce la información requerida para construir una nueva malla. Si el criterio de remallado es derivado apropiadamente, la nueva malla debe proporcionar una solución aproximada que satisface los requisitos de exactitud a un costo computacional mínimo. Desde un punto de vista práctico, el criterio de remallado es una expresión que traduce los valores locales del error en los tamaños del elemento deseados en cada parte del dominio.

Sea E el error funcional que se desea controlar. En un proceso de adaptatividad normal, E es la norma de energía del error (al cuadrado), $B(e, e)$, en adaptatividad orientada al resultado E es precisamente $J(e)$.

La cantidad E se puede descomponer en contribuciones elementales E_k^1 , para $k = 1, \dots, n_{el}$,

$$E = \sum_{k=1}^{n_{el}} E_k. \quad (2.1)$$

Cada elemento de la malla es denotado con Ω_k (es habitual además usar la misma notación para definir el área o volumen del elemento) y la medida de este elemento es denotada por H_k . Si los elementos en la malla son lo suficientemente regulares (no demasiado distorsionados), el tamaño de cada elemento se toma como

$$H_k = \Omega_k^{1/d}. \quad (2.2)$$

Todas las cantidades que hacen referencia a la nueva malla se denotan con un acento circunflejo ($\hat{\cdot}$). Así, el número de elementos y tamaño de elemento característico son denotados por \hat{n}_{el} y \hat{H} , respectivamente. El tamaño de cada elemento local en la nueva malla debería ser denotado con $\hat{H}_{\hat{k}}$ para $\hat{k} = 1, 2, \dots, \hat{n}_{el}$. Sin

¹Se advierte al lector no confundir la notación con las estimas E_1 y E_2 .

embargo, el criterio de remallado proporciona el mismo tamaño de elemento en la nueva malla para todos los elementos que se forman a partir del elemento Ω_k . Así, resulta más conveniente usar la notación \hat{H}_k para denotar el tamaño de elemento en la nueva malla asociado al elemento Ω_k . Por supuesto, cada valor de \hat{H}_k puede estar asociado a varios elementos, $\hat{\Omega}_{\hat{k}}$, de la nueva malla, o lo que es lo mismo, varios valores de $\hat{H}_{\hat{k}}$.

La meta es entonces derivar una expresión para \hat{H}_k como función de E_k y H_k , tal que la nueva malla cumpla los requisitos de precisión exigidos a un costo computacional mínimo (malla óptima).

Criterio de aceptabilidad: se dice que una solución aproximada por elementos finitos es aceptable si el error asociado es inferior a un cierto valor de tolerancia dado. Habitualmente, el usuario especifica un error relativo máximo, TOL, y la solución \hat{u}_H (solución en la nueva malla) se considera aceptable si el error asociado, $\hat{e} := u - \hat{u}_H$, verifica

$$|J(\hat{e})| \leq \text{TOL}|J(u)|. \quad (2.3)$$

Sin embargo, un criterio de aceptabilidad global como éste no asegura que se obtenga una cierta precisión en todos los puntos del dominio. Así, es posible también prescribir criterios de aceptabilidad local, de manera que la solución obtenida tenga una precisión uniforme en todo el dominio (ver Díez [8]; Díez y Huerta [33]).

Criterio de optimalidad: Los criterios de optimalidad han de describir qué se entiende por una malla óptima. Estos criterios, en general, se han definido a partir de algún criterio de uniformidad de la distribución espacial del error: se dice que la malla es óptima si el error asociado a la solución que proporciona es uniforme.

2.2.2. Hipótesis requeridas: orden de convergencia local, distribución óptima del error

Derivar un criterio de remallado requiere establecer algunas hipótesis, tanto en la convergencia local de las soluciones como en la distribución del error en la malla óptima.

Primero, una estima a priori es necesaria para las contribuciones locales del error. Normalmente,

$$E_k = C(H_k)^\alpha, \text{ para } k = 1, 2, \dots, n_{el}, \quad (2.4)$$

donde C es una constante independiente del tamaño de la malla y α es el orden de convergencia local de dicha contribución local. El valor de α se deriva de las estimas a priori del error, usualmente en norma de energía debido a que las contribuciones locales del error, E_k , son definidas a partir de una representación del error que implica productos de energía de las cantidades de error, según lo descrito en la ecuación (1.10). Este orden de convergencia se asume además para la nueva malla, esto es

$$\hat{E}_{\hat{k}} = C(\hat{H}_{\hat{k}})^\alpha, \text{ para } \hat{k} = 1, 2, \dots, \hat{n}_{el}, \quad (2.5)$$

En segundo lugar, una hipótesis se debe hacer para la distribución del error en la malla óptima. Esto resulta, usualmente, en establecer una cierta uniformidad en la distribución del error.

Por ejemplo, la nueva malla se busca tal que todas las contribuciones elementales del error sean iguales. Es decir, todos los $\hat{E}_{\hat{k}}$, para $\hat{k} = 1, 2, \dots, \hat{n}_{el}$

De hecho éste es el criterio de remallado propuesto por Li y Bettess [34], [32] para adaptatividad en norma de energía. Este criterio se ha desarrollado para crear las mallas con el mínimo número de elementos posible y la obtención de los valores prescritos del error en norma de energía. En la siguiente sección se prueba que este criterio es también óptimo para el caso de adaptatividad orientada al resultado.

El error prescrito para la nueva malla, \hat{E} es un dato conocido. Así, este criterio de remallado requiere que

$$\hat{E}_{\hat{k}} = \frac{\hat{E}}{\hat{n}_{el}}, \text{ para } \hat{k} = 1, \dots, \hat{n}_{el}, \quad (2.6)$$

Obsérvese que el número de elementos, \hat{n}_{el} , de la nueva malla no es conocido a priori; pero, sin embargo, éste será predicho usando una hipótesis adicional.

2.2.3. Derivación del criterio de remallado

Con los ingredientes enumerados en la sección anterior la expresión para el criterio de remallado se deriva fácilmente. La constante C que corresponde al elemento Ω_k se deduce a partir de la ecuación (2.4), esto es

$$C = \frac{E_k}{(H_k)^\alpha}.$$

Reemplazando C en la ecuación (2.5), usando (2.6) y considerando que, para los nuevos elementos localizados en Ω_k , \hat{H}_k se denota con \hat{H}_k , se consigue

$$\frac{\hat{E}}{\hat{n}_{el}} = E_k \frac{(\hat{H}_k)^\alpha}{(H_k)^\alpha}$$

y, en consecuencia

$$\hat{H}_k = \left[\frac{\hat{E}}{E_k \hat{n}_{el}} \right]^{1/\alpha} H_k, \quad (2.7)$$

donde el número de elementos de la nueva malla, \hat{n}_{el} , es aún desconocido. Al suponer válida la hipótesis de regularización de la malla se puede predecir el valor de \hat{n}_{el} . Se asume que el número de elementos en la nueva malla que ocupan la zona del elemento Ω_k de la malla actual será $[H_k/\hat{H}_k]^d$. Nótese que éste es un caso particular de (2.2) y es equivalente a suponer que el promedio del “aspect ratio” de los elementos en la malla actual y la nueva malla es similar en cada parte del dominio. Así, la siguiente expresión para \hat{n}_{el} es dada

$$\hat{n}_{el} = \sum_{k=1}^{n_{el}} \left[\frac{H_k}{\hat{H}_k} \right]^d. \quad (2.8)$$

Sustituyendo (2.7) en (2.8) se obtiene

$$\begin{aligned} \hat{n}_{el} &= \sum_{k=1}^{n_{el}} \left[\frac{E_k \hat{n}_{el}}{\hat{E}} \right]^{d/\alpha}, \\ &= \frac{(\hat{n}_{el})^{d/\alpha}}{(\hat{E})^{d/\alpha}} \sum_{k=1}^{n_{el}} (E_k)^{d/\alpha}, \end{aligned}$$

donde se obtiene

$$\hat{n}_{el} = \left[\frac{1}{\hat{E}^{d/\alpha}} \sum_{k=1}^{n_{el}} (E_k)^{d/\alpha} \right]^{\alpha/(\alpha-d)}. \quad (2.9)$$

De esta manera \hat{n}_{el} se puede evaluar una vez se hayan calculado todos los errores locales E_k en la malla actual, pues el error en la nueva malla, \hat{E} , es una cantidad prescrita.

En el desarrollo de este apartado ha sido implícitamente supuesto que todas las contribuciones locales del error son positivas o, más generalmente, todas tienen el mismo signo, véase por ejemplo (2.6). Como se dijo previamente, esto

supone tomar valores absolutos de las contribuciones locales y resulta una estrategia muy conservadora, sobre todo si la distribución del error es tal que las contribuciones locales del error tienen signos contrarios y se compensan unas con otras. No obstante, desde un punto de vista práctico, aprovechando que el equilibrado de las contribuciones del error con signo contrario no es nada realista, es muy fácil definir una representación apropiada para el criterio de remallado.

2.2.4. Optimalidad de la distribución uniforme del error

En el apartado anterior se dijo que la distribución uniforme del error dado por (2.6) es óptimo, en el sentido que produce las mallas con el mínimo número de elementos. Esta afirmación es demostrada para adaptatividad en norma energía por Li y Bettess [32] y la misma razón también es válida en contexto de adaptatividad orientada al resultado.

La idea se sigue al tomar \hat{E}_k para $k = 1, \dots, n_{el}$ como incógnitas. Usando las estimas a priori locales (2.4) y (2.5) se obtiene

$$\frac{H_k}{\hat{H}_k} = \left[\frac{E_k}{\hat{E}_k} \right]^{1/\alpha} \quad (2.10)$$

Reemplazando (2.10) en (2.8) se tiene

$$\hat{n}_{el} = \sum_{k=1}^{n_{el}} \left[\frac{E_k}{\hat{E}_k} \right]^{d/\alpha} \quad (2.11)$$

Se quiere entonces encontrar \hat{E}_k para $k = 1, \dots, n_{el}$ tal que \hat{n}_{el} sujeto a la condición

$$\hat{E} = \sum_{k=1}^{\hat{n}_{el}} \hat{E}_{\hat{k}}, \quad (2.12)$$

sea mínimo.

Ahora, a partir de la hipótesis de regularización de la malla, esto es equivalente a

$$\begin{aligned} \hat{E} &= \sum_{k=1}^{n_{el}} \hat{E}_k \left[\frac{H_k}{\hat{H}_k} \right]^d, \\ &= \sum_{k=1}^{n_{el}} \hat{E}_k \left[\frac{E_k}{\hat{E}_k} \right]^{d/\alpha}, \\ &= \sum_{k=1}^{n_{el}} [(\hat{E}_k)^{1-d/\alpha} (E_k)^{d/\alpha}]. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Así, usando los multiplicadores de Lagrange apropiados, minimizar (2.11) sujeta a la restricción (2.13) es equivalente a encontrar \hat{E} para $k = 1, \dots, n_{el}$ y λ tal que

$$F(\hat{E}_1, \dots, \hat{E}_{n_{el}}, \lambda) := \sum_{k=1}^{n_{el}} \left[\frac{E_k}{\hat{E}_k} \right]^{d/\alpha} - \lambda \left(\hat{E} - \sum_{k=1}^{n_{el}} [(\hat{E}_k)^{1-d/\alpha} (E_k)^{d/\alpha}] \right) \quad (2.14)$$

sea estacionaria. Es decir, para todo l desde 1 hasta n_{el} ,

$$\frac{\partial F}{\partial \hat{E}_l} = 0, \text{ esto es } (E_l)^{d/\alpha} (\hat{E}_l)^{-d/\alpha} \left[\left(\frac{d}{\alpha} \right) (\hat{E}_l)^{-1} + \lambda \left(1 - \frac{d}{\alpha} \right) \right] = 0. \quad (2.15)$$

Por lo tanto,

$$\hat{E}_l = \frac{d}{\lambda(\alpha - d)}. \quad (2.16)$$

Obviamente, esto requiere que todos los valores de $\hat{E}_{\hat{k}}$ para $\hat{k} = 1, \dots, \hat{n}_{el}$ sean iguales y por lo tanto el criterio de optimalidad (2.6) utilizado en el apartado anterior es óptimo en el sentido que se espera que la nueva malla tenga el mínimo número de elementos. Este criterio y la correspondiente estrategia de remallado son denotados en todo lo que sigue por UED (del inglés: Uniform Error distribution).

Sin embargo, otros criterios de optimalidad pueden abordar otras características deseables para una malla óptima y ser utilizados para derivar otras expresiones para los criterios de remallado.

Experimentación numérica

En el presente capítulo todos los ejemplos se trabajan sobre el dominio, $\Omega = (0,1) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2$, y en cada caso se especificará las condiciones de contorno. Para encontrar una solución aproximada al problema en estudio, se utilizarán elementos cuadriláteros en la discretización del dominio Ω , funciones de formas bilineales y 9 puntos de Gauss para la integración.

La representación de la cantidad de interés está dada por el funcional $J(\cdot)$ y en cada ejemplo se indicará como ha sido escogida. E_k representa la estimación del error que puede tomar los valores $E_1 \approx \mathcal{R}^P(\varepsilon)$ o $E_2 \approx \mathcal{R}^D(e)$. Como la estima E_k aproxima el error en la cantidad de interés, es decir, $E_k \approx J(e) = J(u) - J(u_H)$, el error relativo de la aproximación se define por

$$e_{rel} := \left| \frac{E_k}{J(u)} \right|,$$

cuando la solución exacta u es conocida, y por

$$e_{rel} := \left| \frac{E_k}{J(u^{ref})} \right|,$$

cuando u no es conocida, siendo u^{ref} una solución de referencia.

Como medida de efectividad de la estima propuesta, se usará el *índice de efectividad*, representado por Θ_k , y definido por

$$\Theta_k = \frac{E_k}{J(e)},$$

cuando la solución es conocida analíticamente, y en caso contrario

$$\Theta_k = \frac{E_k}{J(e^{ref})},$$

donde $J(e^{ref}) = J(u^{ref}) - J(u_H)$.

Por último, el proceso de remallado (definición de la nueva malla) será llevado a cabo a partir de (2.7) y (2.9).

Ejemplo 1 Considere el problema primal

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{en } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \Gamma_{D_1}, \\ u = 1, & \text{sobre } \Gamma_{D_2}, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \setminus (\bar{\Gamma}_{D_1} \cup \bar{\Gamma}_{D_2}), \end{cases}$$

donde

$$\begin{aligned} \Gamma_{D_1} &:= \{(x, y) \in \Omega : x = 0, 0 < y < 1\}, \\ \Gamma_{D_2} &:= \{(x, y) \in \Omega : x = 1, 0 < y < 1\} \end{aligned}$$

y solución exacta dada por $u(x, y) = x^2$; se infiere que $f = -2$.

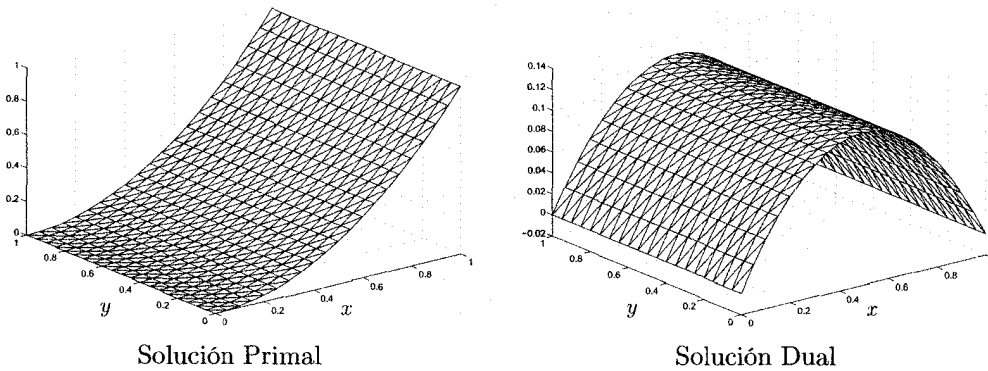


Figura 3.1: Ejemplo 1. Soluciones aproximada por el MEF

El espacio de funciones V , donde se encuentra la solución se define como

$$V := \{u \in \mathcal{H}^1(\Omega) : u = 0 \text{ en } \Gamma_{D_1}, u = 1 \text{ en } \Gamma_{D_2}\},$$

y el espacio de variaciones, V_0 , se define como

$$V_0 := \{u \in \mathcal{H}^1(\Omega) : u = 0 \text{ en } \Gamma_{D_1} \cup \Gamma_{D_2}\}.$$

La cantidad de interés para el control del error del problema está dada por

$$J(u) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u(\mathbf{x}) \cdot j(\mathbf{x}) d\Omega. \quad (3.1)$$

Entonces, el problema dual viene dado por,

$$\begin{cases} -\Delta z = j, & \text{en } \Omega, \\ z = 0, & \text{en } \Gamma_{D_1} \cup \Gamma_{D_2}, \\ \frac{\partial z}{\partial \mathbf{n}} = 0, & \text{en } \partial\Omega \setminus (\bar{\Gamma}_{D_1} \cup \bar{\Gamma}_{D_2}), \end{cases}$$

donde la solución de este problema pertenece al espacio V_0 . Para el ejemplo se elige $j = 1$. Las soluciones primal y dual quedan dadas, geoméricamente, en la Figura 3.1.

Malla	n_{el}	$J(e)$	$E_1 = E_2$	e_{rel}	$\Theta_1 = \Theta_2$
0	100	-1.667×10^{-3}	-1.373×10^{-3}	4.119×10^{-3}	0.82
1	400	-4.167×10^{-4}	-3.526×10^{-4}	1.058×10^{-3}	0.85
2	1600	-1.042×10^{-4}	-8.934×10^{-5}	2.680×10^{-4}	0.86
3	3600	-4.630×10^{-5}	-3.988×10^{-5}	1.196×10^{-4}	0.86
4	6400	-2.604×10^{-5}	-2.248×10^{-5}	6.745×10^{-5}	0.86
5	10000	-1.667×10^{-5}	-1.441×10^{-5}	4.322×10^{-5}	0.86

Cuadro 3.1: Ejemplo 1. Malla, números de elementos, error exacto en la cantidad de interés, estimación del error, error relativo de la estima e índice de efectividad sobre varias **mallas uniforme**, utilizando las funciones burbujas sobre aristas propuesta por Rosales y Diez.

En el Cuadro 3.1 se presentan los resultados numéricos obtenidos para 6 mallas uniformes utilizando la familia de funciones burbujas sobre aristas propuesta por Rosales y Diez. Aquí, n_{el} , es el número de elementos de la malla; $J(e)$, es el error exacto en la cantidad de interés; E_1 y E_2 , son las estimas presentadas en (1.58) y (1.59), respectivamente; e_{rel} , es el error relativo a $J(u)$; Θ_k , con $k = 1, 2$, es el índice de efectividad global de las estimas. Además, se utilizó 9 puntos de Gauss para la aproximación de las estimas, tanto en la integración sobre cuadrilátero (estimación interior) y sobre triángulo (estimación sobre aristas). Dado que las estimaciones E_1 y E_2 resultan iguales para el ejemplo, las dos son mostradas en la cuarta columna del Cuadro 3.1.

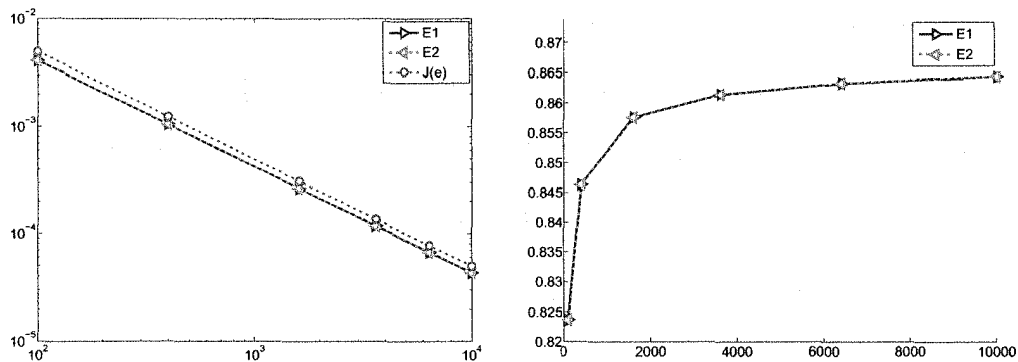


Figura 3.2: Ejemplo 1. Izquierda: error relativo de las estimaciones del error en la cantidad de interés y su valor real usando mallas uniformes (resultados dados en el Cuadro 3.1). Derecha: índice de efectividad de las estimas.

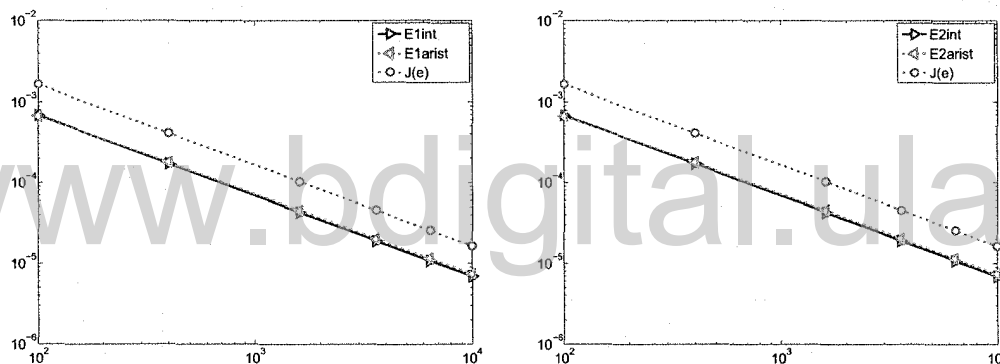


Figura 3.3: Ejemplo 1. Izquierda: gráfica del valor absoluto de la cantidad de interés $J(e)$ y de la estima E_1 interior y sobre arista (usando Rosales y Díez). Derecha: gráfica del valor absoluto de la cantidad de interés $J(e)$ y de la estima E_2 interior y sobre arista.

En la Figura 3.2 de la izquierda se representa la gráfica del error relativo de las estimas E_1 y E_2 , y el valor real del error en la cantidad de interés usando varias mallas uniformes, los valores numéricos son dados en el Cuadro 3.1. Se puede observar que las estimas tienen el mismo orden de convergencia que el valor teórico del error $J(e)$. El índice de efectividad global de las estimas E_1 y E_2 es aproximadamente 86 %, como se puede notar en la representación gráfica de la Figura 3.2 de la derecha.

La Figura 3.3 (izquierda) ilustra la representación gráfica del valor absoluto de la cantidad de interés $J(e)$ y de las contribuciones por separado de la estima E_1 interior y sobre arista (usando Rosales y Díez). Se puede observa que el

aporte de la estimación interior es aproximadamente la misma que el aporte sobre arista.

En el Cuadro 3.2 se presentan los resultados numéricos obtenidos sobre 6 mallas uniformes utilizando la familia de funciones burbujas sobre aristas propuesta en este trabajo.

Malla	n_{el}	$J(e)$	$E_1 = E_2$	e_{rel}	$\Theta_1 = \Theta_2$
0	100	-1.667×10^{-3}	-1.180×10^{-3}	3.539×10^{-3}	0.71
1	400	-4.167×10^{-4}	-3.017×10^{-4}	9.050×10^{-4}	0.72
2	1600	-1.042×10^{-4}	-7.626×10^{-5}	2.288×10^{-4}	0.73
3	3600	-4.630×10^{-5}	-3.402×10^{-5}	1.021×10^{-4}	0.74
4	6400	-2.604×10^{-5}	-1.917×10^{-5}	5.751×10^{-5}	0.74
5	10000	-1.667×10^{-5}	-1.228×10^{-5}	3.685×10^{-5}	0.74

Cuadro 3.2: Ejemplo 1. Malla, números de elementos, error exacto en la cantidad de interés, estima, error relativo de la estima e índice de efectividad sobre varias **mallas uniforme**, utilizando las funciones burbujas propuesta en este trabajo.

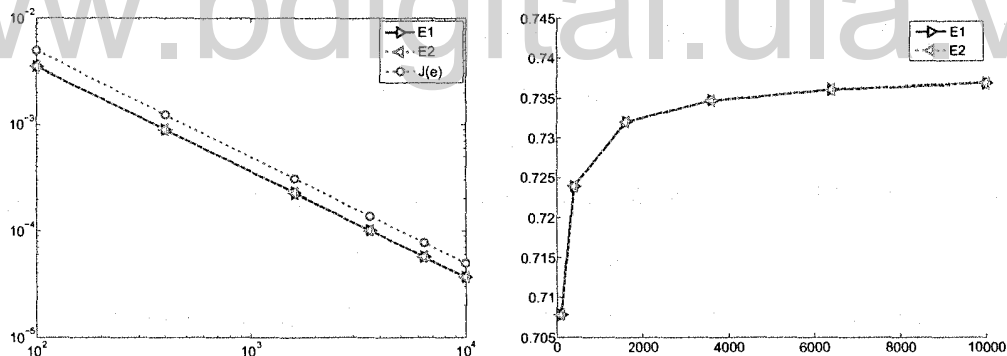


Figura 3.4: Ejemplo 1. Izquierda: error relativo de las estimas y de la solución analítica usando mallas uniformes. Derecha: gráfica del índice de efectividad de las estimas.

En la Figura 3.4 de la izquierda es la representación gráfica del error relativo de las estimas E_1 y E_2 , y del error exacto en la cantidad de interés usando mallas uniformes y las funciones burbujas propuestas en este trabajo. Se puede observar que las estimas tienen el mismo orden de convergencia que el valor teórico del error $J(e)$. El índice de efectividad global de las estimas E_1 y E_2 es aproximadamente 74 %, como se puede notar en la representación gráfica de la Figura 3.4 de la derecha.

En la Figura 3.5 de la izquierda es la representación gráfica del valor absoluto de la cantidad de interés $J(e)$ y de las contribuciones por separado de la estima E_1 interior y sobre arista. En este caso, de las funciones burbuja propuestas acá, el aporte de la estimación interior es superior que el aporte sobre arista.

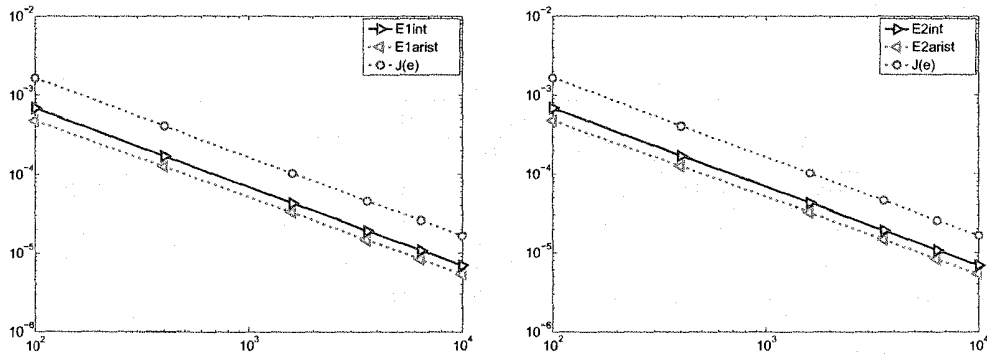


Figura 3.5: Ejemplo 1. Izquierda: gráfica del valor absoluto de la cantidad de interés $J(e)$ y de la estima E_1 interior y arista. Derecha: gráfica del valor absoluto de la cantidad de interés $J(e)$ y de la estima E_2 interior y arista.

Ejemplo 2 Considere el siguiente problema primal

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{en } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \Gamma_D, \end{cases}$$

donde $\Gamma_D := \partial\Omega$ y f es elegido de modo que la solución exacta del problema es

$$u(x, y) := x(x-1)(y-1)y$$

El espacio de funciones V , donde se encuentra la solución se define como

$$V := \{u \in \mathcal{H}^1(\Omega) : u \in \Gamma_D\},$$

y el espacio de variaciones, V_0 , se define como

$$V_0 := \{u \in \mathcal{H}^1(\Omega) : u = 0 \text{ en } \Gamma_D\}.$$

Al igual que en el ejemplo anterior, la cantidad de interés está dada por (3.1) y $j = 1$. Por lo tanto, el problema dual viene dado por,

$$\begin{cases} -\Delta z = j, & \text{en } \Omega, \\ z = 0, & \text{sobre } \Gamma_D, \end{cases}$$

Las soluciones primal y dual quedan dadas, geoméricamente, en la Figura 3.6.

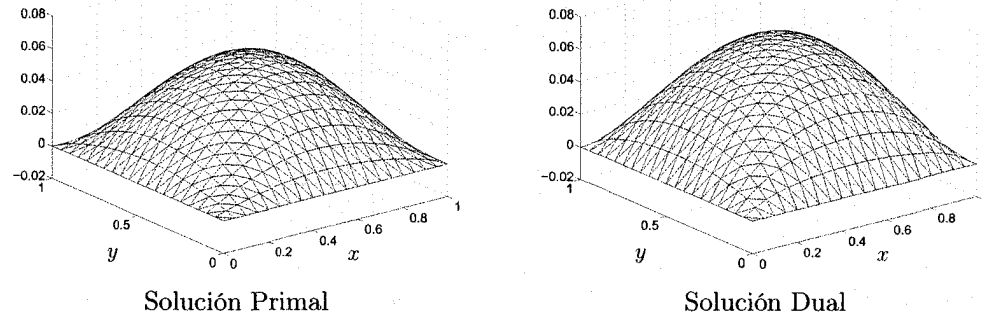


Figura 3.6: Ejemplo 2. Soluciones aproximada por el MEF

Los cuadros 3.3 y 3.4 presentan los resultados numéricos obtenidos sobre 6 mallas uniformes utilizando la familia de funciones burbujas sobre aristas propuesta por Rosales y Díez y las propuestas en este trabajo, respectivamente.

Malla	n_{el}	$J(e)$	$E_1 = E_2$	e_{rel}	$\Theta_1 = \Theta_2$
0	100	3.220×10^{-4}	2.399×10^{-4}	8.638×10^{-3}	0.75
1	400	8.036×10^{-5}	6.167×10^{-5}	2.220×10^{-3}	0.77
2	1600	2.008×10^{-5}	1.566×10^{-5}	5.639×10^{-4}	0.78
3	3600	8.924×10^{-6}	7.001×10^{-6}	2.520×10^{-4}	0.78
4	6400	5.020×10^{-6}	3.949×10^{-6}	1.422×10^{-4}	0.79
5	10000	3.213×10^{-6}	2.532×10^{-6}	9.115×10^{-5}	0.79

Cuadro 3.3: Ejemplo 2. Malla, números de elementos, error exacto en la cantidad de interés, estimaciones, error relativo de la estima e índice de efectividad sobre varias **mallas uniforme**, utilizando las funciones burbujas sobre aristas propuesta por Rosales y Díez.

La Figura 3.7 de la izquierda es la representación gráfica del error relativo de las estimaciones E_1 y E_2 , y del error exacto en la cantidad de interés usando varias mallas uniformes (usando los resultados numéricos presentados en el Cuadro 3.3 y las funciones burbujas propuestas por Rosales y Díez). Al igual que el ejemplo anterior, se puede observar que las estimas tienen el mismo orden de convergencia que el valor teórico del error $J(e)$. El índice de efectividad global de las estimas E_1 y E_2 es de aproximadamente el 79%, como se puede notar en la gráfica de la Figura 3.7 de la derecha.

En la Figura 3.8 de la izquierda es la representación gráfica del valor absoluto de la cantidad de interés $J(e)$ y de las contribuciones interior y sobre arista de la

Malla	n_{el}	$J(e)$	$E_1 = E_2$	e_{rel}	$\Theta_1 = \Theta_2$
0	100	3.220×10^{-4}	2.294×10^{-4}	8.258×10^{-3}	0.71
1	400	8.036×10^{-5}	5.860×10^{-5}	2.109×10^{-3}	0.73
2	1600	2.008×10^{-5}	1.483×10^{-5}	5.340×10^{-4}	0.74
3	3600	8.924×10^{-6}	6.623×10^{-6}	2.384×10^{-4}	0.74
4	6400	5.020×10^{-6}	3.734×10^{-6}	1.344×10^{-4}	0.74
5	10000	3.213×10^{-6}	2.393×10^{-6}	8.615×10^{-5}	0.75

Cuadro 3.4: Ejemplo 2. Malla, números de elementos, error exacto en la cantidad de interés, estima, error relativo de la estima e índice de efectividad sobre varias **mallas uniforme**, utilizando las funciones burbujas sobre aristas propuesta en este trabajo.

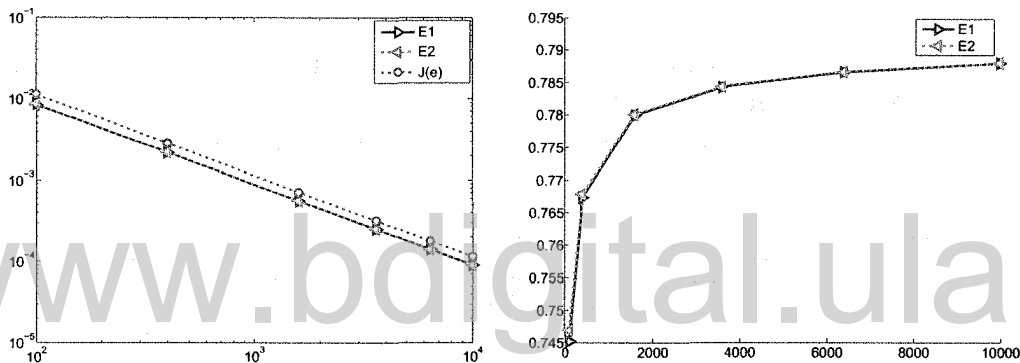


Figura 3.7: Ejemplo 2. Izquierda: error relativo de las estimas y error exacto usando mallas uniformes (resultados dados en el Cuadro 3.3). Derecha: índice de efectividad de las estimas.

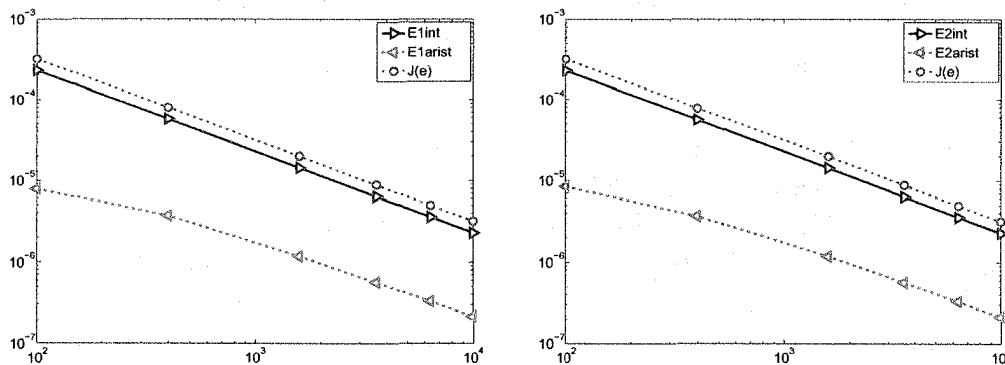


Figura 3.8: Ejemplo 2. Izquierda: gráfica del valor absoluto de la cantidad de interés $J(e)$ y de la estima E_1 interior y sobre arista. Derecha: gráfica del valor absoluto de de la cantidad de interés $J(e)$ y de la estima E_2 interior y sobre arista.

estima E_1 usando Rosales y Díez. En este caso, se puede observar que el aporte del estima interior es superior que el aporte sobre arista.

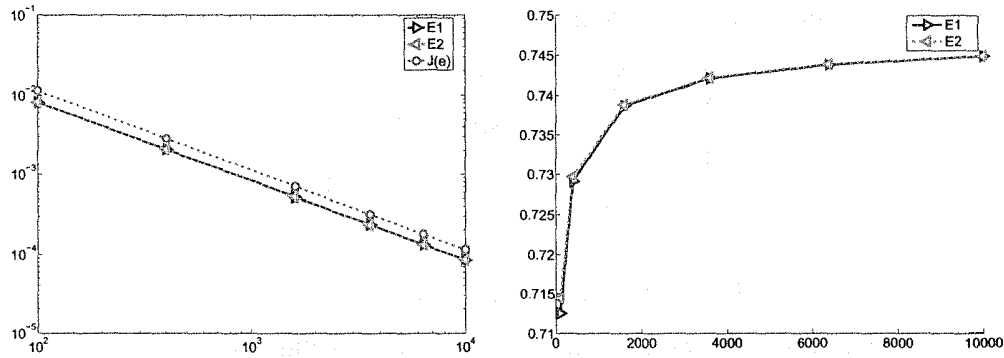


Figura 3.9: Ejemplo 2. Izquierda: gráfica del error relativo de las estimas y del error exacto usando mallas uniformes (Cuadro 3.4). Derecha: gráfica del índice de efectividad de las estimas.

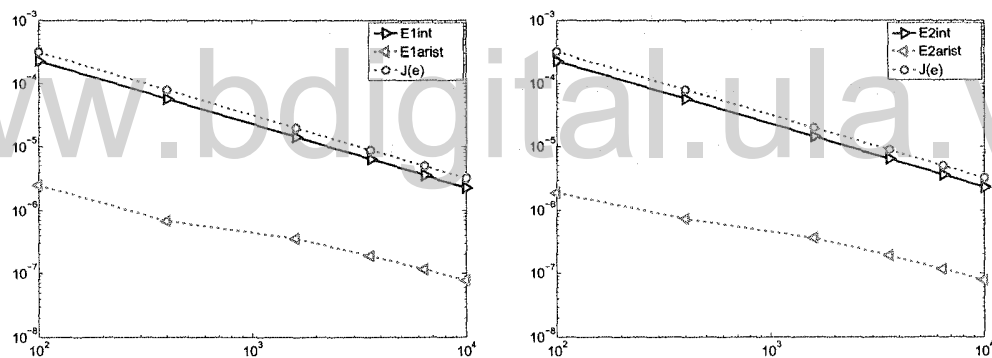


Figura 3.10: Ejemplo 2. Izquierda: gráfica del valor absoluto de la cantidad de interés $J(e)$ y de la estima E_1 interior y sobre arista. Derecha: gráfica del valor absoluto de la cantidad de interés $J(e)$ y de la estima E_2 interior y sobre arista.

La Figura 3.9 de la izquierda representa la gráfica del error relativo de las estimas E_1 y E_2 , y de la solución analítica usando varias mallas uniformes, de los resultados numéricos presentados en el Cuadro 3.4, donde se puede observar que las estimas tienen el mismo orden de convergencia que el valor teórico del error $J(e)$. El índice de efectividad global de las estimas E_1 y E_2 es aproximadamente 74%, como se puede notar en la representación gráfica de la Figura 3.9 de la derecha.

La Figura 3.10 de la izquierda representa la gráfica del valor absoluto de la cantidad de interés $J(e)$ y de las contribuciones interior y sobre arista de la

estima E_1 . Se puede observar que el aporte de la estima interior es superior que el aporte sobre arista.

Ejemplo 3 Considere el problema primal

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{en } \Omega, \\ u = u(x, y), & \text{sobre } \Gamma_D, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \setminus \Gamma_D, \end{cases}$$

donde

$$\Gamma_D := \{(x, y) \in \Omega : 0 < x < 1, y = 0\}$$

y f es elegido de modo que la solución exacta del problema es

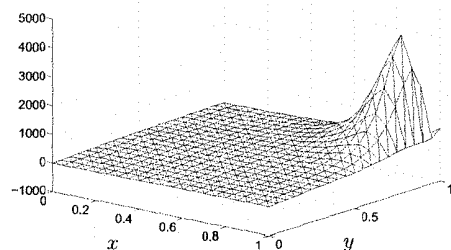
$$u(x, y) := 5x^2(1 - x^2)(e^{10x^2} - 1)y^2(1 - y^2)(e^{10y^2} - 1).$$

El espacio de funciones V , donde se encuentra la solución se define como

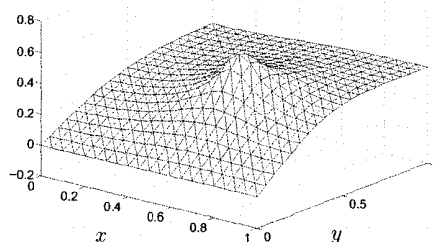
$$V := \{u \in \mathcal{H}^1(\Omega) : u = u(x, y) \text{ si } (x, y) \in \Gamma_D\},$$

y el espacio de variaciones, V_0 , se define como

$$V_0 := \{u \in \mathcal{H}^1(\Omega) : u = 0 \text{ en } \Gamma_D\}.$$



Solución Primal



Solución Dual

Figura 3.11: Ejemplo 3. Soluciones aproximada por el MEF

La cantidad de interés está dada por

$$J(u) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u(\mathbf{x}) \cdot W_{\varepsilon}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) d\Omega$$

con $\mathbf{x}_0 = (0.6, 0.4)$ y $\varepsilon = 0.1$. Es decir, $j = W_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$, dada en (1.13). Por lo tanto, el problema dual viene dado por,

$$\begin{cases} -\Delta z = j, & \text{en } \Omega, \\ z = 0, & \text{en } \Gamma_D, \\ \frac{\partial z}{\partial \mathbf{n}} = 0, & \text{en } \partial\Omega \setminus \Gamma_{D_1}, \end{cases}$$

Las soluciones primal y dual quedan dadas, geoméricamente, en la Figura 3.11.

Se quiere controlar el error cometido en la cantidad de interés $J(\cdot)$ al sustituir la solución exacta u del problema primal por la solución aproximada u_H , obtenida por el MEF, tal que el error relativo de la estima tenga una tolerancia de error de 3.0×10^{-2} . Este control, se realizará mediante un proceso adaptativo que definirá una malla optima para lograr dicho control. El proceso se inicia con una malla uniforme de 625 elementos (se utiliza el programa de mallado `ez4u` para generar esta malla y las subsiguientes mallas), el criterio de remallado h -adaptativo presentado en [31], y definido por (2.7) y (2.9), y las estimas E_1 y E_2 , con las dos familias de funciones burbujas sobre aristas presentada en el Capítulo 1. No obstante, el proceso adaptativo será conducido por los resultados que se obtienen a partir de E_1 , es decir, los errores estimados por E_1 ; E_2 es evaluado en las mallas generadas a partir de E_1 .

En los cuadros 3.5 y 3.6 se presentan los resultados numéricos obtenidos en el proceso adaptativo, utilizando la familia de funciones burbujas sobre aristas propuesto por Rosales y Díez. El primero para la estima E_1 y el segundo para E_2 .

Malla	n_{el}	$J(e)$	E_1	e_{rel}	Θ_1
0	625	-8.042×10^{-1}	-7.585×10^{-1}	2.792×10^{-1}	0.94
1	1900	2.534×10^{-2}	-1.926×10^{-2}	7.097×10^{-3}	-0.76
2	2504	-4.081×10^{-2}	-4.106×10^{-2}	1.513×10^{-2}	1.01
3	2721	-4.524×10^{-2}	-4.280×10^{-2}	1.577×10^{-2}	0.95
4	2678	-3.937×10^{-2}	-3.779×10^{-2}	1.393×10^{-2}	0.96
5	2593	-4.927×10^{-2}	-4.340×10^{-2}	1.599×10^{-2}	0.88

Cuadro 3.5: Ejemplo 3. Malla, números de elementos, error exacto en la cantidad de interés, estima, error relativo de la estima e índice de efectividad usando **mallas adaptadas**, utilizando las funciones burbujas sobre aristas propuesta por Rosales y Díez.

En la Figura 3.12 de la izquierda se representa el error relativo de las estimas E_1 y E_2 sobre mallas adaptadas, denotadas por $Adap E_1$ y $Adap E_2$, de los resultados numéricos presentados en los cuadros 3.5 y 3.6, y sobre mallas uniformes,

Malla	n_{el}	$J(e)$	E_2	e_{rel}	Θ_2
0	625	-8.042×10^{-1}	-6.793×10^{-1}	2.500×10^{-1}	0.85
1	1900	2.534×10^{-2}	-2.068×10^{-3}	7.620×10^{-4}	-0.08
2	2504	-4.081×10^{-2}	-3.703×10^{-2}	1.365×10^{-2}	0.91
3	2721	-4.524×10^{-2}	-4.055×10^{-2}	1.494×10^{-2}	0.90
4	2678	-3.937×10^{-2}	-3.599×10^{-2}	1.326×10^{-2}	0.91
5	2593	-4.927×10^{-2}	-4.077×10^{-2}	1.502×10^{-2}	0.83

Cuadro 3.6: Ejemplo 3. Malla, números de elementos, error exacto en la cantidad de interés, estima, error relativo de la estima e índice de efectividad usando **mallas adaptadas**, utilizando las funciones burbujas sobre aristas propuesta por Rosales y Díez.

denotadas por Unif E_1 y Unif E_2 . Para efectos de comparación, se lleva al mismo tiempo la gráfica de $J(e)$, dejando claro el buen comportamiento de las estimas. Se puede observar que se logra acelerar la convergencia del error relativo y que la tolerancia escogida en el criterio de remallado de $TOL = 10^{-3}$ es alcanzada en la primera iteración. El índice de efectividad global de las estimas E_1 y E_2 , tanto en mallas adaptadas como en mallas uniformes, es dado en la gráfica de la derecha de la Figura 3.12.

Resulta apropiado hacer notar, a partir de la Figura 3.12 (izquierda), que aunque se permita que el proceso adaptativo avance, es decir, se sigan generando mallas, estas difieren muy poco (generalmente consecuencia del software) en número de elementos, y por tanto su error se mantiene estable. Como consecuencia de lo anterior, el índice de efectividad se mantiene estable.

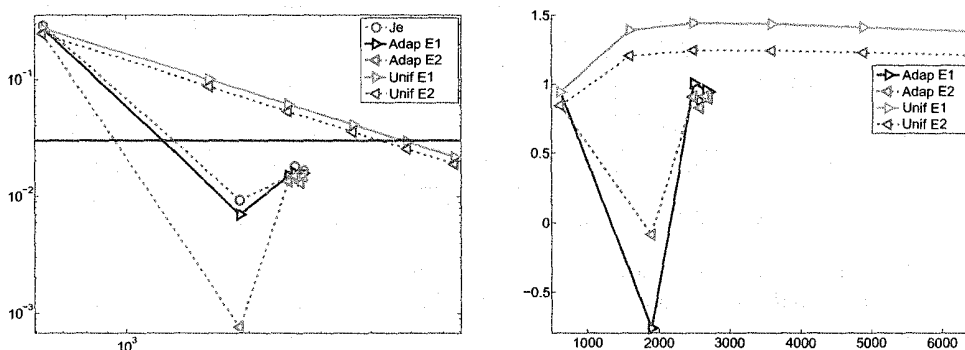


Figura 3.12: Ejemplo 3. Izquierda: gráfica del error relativo de las estimas sobre mallas adaptadas (Adap) y uniformes (Unif) (ver los cuadros 3.5 y 3.6). Derecha: gráfica del índice de efectividad de las estimas sobre mallas adaptadas (Adap) y uniformes (Unif).

La Figura 3.13 representa las gráficas del valor absoluto de la cantidad de interés $J(e)$ y de las contribuciones interior y sobre arista de la estima E_1 (izquierda), y estima E_2 (derecha), utilizando las funciones burbujas propuesta por Rosales y Díez. De forma análoga, se hace la representación para las funciones burbujas propuesta en esta tesis, ver Figura 3.14. En ambos casos se observa que el aporte sobre la arista es superior que el aporte interior.

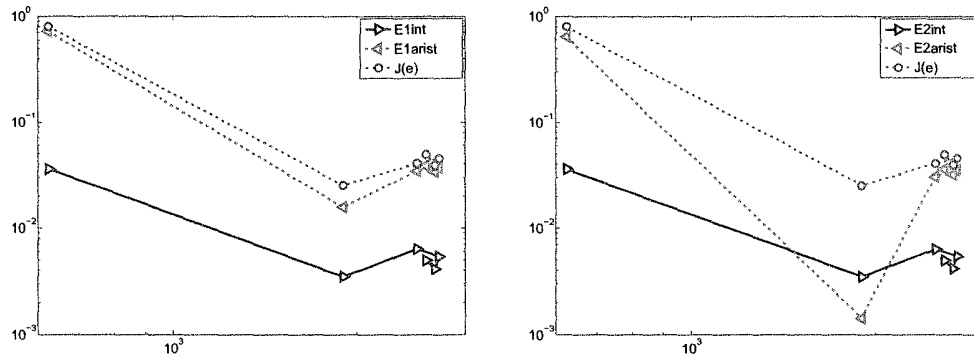


Figura 3.13: Ejemplo 3. Izquierda: gráfica del valor absoluto de la cantidad de interés $J(e)$ y de la estima E_1 interior y sobre arista. Derecha: gráfica del valor absoluto de de la cantidad de interés $J(e)$ y de la estima E_2 interior y sobre arista. Se utilizan las funciones burbujas propuesta por Rosales y Díez.

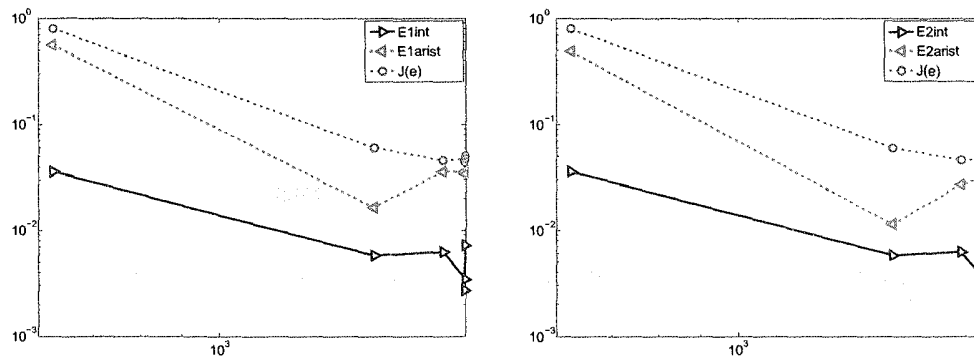


Figura 3.14: Ejemplo 3. Izquierda: gráfica del valor absoluto de la cantidad de interés $J(e)$ y de la estima E_1 interior y sobre arista. Derecha: gráfica del valor absoluto de de la cantidad de interés $J(e)$ y de la estima E_2 interior y sobre arista. Se utilizan las funciones burbujas propuesta en esta tesis.

Para generar las mallas uniformes, 625, 1600, 2500, 3600, 4900 y 6400 elementos, se tomaron tamaños de elementos decrecientes, uniforme sobre todo el

dominio. Se calcularon las estimas sobre estas mallas, donde se observa que para alcanzar la tolerancia dada es necesario tomar un número mayor de elementos (alrededor de 5000) que los usados con las mallas adaptadas que están en el orden de los 2000 elementos.

Algunas mallas obtenidas mediante el proceso adaptativo se puede observar en la Figura 3.15

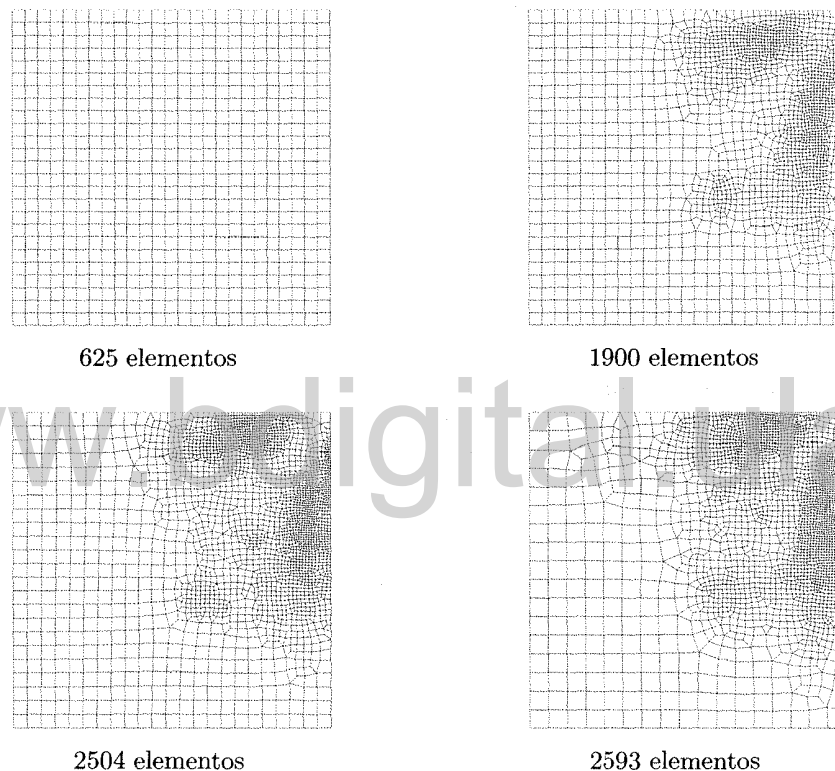


Figura 3.15: Ejemplo 3. Mallas adaptadas a partir de las funciones burbujas propuestas por Rosales y Díez

En los cuadros 3.7 y 3.8 se presentan los resultados numéricos obtenidos en el proceso adaptativo, utilizando la familia de funciones burbujas sobre aristas propuesto en este trabajo.

En la Figura 3.16 de la izquierda se representa el error relativo de las estimas E_1 y E_2 sobre mallas adaptadas, Adap E_1 y Adap E_2 , de los resultados numéricos presentados en los cuadros 3.7 y 3.8, y sobre mallas uniformes, Unif E_1 y Unif E_2 . Nuevamente, se acelera la convergencia del error relativo, y la tolerancia

Malla	n_{el}	$J(e)$	E_1	e_{rel}	Θ_1
0	625	-8.042×10^{-1}	-5.993×10^{-1}	2.206×10^{-1}	0.751
1	1547	6.049×10^{-2}	-2.238×10^{-2}	8.248×10^{-3}	-0.37
2	1877	-4.618×10^{-2}	-4.222×10^{-2}	1.556×10^{-2}	0.91
3	1998	-4.759×10^{-2}	-3.967×10^{-2}	1.462×10^{-2}	0.83
4	1994	-4.480×10^{-2}	-3.808×10^{-2}	1.403×10^{-2}	0.85
5	1997	-5.071×10^{-2}	-4.144×10^{-2}	1.527×10^{-2}	0.82

Cuadro 3.7: Ejemplo 3. Malla, números de elementos, error exacto en la cantidad de interés, estima, error relativo de la estima e índice de efectividad usando **mallas adaptadas**, utilizando las funciones burbujas sobre aristas propuesta en este trabajo.

Malla	n_{el}	$J(e)$	E_2	e_{rel}	Θ_2
0	625	-8.042×10^{-1}	-5.272×10^{-1}	1.940×10^{-1}	0.66
1	1547	6.049×10^{-2}	5.649×10^{-3}	2.082×10^{-3}	0.09
2	1877	-4.618×10^{-2}	-3.325×10^{-2}	1.226×10^{-2}	0.72
3	1998	-4.759×10^{-2}	-3.550×10^{-2}	1.308×10^{-2}	0.75
4	1994	-4.480×10^{-2}	-3.384×10^{-2}	1.247×10^{-2}	0.76
5	1997	-5.071×10^{-2}	-3.708×10^{-2}	1.366×10^{-2}	0.73

Cuadro 3.8: Ejemplo 3. Malla, números de elementos, error exacto en la cantidad de interés, estima, error relativo de la estima e índice de efectividad usando **mallas adaptadas**, utilizando las funciones burbujas sobre aristas propuesta en este trabajo.

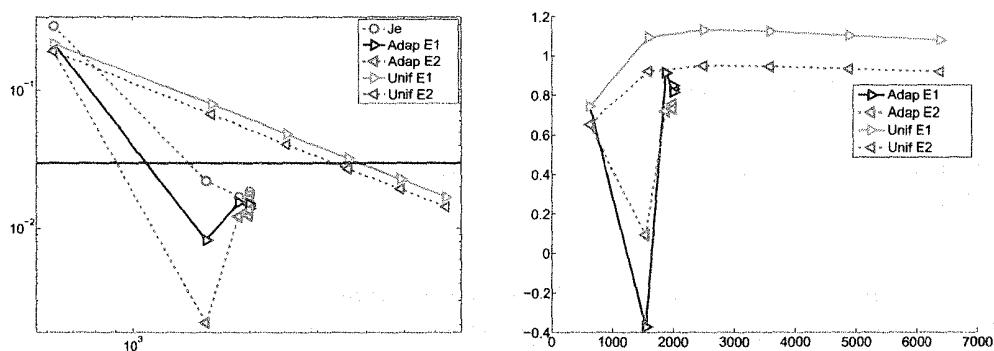
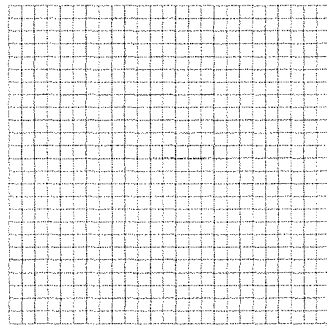


Figura 3.16: Ejemplo 3. Izquierda: gráfica del error relativo de las estimas sobre mallas adaptadas (Adap) y uniformes (Unif) (ver los cuadros 3.7 y 3.8). Derecha: índice de efectividad de las estimas sobre mallas adaptadas (Adap) y uniformes (Unif).

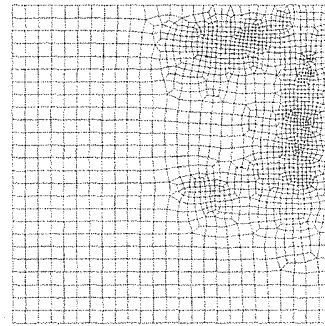
escogida en el criterio de remallado, $TOL = 10^{-3}$, es alcanzada en la primera iteración. A la derecha de la Figura 3.16 se dan los índices de efectividad global

de las estimas E_1 y E_2 .

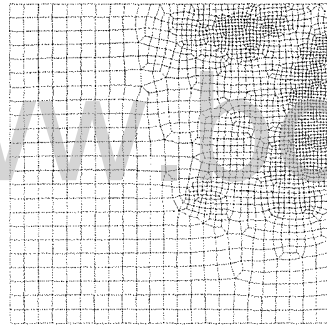
Algunas mallas obtenidas mediante el proceso adaptativo se puede observar en la Figura 3.17



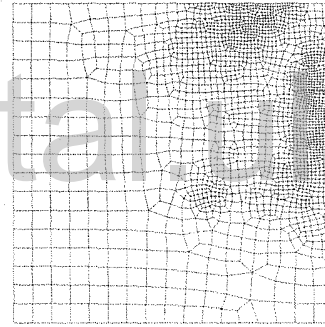
625 elementos



1547 elementos



1877 elementos



1997 elementos

Figura 3.17: Ejemplo 3. Mallas adaptadas a partir de las funciones burbujas propuestas en este trabajo.

Al comparar las dos familias de mallas obtenidas: las dadas en la Figura 3.15 para las funciones burbujas propuestas por Rosales y Díez y las dadas en 3.17 para las funciones burbujas propuestas en este trabajo, se puede apreciar un comportamiento cualitativo similar. Sin embargo, el número de elementos necesarios para alcanzar la tolerancia prescrita resulta menor con la propuesta dada en este trabajo.

En la Figura 3.18 se muestra las diferencias (error relativo) que producen las dos familias de funciones burbujas propuestas: Adap R E_1 para la propuesta por Rosales y Díez, y Adap J E_1 para la propuesta en este trabajo. La familia

de funciones burbujas propuestas acá presentan un mejor rendimiento, pues los errores se estabilizan con un número menor de elementos, hecho ya comentado anteriormente.

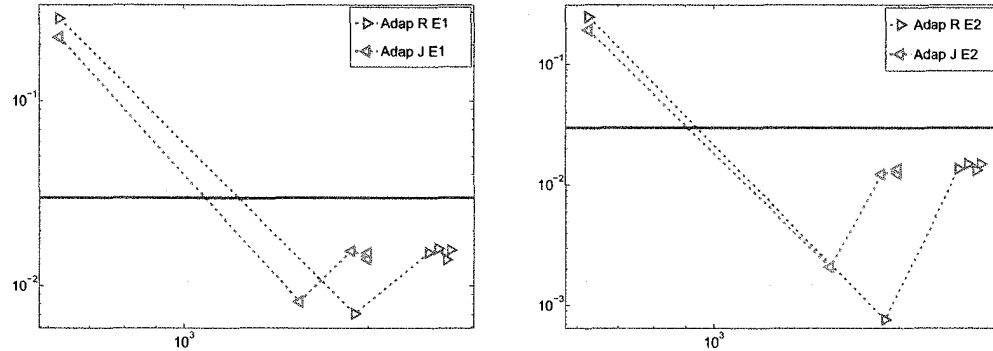


Figura 3.18: Ejemplo 3. Error relativo de las estimas E_1 y E_2 usando las dos familias de funciones burbujas.

Ejemplo 4 Considere el problema primal

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{en } \Omega, \\ u = u(x, y), & \text{sobre } \Gamma_D, \end{cases}$$

donde $\Gamma_D := \partial\Omega$ y f es elegido de modo que la solución exacta del problema es

$$u(x, y) := x \left(0.6 + e^{-10.5(1-(x-0.5)^2/0.25^2-(y-0.5)^2/0.25^2)^2} \right).$$

El espacio de funciones V , donde se encuentra la solución se define como

$$V := \{u \in \mathcal{H}^1(\Omega) : u = u(x, y) \text{ si } (x, y) \in \Gamma_D\},$$

y el espacio de variaciones, V_0 , se define como

$$V_0 := \{u \in \mathcal{H}^1(\Omega) : u = 0 \text{ en } \Gamma_D\}.$$

La cantidad de interés se toma igual al ejemplo anterior, con $\mathbf{x}_0 = (0.5, 0.5)$ y $\varepsilon = 0.3$. De esta forma, el problema dual viene dado por,

$$\begin{cases} -\Delta z = j, & \text{en } \Omega, \\ z = 0, & \text{en } \Gamma_D, \end{cases}$$

donde la solución de este problema pertenece al espacio V_0 . Las soluciones primal y dual quedan dadas, geoméricamente, en la Figura 3.19.

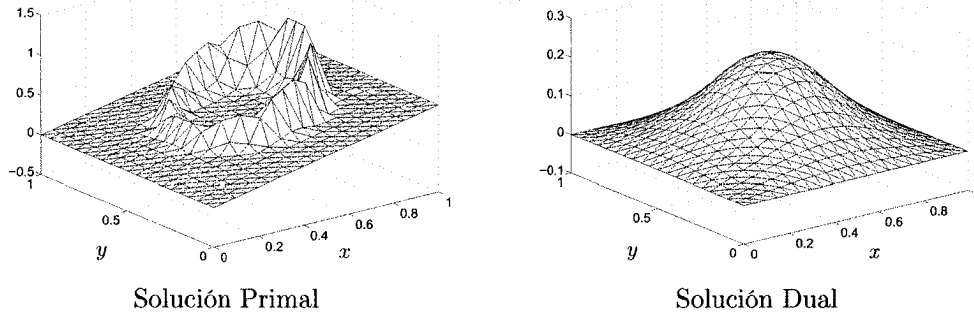


Figura 3.19: Ejemplo 4. Soluciones aproximada por el MEF

Se quiere controlar el error de la cantidad de interés $J(\cdot)$ tal que el error relativo de la estima tenga una tolerancia de error de 10^{-3} , este control se realiza mediante un proceso adaptativo que se inicia con una malla uniforme de 484 elementos, y las estimas E_1 y E_2 con las distintas familias de funciones burbujas sobre aristas presentada en el Capítulo 1.

En los cuadros 3.9 y 3.10 se presentan los resultados numéricos obtenidos en el proceso adaptativo, utilizando la familia de funciones burbujas sobre aristas propuesto por Rosales y Díez

Malla	n_{el}	$J(e)$	E_1	e_{rel}	Θ_1
0	484	-6.766×10^{-3}	-2.974×10^{-3}	8.051×10^{-3}	0.44
1	2776	-1.058×10^{-4}	-7.875×10^{-5}	2.132×10^{-4}	0.74
2	3734	-1.005×10^{-4}	-6.925×10^{-5}	1.875×10^{-4}	0.69
3	3719	-1.340×10^{-4}	-8.195×10^{-5}	2.218×10^{-4}	0.61
4	3451	-1.154×10^{-4}	-8.016×10^{-5}	2.170×10^{-4}	0.70
5	3467	-1.211×10^{-4}	-8.145×10^{-5}	2.205×10^{-4}	0.67

Cuadro 3.9: Ejemplo 4. Malla, números de elementos, error exacto en la cantidad de interés, estima, error relativo de la estima e índice de efectividad usando **mallas adaptadas**, utilizando las funciones burbujas sobre aristas propuesta por Rosales y Díez.

En la Figura 3.20 de la izquierda se representa el error relativo de las estimas E_1 y E_2 sobre mallas adaptadas, Adap E_1 y Adap E_2 , de los resultados numéricos presentados en los cuadros 3.9 y 3.10, y sobre mallas uniformes, Unif E_1 y Unif E_2 . La tolerancia escogida de $TOL = 10^{-3}$ es alcanzada en la primera iteración. Nuevamente, el proceso adaptativo se estabiliza en pocas iteraciones, alrededor

Malla	n_{el}	$J(e)$	E_2	e_{rel}	Θ_2
0	484	-6.766×10^{-3}	-2.966×10^{-3}	8.028×10^{-3}	0.44
1	2776	-1.058×10^{-4}	-8.427×10^{-5}	2.281×10^{-4}	0.80
2	3734	-1.005×10^{-4}	-7.233×10^{-5}	1.958×10^{-4}	0.72
3	3719	-1.340×10^{-4}	-8.983×10^{-5}	2.431×10^{-4}	0.67
4	3451	-1.154×10^{-4}	-8.626×10^{-5}	2.335×10^{-4}	0.75
5	3467	-1.211×10^{-4}	-8.888×10^{-5}	2.406×10^{-4}	0.73

Cuadro 3.10: Ejemplo 4. Malla, números de elementos, error exacto en la cantidad de interés, estima, error relativo de la estima e índice de efectividad usando **mallas adaptadas**, utilizando las funciones burbujas sobre aristas propuesta por Rosales y Díez.

de los 3500 elementos. Los índices de efectividad se quedan por el orden del 70 % en ambas estimaciones.

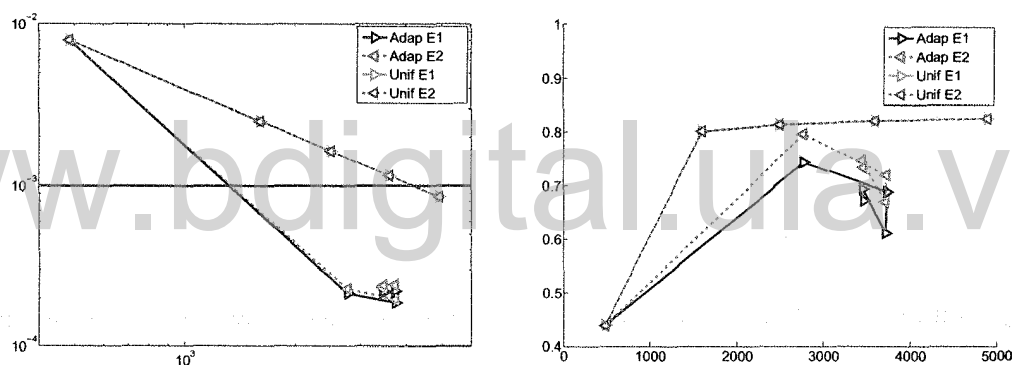


Figura 3.20: Ejemplo 4. Izquierda: gráfica del error relativo de las estimas sobre mallas adaptadas (Adap) y uniformes (Unif) (ver los cuadros 3.9 y 3.10). Derecha: gráfica del índice de efectividad de las estimas sobre mallas adaptadas (Adap) y uniformes (Unif).

El hecho que en la primera iteración se alcance un error muy por debajo de la tolerancia pedida, es debido a que los errores en las cantidades de interés suelen ser de signos contrarios (no como en norma de energía donde son todos positivos). Esta propiedad provoca una sobrevaloración de la estima, pues en el proceso de remallado los errores locales son considerados positivos, produciendo un error por encima del error real. Se debe notar que este fenómeno también fue observado en el ejemplo anterior.

Algunas mallas obtenidas mediante el proceso adaptativo se puede observar en la Figura 3.21

En los cuadros 3.11 y 3.12 se presentan los resultados numéricos obtenidos en

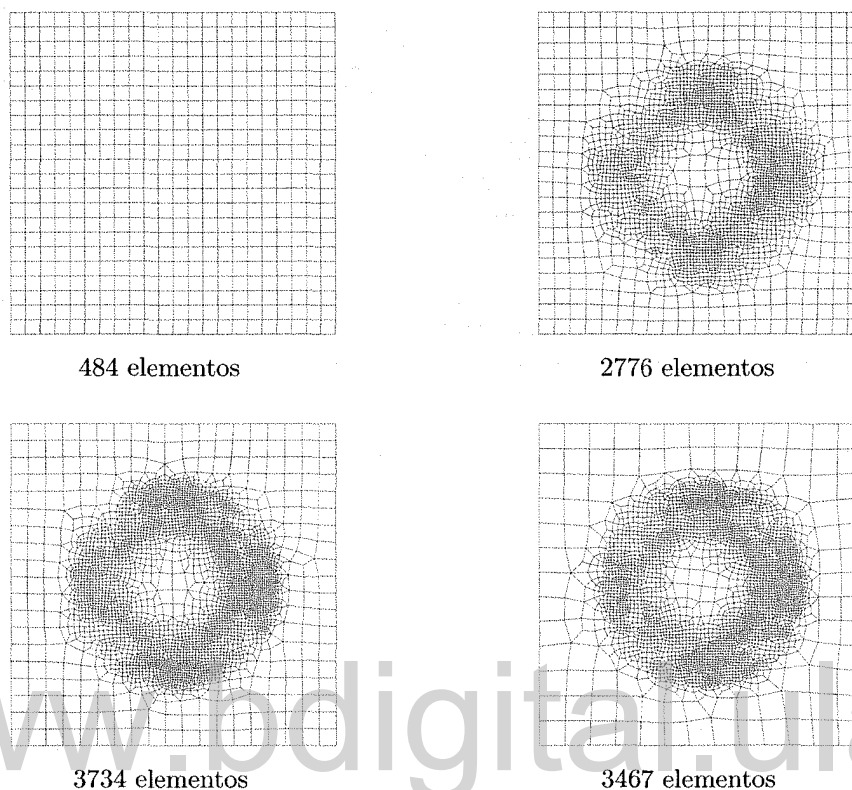


Figura 3.21: Ejemplo 4. Mallas adaptadas a partir de las funciones burbujas propuestas por Rosales y Díez.

el proceso adaptativo, utilizando la familia de funciones burbujas sobre aristas propuesto en este trabajo.

Malla	n_{el}	$J(e)$	E_1	e_{rel}	Θ_1
0	484	-6.766×10^{-3}	-2.672×10^{-3}	7.232×10^{-3}	0.40
1	2211	-1.076×10^{-4}	-8.830×10^{-5}	2.390×10^{-4}	0.82
2	3010	-6.461×10^{-5}	-5.695×10^{-5}	1.541×10^{-4}	0.88
3	3018	-9.088×10^{-5}	-6.417×10^{-5}	1.737×10^{-4}	0.71
4	3063	-1.145×10^{-4}	-7.635×10^{-5}	2.067×10^{-4}	0.67
5	2958	-1.335×10^{-4}	-9.849×10^{-5}	2.666×10^{-4}	0.74

Cuadro 3.11: Ejemplo 4. Malla, números de elementos, error exacto en la cantidad de interés, estima, error relativo de la estima e índice de efectividad usando **mallas adaptadas**, utilizando las funciones burbujas sobre aristas propuesta en este trabajo.

Malla	n_{el}	$J(e)$	E_2	e_{rel}	Θ_2
0	484	-6.766×10^{-3}	-2.664×10^{-3}	7.210×10^{-3}	0.39
1	2211	-1.076×10^{-4}	-8.896×10^{-5}	2.408×10^{-4}	0.83
2	3010	-6.461×10^{-5}	-5.870×10^{-5}	1.589×10^{-4}	0.91
3	3018	-9.088×10^{-5}	-6.472×10^{-5}	1.752×10^{-4}	0.71
4	3063	-1.145×10^{-4}	-7.971×10^{-5}	2.158×10^{-4}	0.70
5	2958	-1.335×10^{-4}	-1.020×10^{-4}	2.762×10^{-4}	0.77

Cuadro 3.12: Ejemplo 4. Malla, números de elementos, error exacto en la cantidad de interés, estima, error relativo de la estima e índice de efectividad usando **mallas adaptadas**, utilizando las funciones burbujas sobre aristas propuesta en este trabajo.

En la Figura 3.22 de la izquierda se representa el error relativo de las estimas E_1 y E_2 sobre mallas adaptadas, Adap E_1 y Adap E_2 , de los resultados numéricos presentados en los cuadros 3.11 y 3.12, y sobre mallas uniformes, Unif E_1 y Unif E_2 .

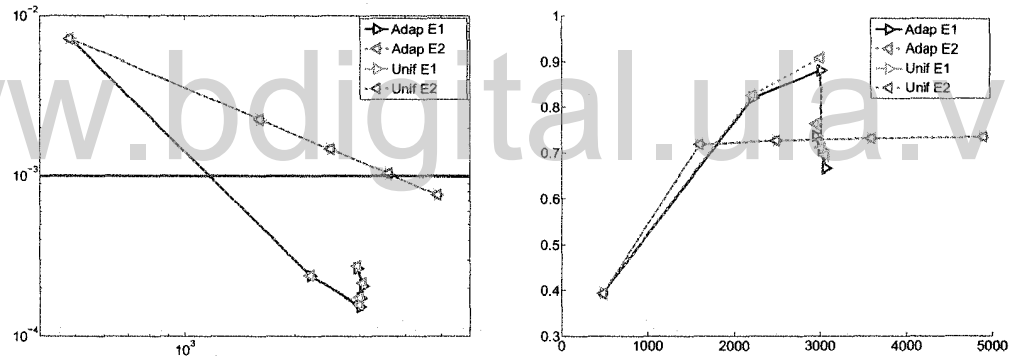


Figura 3.22: Ejemplo 4. Izquierda: gráfica del error relativo de las estimas sobre mallas adaptadas (Adap) y uniformes (Unif) (ver los cuadros 3.11 y 3.12). Derecha: índice de efectividad de las estimas sobre mallas adaptadas (Adap) y uniformes (Unif).

La Figura 3.23 representa las gráficas del valor absoluto de la cantidad de interés $J(e)$ y de las contribuciones interior y sobre arista de la estima E_1 (izquierda), y estima E_2 (derecha), utilizando las funciones burbujas propuesta por Rosales y Díez. De forma análoga, se hace la representación para las funciones burbujas propuesta en esta tesis, ver Figura 3.24. Para este ejemplo, y en ambos casos, se observa que el aporte interior es superior que el aporte sobre arista. A partir de los resultados obtenidos, no se puede concluir cual estimación (interna o sobre arista) produce una mayor cantidad de error, pues en el Ejemplo 3 predomina el error en la arista y en Ejemplo 4 ocurre lo contrario.

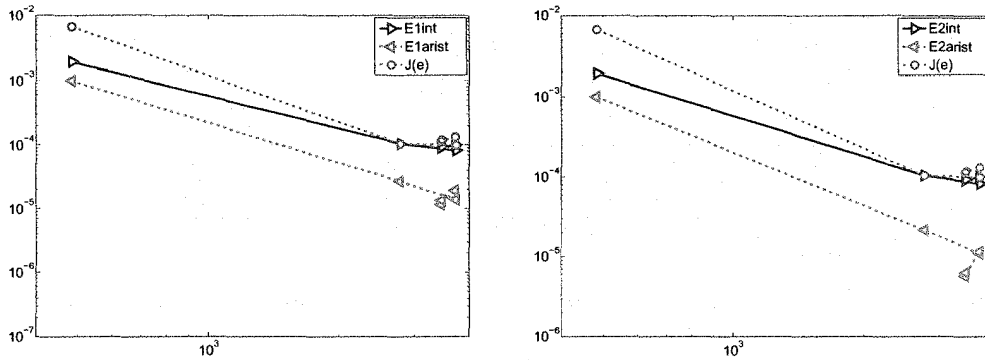


Figura 3.23: Ejemplo 4. Izquierda: gráfica del valor absoluto de la cantidad de interés $J(e)$ y de la estima E_1 interior y sobre arista. Derecha: gráfica del valor absoluto de de la cantidad de interés $J(e)$ y de la estima E_2 interior y sobre arista.

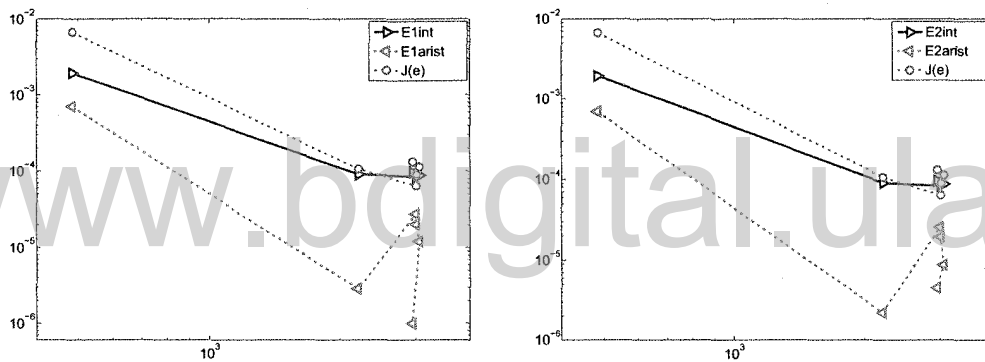


Figura 3.24: Ejemplo 4. Izquierda: gráfica del valor absoluto de la cantidad de interés $J(e)$ y de la estima E_1 interior y sobre arista. Derecha: gráfica del valor absoluto de de la cantidad de interés $J(e)$ y de la estima E_2 interior y sobre arista.

Nuevamente, al igual que el ejemplo anterior, la Figura 3.25 deja ver el mejor funcionamiento de la familia de funciones burbujas propuestas en este trabajo.

Algunas mallas obtenidas mediante el proceso adaptativo se puede observar en la Figura 3.26

3.1. Comentarios finales

Se ha presentado un estimador residual explícito para definir un proceso adaptativo que controla el error, cometido por el MEF, a partir de una cantidad de interés. El estimador residual fue propuesto por [3], y en este trabajo se

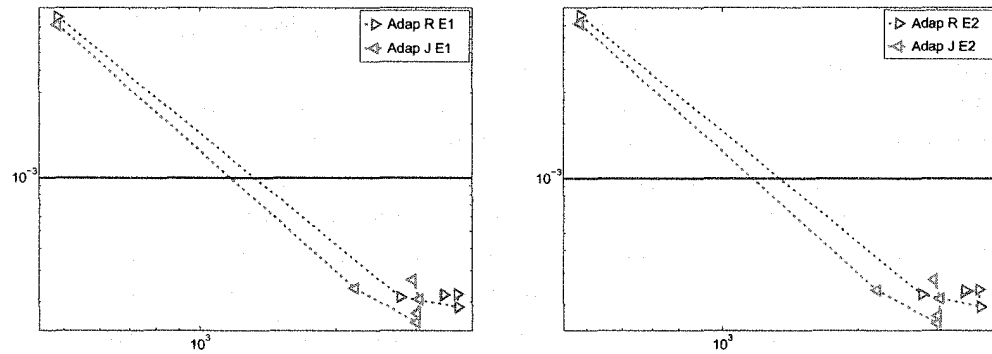
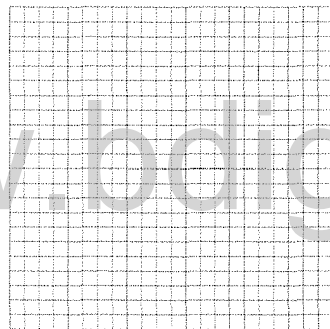
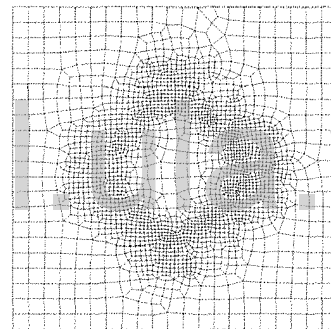


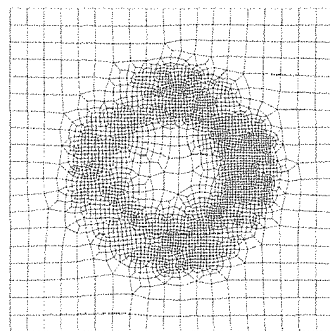
Figura 3.25: Ejemplo 4. Error relativo de las estimas E_1 y E_2 usando las dos familias de funciones burbujas.



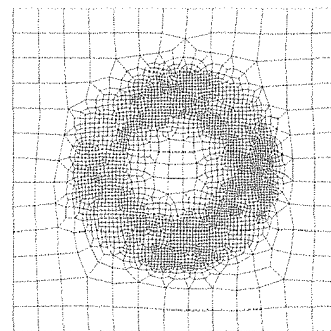
484 elementos



2211 elementos



3010 elementos



2958 elementos

Figura 3.26: Ejemplo 4. Mallas adaptadas a partir de las funciones burbujas propuestas en este trabajo.

reproducen los resultados teóricos y numéricos de dicho artículo. Adicionalmente, en esta tesis, se implementa una familia distinta de funciones burbujas las cuales resultan más óptimas para la estimación del error.

De los resultados obtenidos, surge la pregunta: ¿se puede definir una familia de funciones burbujas que resulten óptimas para este tipo de estimador? Al mismo tiempo, queda el interés de saber que contribución al error se desprecia al dejar sin evaluar los nodos de la malla de elementos finitos.

Al ser el estimador residual explícito de bajo costo computacional (número de evaluaciones) puede resultar apropiada su implementación en problemas transitorios, por ejemplo para un problema parabólico. Pues, este tipo de problemas en adaptatividad orientada al resultado, tiene el inconveniente adicional que se debe resolver el problema dual desde el tiempo final al tiempo inicial (integración hacia el pasado). Desacoplar las contribuciones del error en espacio y tiempo es esencial para el proceso adaptativo.

www.bdigital.ula.ve

Referencias

- [1] I. Babuška and W.C. Rheinboldt, *A posteriori error estimates for the finite element method*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 12, pp. 1597 – 1615, (1978).
- [2] Mark Ainsworth and J. Tinsley Oden, *A Posteriori Error Estimation in Finite Element Analysis*. Pure and Applied Mathematics, Wiley-Interscience, 2000.
- [3] Rosales R. y Díez P., *Estima de error residual explícita para cantidades de interés utilizando funciones burbuja*. Revista Internacional Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería, Vol. 25, Issue 4, pp. 337 – 357, (2009).
- [4] T. Grätsch y K. J. Bathe, *A posteriori error estimation techniques in practical finite element analysis*, Computers and Structures, 83: 235 – 268 (2005).
- [5] S. Prudhomme and J. T. Oden, *On goal-oriented error estimation for elliptic problems: application to the control of pointwise errors*, Computer methods in applied mechanics and engineering, 176: 313 – 331 (1999).
- [6] J. T. Oden and S. Prudhomme, *Goal-oriented error estimation and adaptivity for the finite element method*, Computers and Mathematics with Applications, 41: 735 – 756 (2001).
- [7] W. Bangerth and R. Rannacher, *Adaptive finite element methods for differential equations*, Birkhäuser Verlag (2003).

- [8] P. Díez, *Un nuevo estimador de error para el método de los elementos finitos*. Tesis PhD. UPC, Barcelona, 1996.
- [9] I. Babuška and W. C. Rheinboldt, *Error estimates for adaptive finite element computations*. SIAM J. Numer. Anal., 18: 736 – 754, 1978.
- [10] I. Babuška and W. C. Rheinboldt, *A posteriori error analysis of finite element solutions for one dimensional problems*. SIAM J. Numer. Anal., 18: 565 – 589, 1981.
- [11] B. Fraeijs de Veubeke. *Displacement and equilibrium models in the finite element method*. In Zienkiewicz and Holister, editors, *Stress Analysis*. Wiley London, 1965.
- [12] P. Ladevi ze and D. Leguillon. *Error estimate procedure in the finite element method and applications*. SIAM J. Numer. Anal., 20 : 485 – 509, 1983.
- [13] I. Babuška, O.C. Zienkiewicz, J. Gago, and E.A. Oliveira. *Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations*. Wiley, 1986.
- [14] R.E. Bank. *Analysis of a local a posteriori error estimat for elliptic equations*. In *Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations* [32], pages 119 – 128.
- [15] R.E. Bank and A. Weiser. *Some a posteriori error estimators for elliptic partial differential equations*. Math. Comp., 44: 283 – 301, 1985.
- [16] L. Demkowicz, Ph. Devloo, and J.T. Oden. *On an h-type mesh refinement strategy based on minimization of interpolation errors*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 53: 67 – 89, 1985.
- [17] J. Peraire, M. Vahdati, K. Morgan, and O.C. Zienkiewicz. *Adaptive remeshing for compressible flow computations*. J. Comp. Phys, 72: 449 – 466, 1987.
- [18] O.C. Zienkiewicz and J.Z. Zhu. *A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis*. Internat. J. Numer. Methods Engrg., 24: 337 – 357, 1987.
- [19] O.C. Zienkiewicz and J.Z. Zhu. *The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 1: The recovery technique*. Internat. J. Numer. Methods Engrg., 33: 1331 – 1364, 1992.

- [20] O.C. Zienkiewicz and J.Z. Zhu. *The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 2: Error estimates and adaptivity*. Internat. J. Numer. Methods Engrg., 33: 1365 – 1382, 1992.
- [21] B. A. Szabo. *Estimation and control of error based on p -convergence*. In Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations [32], pages 61 – 70.
- [22] R. Verfürth. *A posteriori error estimators for the Stokes equations*. Numer. Math., 55: 309 – 325, 1989.
- [23] C. Johnson and P. Hansbo. *Adaptive finite element methods in computational mechanics*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 101(1–3): 143 – 181, 1992.
- [24] J.T. Oden, L. Demkowicz, W. Rachowicz, and T.A. Westermann. *Toward a universal hp -adaptive finite element strategy. Part 2: A posteriori error estimation*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 77: 113 – 180, 1989.
- [25] M. Ainsworth and J.T. Oden. *A unified approach to a posteriori error estimation based on element residual methods*. Numer. Math., 65: 23 – 50, 1993.
- [26] I. Babuška, T. Strouboulis, C.S. Upadhyay, and S.K. Gangaraj. *A model study of the quality of a posteriori estimators for linear elliptic problems error estimation in the interior of patchwise uniform grids of triangles*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 114: 307 – 378, 1994.
- [27] I. Babuška, T. Strouboulis, C.S. Upadhyay, S.K. Gangaraj, and K. Copps. *Validation of a posteriori error estimators by a numerical approach*. Internat. J. Numer. Methods Engrg., 37: 1073 – 1123, 1994.
- [28] B. Braess and R. Verfürth. *Posteriori error estimators for the Raviart Thomas element*. SIAM J. Numer. Anal., 33(6): 2431 – 2444, 1996.
- [29] C. Carstensen. *A posteriori error estimate for the mixed finite element method*. Math. Comp., 66(218): 465 – 476, 1997.
- [30] C. Carstensen and G. Dolzmann. *A posteriori error estimates for mixed finite element method in elasticity*. Numer. Math., 81(2): 187 – 209, 1998.
- [31] Díez P. and Calderón G., *Remeshing criteria and proper error representations for goal oriented h -adaptivity*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 1961 pp. 719 – 733, (2007)

- [32] L.Y. Li and P. Bettess, *Notes on mesh optimal criterio in adaptive finite element computations*. Communications in Numerical Methods in Engineering, Vol. 11, pp. 911 – 915, (1995).
- [33] P. Díez and A. Huerta, *A unified approach to remeshing strategies for finite element h-adaptativity*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 176: 215 – 229, 1999.
- [34] L.Y. Li, P. Bettess, J.W. Bull, T. Bond, and I. Applegarth., *Theoretical formulations for adaptive finite element computations*. Comm. Numer. Methods Engrg., 11: 857 – 868, 1995.
- [35] Calderón G. y Gallo R., *El Método de los Elementos Finitos: un enfoque matemático*: Escuela Venezolana de Matemáticas, IVIC, 2011.
- [36] Miguel Alemán Flores, Luis Alvarez León y Javier Sánchez Pérez, *Notas de Análisis Numérico*, Notas mimeografiada, Universidad de Las Palmas.
- [37] E.M. Stein. *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*. Princeton University Press, 1970.

www.bdigital.ula.ve