

TJ 217
A26

**Diseño de Controladores Adaptativos basados en Pasividad
para el control de Sistemas no Lineales con incertidumbre.**

Vivian Acosta de Contreras

Tutor: Miguel Ríos Bolívar
Profesor Agregado, Ph.D., Departamento de sistemas de Control

WWW.BDIGITAL.ULA.VE

Trabajo de grado presentado ante la ilustre Universidad de los Andes
como requisito para optar al grado de
Magister Scientiae en Ingeniería de Control



Consejo de Estudios de Postgrado
Facultad de Ingeniería
Universidad de los Andes
Mérida, Venezuela

(Marzo, 2000)

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

COPIA
FACILITADA

Dedicatoria

*A Miguel, Héctor, Carla y Cecilia,
ustedes son mi vida, gracias por
permitirme tomar tanto de su tiempo.
Los amo.*

WWW.BDIGITAL.ULA.VE

Licencia Creative Commons:
Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

Agradecimiento

*Es difícil agradecer sin ser injusto y olvidar alguna de las tantas manos amigas que se extendieron para ayudarme, agradezco a los que en el instante preciso me escucharon, me dieron apoyo y una palabra de aliento, especialmente a Miguel y a Cecilia de Villegas; a los que confiaron en mi; al Dr. Miguel Ríos, fue un honor trabajar con usted.
A ustedes Gracias.*

WWW.BDIGITAL.ULA.VE

Licencia Creative Commons:
Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

Indice

Resumen

Introducción I

Indice de figuras IV

CAPITULO 1

Control de Sistemas en Forma Canónica Pasiva

1. Pasivización de Sistemas no Lineales 1

1.1 Definiciones 2

1.3 Control de Sistemas en Forma Canónica Pasiva 3

1.4 Aplicación 9

CAPITULO 2

Pasivización Adaptativa de Sistemas no Lineales con Incertidumbre.

2. Realimentación Pasiva 14

2.1 Diseño del Control de realimentación pasivo 21

2.2 Aplicación Práctica 23

CAPITULO 3

Aplicaciones Físicas

3.1 Sistema Bioreactor 32

| | |
|---|----|
| 3.1.1 Diseño del Controlador | 35 |
| 3.2 Sistema Tanque de Flujo Gravitacional | 37 |
| 3.3 Sistema Tanque Reactor continuamente agitado biparamétrico | 41 |
| 3.4 Sistema Tanque Reactor continuamente agitado tomando en cuenta tres parámetros | 45 |

CAPITULO 4

Pasivización Adaptativa de Sistemas no Lineales con Incertidumbre conocido el signo del parámetro

| | |
|--|----|
| 4 Realimentación Adaptativa Pasiva | 49 |
| 4.1 Aplicaciones Prácticas | 54 |
| Conclusiones y recomendaciones para trabajos futuros | 61 |
| Bibliografía | 63 |

Resumen

En este trabajo se desarrolla un control adaptativo basado en pasividad para sistemas no lineales con incertidumbre paramétrica, partiendo de la descomposición natural de los campos vectoriales que conforman el sistema y del hecho de considerar a los campos que contienen parámetros desconocidos como no disipativos. El parámetro es reemplazado por su estimado dando lugar a una ley de control adaptativa que garantiza estabilidad asintótica del sistema en lazo cerrado.

El diseño se apoya en el uso de una función de Lyapunov cuadrática que permite, al mismo tiempo, probar la estabilidad asintótica de las trayectorias controladas hacia sus valores deseados.

Adicionalmente se considera una extensión de este enfoque al asumir conocido el signo del parámetro, obteniendo una ley de control discontinua para estabilizar sistemas no lineales inciertos.

Introducción

Los sistemas pasivos se caracterizan por la existencia de una función escalar de almacenamiento de energía tal que la tasa de cambio, a lo largo de las trayectorias controladas del sistema, nunca es superior a la tasa de almacenamiento expresada por el producto de la entrada y la salida, es decir, el total de energía almacenada en el sistema es inferior a la energía liberada en el mismo.

Los sistemas pasivos con funciones de almacenamiento no negativas poseen propiedades de estabilidad atractivas. Si adicionalmente, un sistema pasivo satisface ciertas condiciones de detectabilidad, éste es estabilizable por una ley de control de realimentación de salida[1].

Por otra parte, la estabilización adaptativa de sistemas no lineales contentivo de parámetros desconocidos ha atraído la atención de muchos investigadores durante los últimos años [3,5]. Una manera común de enfrentar estos problemas está asociada con la parametrización lineal de sistemas con incertidumbre, lo cual simplifica los problemas de diseño de leyes de control adaptativas de realimentación.

En el presente trabajo se propone un procedimiento para obtener una transformación adaptativa de coordenadas de entrada, la cual pasiviza a una clase de sistemas que contiene parámetros desconocidos en las ecuaciones dinámicas del sistema. Este procedimiento de realimentación pasiva se basa en el presentado por Sira-Ramírez y Delgado [6], y se basa en un enfoque geométrico con la incorporación de leyes de actualización en línea. Esto muestra que las leyes de adaptación del parámetro son fuerzas que no realizan ningún trabajo con respecto a funciones de almacenamiento, incluyendo términos de energía asociados con estimación de errores en los parámetros. Un enfoque alternativo para tratar con realimentación pasiva de sistemas no lineales con incertidumbre, usando control adaptativo, es presentado por Serón y otros [5].

El procedimiento propuesto no impone requerimientos en cuanto al grado relativo de la salida del sistema; una vez que éste ha sido pasivizado, se propone descomponer los campos vectoriales del sistema pasivo, por factorización de las componentes del vector de estado en fuerzas disipativas y no disipativas. Así, una ley de realimentación de control basada en pasividad, la cual logra estabilidad asintótica del

sistema en lazo cerrado, es sintetizada por consideración de una función de almacenamiento modificada más inyección de amortiguamiento.

En el primer capítulo se presentan algunas definiciones básicas sobre pasividad, y las ideas fundamentales del esquema de realimentación pasiva propuesta en [6], para sistemas de una entrada una salida. En el capítulo 2 se presenta el desarrollo de una técnica de realimentación adaptativa pasiva, algunas aplicaciones de la técnica desarrollada se considera en el capítulo 3. En el capítulo 4 se presenta una modificación realizada a la técnica descrita en el capítulo 2 y la aplicación de la misma a algunos procesos físicos, como aplicación.

WWW.BDIGITAL.ULA.VE

Indice de figuras

| | |
|--|----|
| Figura 1. Simulación ejemplo académico 1 | 27 |
| Figura 2. Simulación ejemplo académico 2 | 31 |
| Figura 3. Simulación Sistema Bioreactor | 36 |
| Figura 4. Simulación Tanque Flujo Gravitacional | 40 |
| Figura 5. Simulación Tanque Reactor isotérmico biparamétrico | 44 |
| Figura 6. Simulación Tanque Reactor isotérmico con 3 parámetros | 48 |
| Figura 7. Simulación Sistema Bioreactor con signo conocido | 60 |

CAPITULO 1

Control de Sistemas en Forma Canónica Pasiva

Los sistemas pasivos presentan características de estabilidad deseables y existen procedimientos sistemáticos para el desarrollo de técnicas de control que logren la estabilización de los mismos. En este capítulo se muestra una técnica de realimentación pasiva desde la forma canónica de pasividad y algunas aplicaciones.

1.- Pasivización de sistemas no lineales de una entrada y una salida

Definiciones básicas (para más detalles ver [1])

Considere el sistema

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

donde $x \in X \subset \mathfrak{R}^n$ es el vector de estado, $u \in U \subset \mathfrak{R}$ es una función escalar y el control de entrada, $y \in Y \subset \mathfrak{R}$ es la función de salida del sistema.

Los campos vectoriales $f(x)$ y $g(x)$ son suaves en X La región

$X \subset \mathfrak{R}^n$ es la región de operación del sistema, la cual contiene

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

estrictamente al punto de equilibrio x_e , tal que se cumple $f(x_e) + g(x_e)\bar{u} = 0$.

Asociado al sistema (1.1) se asume la existencia de una función de almacenamiento de energía $V : X \rightarrow \mathfrak{R}^+$. La tasa de almacenamiento de energía se define como una función $s : U \times Y \rightarrow \mathfrak{R}$.

1.1 Definiciones

Definición 1. El sistema (1.1) se dice **disipativo** con respecto a la tasa de almacenamiento de energía $s(u, y)$ si existe una función de almacenamiento $V : x \rightarrow \mathfrak{R}^+$ tal que para todo $x_0 \in X$ y para todo $t_1 \geq t_0$ y toda función de entrada u se cumple

$$V(x(t_1)) - V(x(t_0)) \leq \int_{t_0}^{t_1} s(u(t), y(t)) dt \quad (1.2)$$

con $x(t_0) = x_0$ y $x(t_1)$ es el estado resultante en el tiempo t_1 , para la solución del sistema (1.1) tomando como condición inicial x_0 y $u(t)$ como entrada de control; la desigualdad (1.2) es equivalente a

$$\dot{V} \leq s(u(t), y(t)) \quad (1.3)$$

Cuando las desigualdades (1.2) ó (1.3) son igualdades el sistema es sin pérdida.

Definición 2: El sistema (1.1) es **pasivo** si este es disipativo con respecto a la tasa de almacenamiento $s(u, y) = uy$. El sistema (1.1) es de **entrada**

Licencia Creative Commons:

estrictamente pasiva si existe $\delta > 0$ tal que el sistema es disipativo con respecto a $s(u, y) = uy - \delta u^2$. El sistema es de *salida estrictamente pasiva* si existe $\rho > 0$ tal que el sistema es disipativo con respecto a $s(u, y) = uy - \rho y^2$.

Definición 3: El sistema (1.1) se dice *pasivizable* con respecto a la función de almacenamiento V si existe una ley de realimentación de control de la forma

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v \quad \alpha(x), \beta(x) \in \mathfrak{R} \quad (1.4)$$

donde $\beta(x)$ es una función escalar no nula en X y tal que el sistema en lazo cerrado (1.1) - (1.4) es pasivo con la nueva entrada escalar v .

1.2 Realimentación Pasiva

Considere el sistema (1.1) con V una función de almacenamiento con grado relativo uno, es decir

$$L_g V(x) \neq 0 \quad \forall x \in X.$$

Para cualquier control u y cualquier estado inicial $x_0 \in X$ la derivada de la función de almacenamiento V , a través de las soluciones del sistema (1.1), está dada por

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) + \left(\frac{\partial V}{\partial x} g(x) \right) u = L_f V(x) + (L_g V(x)) u \quad (1.5)$$

Descomponiendo el campo vectorial en sus componentes naturales

$f_d(x)$, $f_{nd}(x)$, $f_I(x)$ con respecto a la función de almacenamiento V

$$f(x) = f_d(x) + f_{nd}(x) + f_I(x) \quad (1.6)$$

tal que $L_{f_d}V(x) \leq 0 \quad \forall x \in X$

$$L_{f_{nd}}V(x) \begin{cases} \text{es..de..signo...indefinido..en..}V \\ \text{es..no..negativo..en..}X \end{cases}$$

$$L_{f_I}V(x) = 0 \quad \forall x \in X$$

con $f_d(x)$ la componente disipativa, $f_{nd}(x)$ la componente no disipativa

y $f_I(x)$ la componente invariante del campo vectorial $f(x)$.

Sustituyendo (1.5) en (1.6)

$$\dot{V} = L_{f_d}V(x) + L_{f_{nd}}V(x) + (L_gV(x))u \quad (1.7)$$

o bien

$$\dot{V} = L_{f_d}V(x) + \left[L_gV(x) \left[\frac{L_{f_{nd}}V(x)}{L_gV(x)} + u \right] \right] \quad (1.8)$$

Definamos la transformación de coordenadas de entrada

$$u = \frac{h(x)v}{L_gV(x)} - \frac{L_{f_{nd}}V(x)}{L_gV(x)} - \frac{\delta h^2(x)}{L_gV(x)} \quad (1.9)$$

donde δ es un escalar estrictamente positivo.

Sustituyendo (1.9) en la ecuación (1.8), se tiene que la derivada de la

función de almacenamiento de energía satisface la cadena de relaciones

Licencia Creative Commons:

$$\dot{V} = L_{f_d}V(x) + h(x)v - \delta h^2(x) \leq yv - \delta y^2 \leq yv \quad (1.10)$$

El sistema es tal que $L_g V(x)$ es localmente diferente de cero, entonces las coordenadas de entrada pueden ser transformadas de forma tal que el sistema en lazo parcialmente cerrado tenga una salida estrictamente pasiva entre la entrada del control externo v y la función escalar de salida original $y = h(x)$.

Proposición 1.2.1 *El sistema (1.1) es local y estrictamente de salida pasivable con respecto a la función de almacenamiento V por medio de una realimentación de la forma $u = \alpha(x) + \beta(x)v$ si y solo si*

$$L_g V(x) \neq 0 \quad \forall x \in X. \quad (1.11)$$

La ley de realimentación que logra la salida estrictamente pasiva está dada por (1.9).

La clase de sistemas pasivizables por realimentación de estado, corresponden a aquellos sistemas donde la derivada de primer orden de la función de almacenamiento está directamente influenciada por el control de entrada u y esta influencia explícita nunca desaparece en la región de interés.

1.3 Control de Sistemas en forma canónica pasiva

Suponga que el sistema (1.1) es pasivizable y f_d, f_{nd}, f_I es la descomposición natural de $f(x)$, con respecto a la función de almacenamiento $V(x)$, la cual está dada por

$$V(x) = \frac{1}{2} x^T x \quad (1.12)$$

asumiendo que $L_g V(x) \neq 0$ en la región de operación X del espacio de estados, entonces, el sistema pasivizado puede ser escrito utilizando el cambio de coordenadas en el control (1.9)

$$\dot{x} = f_d(x) + f_I(x) + \left[I - \frac{g(x)x^T}{x^T g(x)} \right] f_{nd}(x) + \frac{h(x)g(x)v}{x^T g(x)} - \frac{\delta h^2(x)g(x)}{x^T g(x)} \quad (1.13)$$

Como parte integrante de la derivada temporal de V , definida en

(1.12), se tienen los siguientes términos:

$$x^T \left[f_d(x) - \frac{\delta g(x)h^2(x)}{x^T g(x)} \right] \leq 0$$

$$x^T \left\{ f_I(x) + \left[I - \frac{g(x)x^T}{x^T g(x)} \right] f_{nd}(x) \right\} = 0$$

Por factorización de las componentes del vector de estados comprendidas en la expresión (1.13), el sistema puede ser reescrito de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -R(x)x - J(x)x + M(x)v \\ y &= h(x)\end{aligned}\quad (1.14)$$

con $R(x)$ una matriz semidefinida positiva, $J(x)$ una matriz antisimétrica, donde:

$$\begin{aligned}-R(x)x &= f_d(x) - \frac{\delta h^2(x)g(x)}{x^T g(x)} \\ -J(x)x &= f_l(x) + \left[I - \frac{g(x)x^T}{x^T g(x)} \right] f_{nd}(x) \\ M(x) &= \frac{h(x)g(x)}{x^T g(x)}\end{aligned}\quad (1.15)$$

Las expresiones (1.14) y (1.15) caracterizan una forma canónica pasiva para la cual un control realimentado puede ser diseñado vía moldeo de energía e inyección de amortiguamiento.

Un controlador basado en pasividad para el sistema (1.14) puede ser propuesto por consideración de la siguiente modificación de la función de almacenamiento:

$$V_d(x, x_d) = \frac{1}{2} (x - x_d)^T (x - x_d) \quad (1.16)$$

donde x_d es un vector de estado auxiliar.

La derivada de la función de almacenamiento sobre las soluciones del nuevo sistema es:

$$\dot{V}_d(x, x_d) = (x - x_d)^T (\dot{x} - \dot{x}_d) =$$

$$\dot{V}(x) = (x - x_d)^T \left[-R(x)x - J(x)x + M(x)v - \dot{x}_d \right] \quad (1.17)$$

Completando cuadrados y añadiendo el término de inyección de amortiguamiento de la forma $-R_{di}(x)x$, logrando que $R_m(x) = R(x) + R_{di}(x)$ sea una matriz definida positiva para todo $x \in X$ se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{V}_d(x, x_d) = (x - x_d)^T & \left[-(R(x) + R_{di}(x))(x - x_d) - J(x)(x - x_d) - \dot{x}_d - R(x)x_d \right. \\ & \left. - J(x)x_d + R_{di}(x)(x - x_d) + M(x)v \right] \end{aligned} \quad (1.18)$$

Si hacemos que el vector auxiliar $x_d(t)$ satisfaga el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\dot{x}_d = -R(x)x_d - J(x)x_d + R_{di}(x)(x - x_d) + M(x)v \quad (1.19)$$

entonces sustituyendo (1.19) en (1.18), la derivada temporal de la función $V_d(x, x_d)$ satisface

$$\begin{aligned} \dot{V}_d(x, x_d) &= -(x - x_d)^T R_m(x)(x - x_d) \leq -\frac{a}{b}(x - x_d)^T (x - x_d) \\ &= -\frac{a}{b}V(x, x_d) \leq 0 \end{aligned} \quad (1.20)$$

donde, en términos de los autovalores máximos y mínimos

$(\lambda_{min}, \lambda_{max})$ de $R_m(x)$, a y b están dados por:

$$\begin{aligned} a &= \inf_{x \in X} \lambda_{min}(R_m(x)) > 0 \\ b &= \sup_{x \in X} \lambda_{max}(R_m(x)) > 0 \end{aligned} \quad (1.21)$$

De (1.20) se concluye que el vector $x(t)$ converge asintóticamente hacia el vector de trayectorias auxiliares $x_d(t)$.

La ley de control puede ser sintetizada desde el sistema de ecuaciones diferenciales (1.19). Comúnmente un conjunto de componentes particulares del vector $x_d(t)$ son constantes. El objetivo de tal particularización es obtener una expresión para el control de entrada v en términos del vector de estado x y el resto de variables auxiliares x_d . Las ecuaciones diferenciales definidas con las variables auxiliares x_d son consideradas como componentes de estado de una ley de compensación dinámica [6].

1.4 Aplicación

Sistema Bioreactor

Considere el siguiente sistema presentado en [6]

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= u + p - \frac{x_1 x_2}{x_1 + q} + ax_2 \\ \dot{x}_2 &= -bx_2 + \frac{x_1 x_2}{x_1 + q} \\ y &= x_2\end{aligned}$$

donde x_1 y x_2 son concentraciones de masa de alimentos y microorganismos en un tiempo t , respectivamente. Los parámetros p, q, a y b son constantes conocidas del sistema.

Los puntos de equilibrio correspondientes a un valor constante de \bar{u} la variable de entrada u están dados por:

$$\bar{x}_1 = \frac{bq}{x_1 - b} \quad \bar{x}_2 = \frac{u + p}{b - a}$$

En términos de la descripción de los campos vectoriales, se tiene:

$$f(x) = \begin{bmatrix} p - \frac{x_1 x_2}{x_1 + q} + ax_2 \\ \frac{x_1 x_2}{x_1 + q} - bx_2 \end{bmatrix} \quad g(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Claramente el sistema es de grado relativo dos. Físicamente, la región de operación del sistema está dada por puntos estrictamente definidos en el primer cuadrante de \mathbb{R}^2 , donde la evolución del sistema está definida, así $x_1, x_2 > 0$.

Considere la siguiente función de almacenamiento de energía

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

la condición $L_g V(x) \neq 0$ es satisfecha en toda la región de operación, en este caso

$$L_g V(x) = x_1 \neq 0$$

El sistema es entonces pasivizable con respecto a la función de almacenamiento $V(x)$. La derivada temporal de $V(x)$ a lo largo de las trayectorias controladas del sistema está dada por:

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= x_1 p + a x_1 x_2 + \frac{x_1 x_2^2}{x_1 + q} - \frac{x_1^2 x_2}{x_1 + q} - x_2^2 b + x_1 u \\ &\leq x_1 \left(u + p + a x_2 + \frac{x_2^2}{x_1 + q} \right)\end{aligned}$$

donde la última desigualdad es obtenida bajo la suposición que las variables x_1 y x_2 son siempre positivas. En otras palabras, es posible realizar la descomposición de los campos vectoriales en sus componentes naturales; esta descomposición está dada por:

$$f_{nd}(x) = \begin{bmatrix} p + a x_2 \\ \frac{x_1 x_2}{x_1 + q} \end{bmatrix} \quad f_d(x) = \begin{bmatrix} -\frac{x_1 x_2}{x_1 + q} \\ -x_2 b \end{bmatrix}$$

Usando la transformación de coordenadas de entrada

$$u = -p - a x_2 - \frac{x_2^2}{x_1 + q} + \frac{x_2}{x_1} v$$

hacemos el sistema pasivo.

El sistema transformado puede ser escrito en la forma canónica pasiva

$$\dot{x} = -R(x)x - J(x)x + M(x)v$$

donde

$$J(x) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{x_2}{x_1 + q} \\ \frac{x_2}{x_1 + q} & 0 \end{bmatrix}; \quad R(x) = \begin{bmatrix} \frac{x_2}{x_1 + q} & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

$$M(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para el diseño del controlador, consideremos la función de almacenamiento de energía modificada V_d definida en términos del vector de estado deseado

$$V_d(x, x_d) = \frac{1}{2}(x - x_d)^T(x - x_d)$$

añadiendo el término de amortiguamiento, el sistema auxiliar se representa por

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1d} &= -\frac{x_2 x_{1d}}{x_1 + q} - \frac{x_2 x_{2d}}{x_1 + q} + \frac{x_2 v}{x_1} + R_1(x_1 - x_{1d}) \\ \dot{x}_{2d} &= \frac{x_2 x_{1d}}{x_1 + q} - b x_{2d} + R_2(x_2 - x_{2d}) \\ y &= x_2 \end{aligned}$$

donde R_1 y R_2 son las componentes diagonales de la matriz $R_{id}(x)$, las cuales son tomadas como constantes por simplicidad.

Haciendo $x_{1d} = \bar{x}_1$ constante y $x_{2d} = \xi$ un estado auxiliar, se obtiene la siguiente expresión dinámica del control:

$$v = \frac{x_1(\xi + \bar{x}_1)}{x_1 + q} - R_1 \frac{x_1}{x_1} (x_1 - \bar{x}_1)$$

$$\dot{\xi} = \frac{x_2 \bar{x}_1}{x_1 + q} - b\xi + R_2(x_2 - \xi)$$

WWW.BDIGITAL.ULA.VE

CAPITULO 2

Pasivización Adaptativa de Sistemas no Lineales con Incertidumbre

En el capítulo anterior se presenta una forma canónica de pasividad, donde se explota la descomposición natural de los campos vectoriales del sistema en sus componentes disipativa, no disipativa e invariante para el estudio de la estabilidad de sistemas no lineales, y que permiten la estabilización dinámica de sistemas no lineales, basados en pasividad [5], como el caso más general del concepto de disipatividad [2].

En este capítulo se muestra el diseño de una estrategia de control donde el parámetro es reemplazado por su estimado, y una ley de adaptación que logra la estabilización de sistemas no lineales con incertidumbre, realizando la descomposición natural de los campos y representando el sistema en la forma canónica pasiva.

2.- Realimentación Adaptativa Pasiva.

Se considerará un enfoque adaptativo del procedimiento de pasivización descrito en el capítulo anterior, para una clase de sistemas no lineales con incertidumbre de la forma:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + \sum_{i=1}^p f_i(x)\theta_i + g(x)u \\ y &= h(x)\end{aligned}\quad (2.1)$$

donde $x \in X \subset \mathfrak{R}^n$ es el vector de estado, $u \in U \subset \mathfrak{R}$ es una función escalar y el control de entrada, $y \in Y \subset \mathfrak{R}$ es la función de salida del sistema, θ_i son parámetros desconocidos y constantes. Los campos $f(x)$ y $g(x)$ son campos vectoriales n-dimensionales y suaves en X .

El sistema (2.1) puede representarse como:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + \phi(x)\theta + g(x)u \\ y &= h(x)\end{aligned}\quad (2.2)$$

donde la matriz $\phi \in \mathfrak{R}^{n \times p}$ definida como

$$\phi(x) = [f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)] \quad (2.3)$$

y $\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p]^T$ es el vector de parámetros desconocidos.

Incorporando la estimación de los parámetros desconocidos $\hat{\theta}$

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u + \phi(x)\hat{\theta} + \phi(x)(\theta - \hat{\theta})$$

y asumiendo conocido su comportamiento, el sistema (2.2) puede ser escrito como un sistema nominal de la forma:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u + \phi(x)\hat{\theta} \\ y &= h(x)\end{aligned}\quad (2.4)$$

Considerando la función de almacenamiento $V(x)$, como la función de almacenamiento definida para el sistema sin incertidumbre, $\dot{V}(x, \hat{\theta})$ puede escribirse en la forma

$$\dot{V}(x, \hat{\theta}) = L_{fd}V(x) + L_{fnd}V(x) + L_{\phi\theta}V(x) + L_gV(x)u \quad (2.5)$$

Buscaremos una transformación de la variable de control dependiente del estado y la estimación de los parámetros desconocidos de la forma:

$$u = \alpha(x, \hat{\theta}) + \beta(x, \hat{\theta})v \quad (2.6)$$

tal que el nuevo sistema descrito sea un sistema pasivo con respecto a la función de almacenamiento $V(x)$, desde el nuevo control v y la salida dada del sistema. Esto se cumple bajo las condiciones de la siguiente proposición:

Proposición 2.1 *considere un sistema de una entrada y una salida, no lineal con incertidumbre de la forma (2.4). El sistema es pasivizable con respecto a la función de almacenamiento $V(x)$, a través de la transformación de la variable de control dependiente del estado y los valores estimados de los parámetros, si y solo si la condición*

$$L_gV(x) \neq 0 \quad (2.7)$$

en la región de operación. La transformación de coordenadas de entrada que estrictamente pasiviza el sistema (2.4) está dada por

$$u(x, \hat{\theta}, v) = \frac{1}{L_g V(x)} [-L_{f_{nd}} V(x) - L_{\phi\hat{\theta}} V(x) + h(x)v - \delta h^2(x)] \quad (2.8)$$

donde $f_{nd}(x)$ es la componente no disipativa del campo vectorial $f(x)$.

Prueba: Tomando la derivada de la función de almacenamiento $V(x, \hat{\theta})$ sobre las trayectorias del sistema (2.4), y escrita en términos de las derivadas de Lie, se tiene

$$\dot{V}(x, \hat{\theta}) = L_f V(x) + L_{\phi\hat{\theta}} V(x) + L_g V(x)u \quad (2.9)$$

si se descompone el campo vectorial $f(x)$ en sus componentes naturales como en (1.6). Esto permite representar (2.9) de la forma:

$$\dot{V}(x, \hat{\theta}) = L_{f_d} V(x) + L_{f_{nd}} V(x) + L_{\phi\hat{\theta}} V(x) + L_g V(x)u \quad (2.10)$$

Entonces, si la condición (2.7) es satisfecha, se usa la transformación adaptativa de coordenadas de entrada (2.8) para obtener

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, \hat{\theta}) &= L_{f_d} V(x) + L_{f_{nd}} V(x) + L_{\phi\hat{\theta}} V(x) + L_g V(x)u \\ &\leq L_{f_d} V(x) + yv - \delta y^2 \leq yv \end{aligned} \quad (2.11)$$

lo cual significa que la transformación del sistema es de salida estrictamente pasiva con respecto a la función de almacenamiento $V(x)$.

Se requiere escribir el sistema en lazo parcialmente cerrado en la forma canónica pasiva, para lo cual se asume que $V(x) = \frac{1}{2}x^T x$ y que $L_g V(x) = x^T g(x) \neq 0$ para todo $x \in X$, entonces el sistema (2.4) se representa como:

$$\begin{aligned} \dot{x} = & f_d(x) + f_l(x) + f_{nd}(x) + \phi(x)\hat{\theta} \\ & + \frac{g(x)}{L_g V(x)} \left[-L_{f_{nd}} V(x) - L_{\phi\hat{\theta}} V(x) - \delta h^2(x) + h(x)v \right] \end{aligned} \quad (2.12)$$

la cual puede reescribirse de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \dot{x} = & f_d(x) + f_l(x) + \left[I - \frac{g(x)x^T}{x^T g(x)} \right] f_{nd}(x) + \frac{h(x)g(x)v}{x^T g(x)} - \frac{\delta h^2(x)g(x)}{x^T g(x)} \\ & + \left[I - \frac{g(x)x^T}{x^T g(x)} \right] \phi(x)\hat{\theta} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Como parte integrante de la derivada temporal de $V(x)$ se tienen los siguientes términos

$$\begin{aligned} x^T \left[f_d(x) - \frac{\delta g(x)h^2(x)}{x^T g(x)} \right] & \leq 0 \\ x^T \left\{ f_l(x) + \left[I - \frac{g(x)x^T}{x^T g(x)} \right] (f_{nd}(x) + \phi(x)\hat{\theta}) \right\} & = 0 \end{aligned}$$

Por factorización de las componentes del vector de estado en entradas no lineales comprendidas en la expresión (2.13), el sistema puede ser reescrito en la forma canónica pasiva de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -R(x)x - J(x, \hat{\theta})x + M(x)v \\ y &= h(x)\end{aligned}\quad (2.14)$$

con $R(x)$ una matriz semidefinida positiva, $J(x, \hat{\theta})$ una matriz antisimétrica, donde:

$$\begin{aligned}-R(x)x &= f_d(x) - \frac{\delta h^2(x)g(x)}{x^T g(x)} \\ -J(x, \hat{\theta})x &= f_l(x) + \left[I - \frac{g(x)x^T}{x^T g(x)} \right] (f_{nd}(x) + \phi(x)\hat{\theta}) \\ M(x) &= \frac{h(x)g(x)}{x^T g(x)}\end{aligned}\quad (2.15)$$

■

La expresión (2.14) caracteriza una **forma canónica de pasividad** para la cual puede diseñarse una ley de control por medio de “moldeo de energía” e “inyección de amortiguamiento”.

Para sistemas de la forma (2.14) podemos proponer un controlador basado en pasividad, al considerar la siguiente función de almacenamiento modificada

$$V_d(x, x_d) = \frac{1}{2}(x - x_d)^T(x - x_d) \quad (2.16)$$

donde x_d es un vector de estado a definir, así

$$\dot{V}_d(x, x_d) = (x - x_d)^T \left[-R(x)x - J(x, \hat{\theta})x + M(x)v - \dot{x}_d \right] \quad (2.17)$$

completando cuadrados y agregando el término de amortiguamiento en (2.16) de la forma $-R_{\hat{a}}(x)x$, tal que $R_m(x) = R(x) + R_{\hat{a}}(x)$ es una matriz definida positiva $\forall x \in X$, se tiene

$$\begin{aligned} \dot{V}_d(x, x_d) = & (x - x_d)^T [-(R(x) + R_{\hat{a}}(x))(x - x_d) - J(x, \hat{\theta})(x - x_d) - \dot{x}_d - R(x)x_d \\ & - J(x, \hat{\theta})x_d + R_{\hat{a}}(x)(x - x_d) + M(x)v] \end{aligned} \quad (2.18)$$

Si hacemos que el vector auxiliar $x_d(t)$ satisfaga el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\dot{x}_d = -R(x)x_d - J(x, \hat{\theta})x_d + R_{\hat{a}}(x)(x - x_d) + M(x)v \quad (2.19)$$

la derivada temporal de la función $V_d(x, x_d)$ satisface

$$\begin{aligned} \dot{V}_d(x, x_d) = & -(x - x_d)^T R_m(x)(x - x_d) \leq -\frac{a}{b}(x - x_d)^T (x - x_d) \\ = & -\frac{a}{b}V(x, x_d) \leq 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

donde, en términos de los autovalores máximos y mínimos $(\lambda_{\min}, \lambda_{\max})$ de $R_m(x)$, a y b están dados por:

$$\begin{aligned} a = & \inf_{x \in X} \lambda_{\min}(R_m(x)) > 0 \\ b = & \sup_{x \in X} \lambda_{\max}(R_m(x)) > 0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

por lo tanto, el vector $x(t)$ converge asintóticamente a la trayectoria del vector auxiliar.

El procedimiento de diseño descrito hasta ahora, podría aplicarse si $\hat{\theta}$ fuera conocida, pero dado que no es cierto, tomaremos en consideración que θ es desconocida y $\hat{\theta}$ es una estimación que debe ser encontrada.

Al considerar el sistema con incertidumbre

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u + \phi(x)\hat{\theta} + \phi(x)(\theta - \hat{\theta}) \\ y &= h(x)\end{aligned}\quad (2.22)$$

el sistema (2.14) adopta la forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -R(x)x - J(x, \hat{\theta})x + M(x)v + \phi(x)(\theta - \hat{\theta}) \\ y &= h(x)\end{aligned}\quad (2.23)$$

2.1 Diseño del control de realimentación pasivo.

Se puede diseñar un controlador realimentado para la estabilización asintótica del sistema (2.23), considerando la función de almacenamiento (2.16), la ley de control dinámica definida por (2.19) permite obtener

$$\dot{V}_d(x, x_d) = -(x - x_d)^T R_m(x)(x - x_d) + (x - x_d)^T \phi(x)(\theta - \hat{\theta}) \quad (2.24)$$

En consecuencia debemos encontrar una ley de actualización para los parámetros desconocidos y, al mismo tiempo, eliminar el efecto desestabilizante del error de estimación. Para ello se propone extender la función de almacenamiento (2.16) en la forma

$$W(x, x_d, \hat{\theta}) = V_d(x, x_d) + \frac{1}{2}(\theta - \hat{\theta})^T \Gamma^{-1}(\theta - \hat{\theta}) \quad (2.25)$$

la derivada temporal de $W(x, x_d, \hat{\theta})$ presenta la forma

$$\begin{aligned} \dot{W}(x, x_d, \hat{\theta}) &= (x - x_d)^T \left[-R(x)x - J(x, \hat{\theta})x + M(x)v + \phi(x)(\theta - \hat{\theta}) - \dot{x}_d \right] \\ &\quad + (\theta - \hat{\theta})^T \Gamma^{-1} \left(-\dot{\hat{\theta}} \right) \\ &= (x - x_d)^T \left[-R(x)x - J(x, \hat{\theta})x + M(x)v - \dot{x}_d \right] \\ &\quad + (\theta - \hat{\theta})^T \Gamma^{-1} \left[-\dot{\hat{\theta}} + \Gamma \phi^T(x)(x - x_d) \right] \end{aligned} \quad (2.26)$$

así la ley de actualización del parámetro está dada por:

$$\dot{\hat{\theta}} = \Gamma \phi^T(x)(x - x_d) \quad (2.27)$$

que elimina el efecto desestabilizante del error de estimación, y permite

lograr

$$\begin{aligned} \dot{W}(x, x_d, \hat{\theta}) &= -(x - x_d)^T R_m(x)(x - x_d) \leq -\frac{a}{b}(x - x_d)^T (x - x_d) \\ &= -\frac{a}{b}V(x, x_d) \leq 0 \end{aligned}$$

2.2 Aplicaciones prácticas.

1. Sea el sistema descrito por

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + \theta(x_1 + Xm)^2 \\ \dot{x}_2 &= u \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (2.28)$$

donde x_1 y x_2 son los estados del sistema, Xm es un valor constante y θ es el parámetro desconocido del sistema.

Los puntos de equilibrio están dados por:

$$\bar{x}_1 = 0 \quad \bar{x}_2 = -\theta Xm^2$$

En términos de la descripción de los campos vectoriales, el sistema afin (2.2) se tiene:

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \phi(x) = \begin{bmatrix} (x_1 + Xm)^2 \\ \theta \end{bmatrix}$$

Claramente el sistema es de grado relativo dos.

Para la aplicación se considera que la región de operación del sistema (2.28), está dada por puntos estrictamente definidos en el primer cuadrante de \mathfrak{R}^2 , donde la evolución del sistema está definida, así $x_1, x_2 > 0$.

La condición $L_g V(x) \neq 0$ es satisfecha en toda la región de operación, en este caso

$$L_g V(x) = x_2 \neq 0.$$

Considere la siguiente función de almacenamiento de energía

$$V(x) = \frac{1}{2} x^T x$$

El sistema es entonces pasivizable con respecto a la función de almacenamiento $V(x)$. La derivada temporal de $V(x)$ a lo largo de las trayectorias controladas del sistema está dada por:

$$\dot{V}(x, \hat{\theta}) = x_1 x_2 + x_2 u$$

que al usar la transformación de coordenadas de entrada

$$u = \frac{h(x)v}{L_g V(x)} - \frac{L_{fnd} V(x)}{L_g V(x)} - \frac{\delta h^2(x)}{L_g V(x)}$$

se cumple la desigualdad

$$\dot{V}(x, \hat{\theta}) \leq x_1 x_2 + x_2 \left(-x_1 - \frac{x_1(x_1 - X_m)^2}{x_2} \right) \hat{\theta} + \frac{x_1}{x_2} v - \delta \frac{x_1^2}{x_2} \leq yv \quad (2.29)$$

donde ésta última es obtenida bajo la suposición que las variables x_1 y x_2 son siempre positivas. En otras palabras, es posible realizar la descomposición de los campos vectoriales en sus componentes naturales, tomando en cuenta el parámetro como no disipativo; esta descomposición está dada por:

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

$$f_{nd}(x) = \begin{bmatrix} x_2 + (x_1 + Xm)^2 \hat{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} \quad f_d(x) = 0$$

Usando la transformación de coordenadas de entrada correspondientes al estado adaptativo

$$u = -x_1 - \frac{x_1}{x_2} (x_1 + Xm)^2 \hat{\theta} + \frac{x_1}{x_2} v - \delta \frac{x_1^2}{x_2} \quad (2.30)$$

hacemos el sistema pasivo.

La transformación del sistema puede ser escrita en la forma canónica pasiva (2.14).

$$\dot{x} = -R(x)x - J(x, \hat{\theta})x + M(x)v$$

donde

$$J(x, \hat{\theta}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 + \frac{(x_1 + Xm)^2 \hat{\theta}}{x_2} \\ -1 - \frac{(x_1 + Xm)^2 \hat{\theta}}{x_2} & 0 \end{bmatrix}; \quad R(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \delta \frac{x_1^2}{x_2^2} \end{bmatrix}$$

$$M(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Consideremos para el diseño del controlador, la función de almacenamiento de energía modificada $W(x, x_d, \hat{\theta})$ definida en términos del vector de estado deseado.

Sea $W(x, x_d, \hat{\theta})$ definida como (2.25)

$$W(x, x_d, \hat{\theta}) = \frac{1}{2}(x - x_d)^T(x - x_d) + \frac{1}{2\gamma}(\theta - \hat{\theta})^2$$

con la ley de actualización del parámetro (2.27)

$$\dot{\hat{\theta}} = \gamma(x_1 + Xm)^2(x_1 - x_{1d}) \quad (2.31)$$

Añadiendo el término de amortiguamiento el sistema se representa

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1d} &= x_{2d} + \frac{x_{2d}(x_1 + Xm)^2 \hat{\theta}}{x_2} + R_1(x_1 - x_{1d}) \\ \dot{x}_{2d} &= -x_{1d} - \delta \frac{x_1^2}{x_2^2} x_{2d} - \frac{x_{1d}(x_1 + Xm)^2 \hat{\theta}}{x_2} + \frac{x_1}{x_2} v + R_2(x_2 - x_{2d}) \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

donde R_1 y R_2 son las componentes diagonales de la matriz $R_{id}(x)$, las cuales son tomadas como constantes por simplicidad.

Haciendo $x_{1d} = \xi$ y $x_{2d} = \bar{x}_2$ se obtiene la siguiente expresión

dinámica del control:

$$\begin{aligned} v &= \frac{x_2}{x_1} \left\{ \frac{\partial x_1^2 \bar{x}_2}{x_2^2} + \xi + \frac{(x_1 + Xm)^2 \xi}{x_2} \hat{\theta} - R_2(x_2 - \bar{x}_2) \right\} \\ \dot{\xi} &= \bar{x}_2 + \bar{x}_2 \frac{(x_1 + Xm)^2 \hat{\theta}}{x_2} + R_1(x_1 - \xi) \end{aligned}$$

Para la simulación se tomó el siguiente conjunto de valores constantes:

$$\theta = -2, \quad R_1 = 2, \quad R_2 = 6, \quad \gamma = 0.5, \quad \delta = 10, \quad Xm = 1$$

Los valores para los puntos de equilibrio son:

$$\bar{x}_1 = 0 \quad \bar{x}_2 = 2 \quad \bar{u} = 0$$

Estos resultados son mostrados en la figura 1.

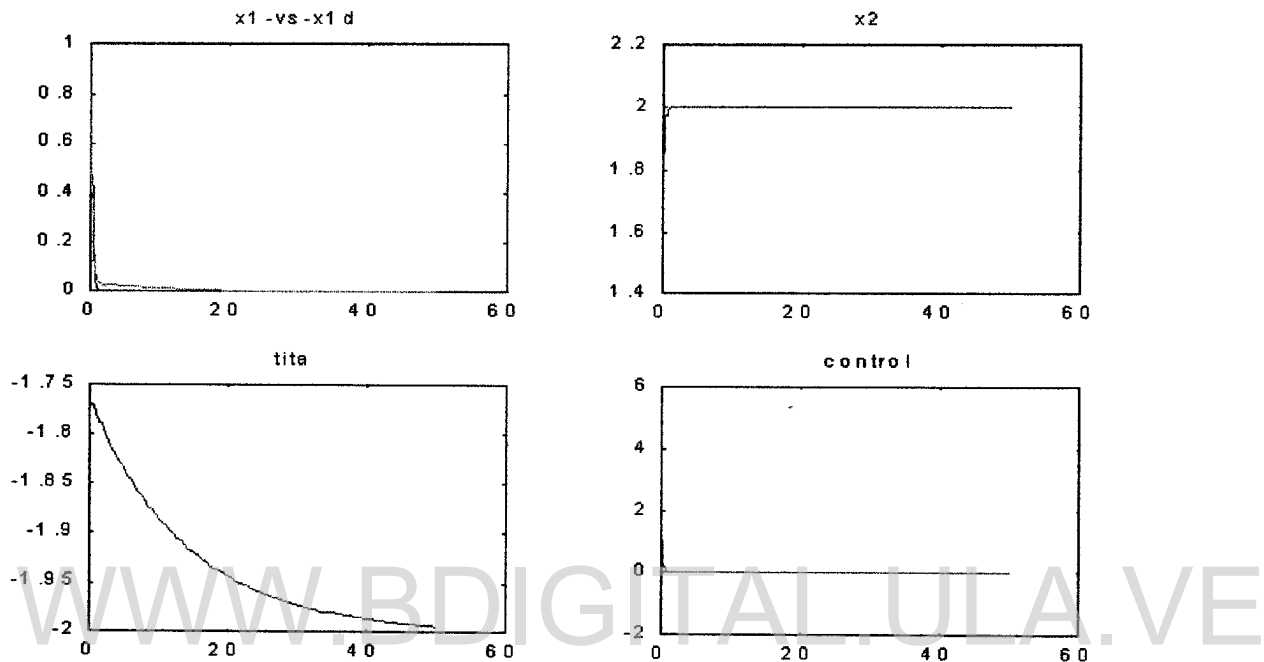


Figura 1. Simulación ejemplo académico 1

2. Sea el sistema descrito por

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + \theta(x_1 + X_m)^3 \\ \dot{x}_2 &= u \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (2.32)$$

donde x_1 y x_2 son los estados del sistema, X_m es un punto de equilibrio y θ es el parámetro desconocido del sistema.

Los puntos de equilibrio son:

$$\bar{x}_1 = 0 \quad \bar{x}_2 = -\theta Xm^3$$

En términos de la descripción de los campos vectoriales, el sistema afin (2.2) se tiene:

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \phi(x) = \begin{bmatrix} (x_1 + Xm)^3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

el sistema es de grado relativo dos.

La condición $L_g V(x) \neq 0$ es satisfecha en toda la región de operación, en este caso

$$L_g V(x) = x_2 \neq 0.$$

Considerando la función de almacenamiento de energía

$$V(x) = \frac{1}{2} xx^T \quad (2.33)$$

el sistema es pasivizable con respecto a la función de almacenamiento, es decir, es posible realizar la descomposición de los campos vectoriales en sus componentes naturales, tomando en cuenta el parámetro como no disipativo; esta descomposición está dada por:

$$f_{nd}(x) = \begin{bmatrix} x_2 + (x_1 + Xm)^3 \hat{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} \quad f_a(x) = 0$$

La transformación de coordenadas de entrada correspondientes al estado adaptativo

$$u = -x_1 - \frac{x_1}{x_2} (x_1 + Xm)^3 \hat{\theta} + \frac{x_1}{x_2} v - \delta \frac{x_1^2}{x_2} \quad (2.34)$$

hace el sistema pasivo.

Así el sistema puede ser escrito en la forma canónica pasiva (2.14).

$$\dot{x} = -R(x)x - J(x, \hat{\theta})x + M(x)v$$

donde

$$J(x, \hat{\theta}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 + \frac{(x_1 + Xm)^3 \hat{\theta}}{x_2} \\ -1 - \frac{(x_1 + Xm)^3 \hat{\theta}}{x_2} & 0 \end{bmatrix}; \quad R(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \delta \frac{x_1^2}{x_2^2} \end{bmatrix}$$

$$M(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

WWW.BDIGITAL.ULA.VE

Consideremos la función de almacenamiento de energía modificada

$W(x, x_d, \hat{\theta})$ definida en términos del vector de estado deseado como en

(2.25).

$$W(x, x_d, \hat{\theta}) = \frac{1}{2} (x - x_d)^T (x - x_d) + \frac{1}{2\gamma} (\theta - \hat{\theta})^2$$

con la ley de actualización del parámetro (2.27)

$$\dot{\hat{\theta}} = \gamma (x_1 + Xm)^3 (x_1 - x_{1d}) \quad (2.35)$$

Añadiendo el término de amortiguamiento el sistema se representa

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1d} &= x_{2d} + \frac{x_{2d}(x_1 + Xm)^3 \hat{\theta}}{x_2} + R_1(x_1 - x_{1d}) \\ \dot{x}_{2d} &= -x_{1d} - \delta \frac{x_1^2}{x_2^2} x_{2d} - \frac{x_{1d}(x_1 + Xm)^3 \hat{\theta}}{x_2} + \frac{x_1}{x_2} v + R_2(x_2 - x_{2d}) \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

Haciendo $x_{1d} = \xi$ y $x_{2d} = \bar{x}_2$ se obtiene la siguiente expresión dinámica

del control:

$$\begin{aligned} v &= \frac{x_2}{x_1} \left\{ \frac{\partial x_1^2 \bar{x}_2}{x_2^2} + \xi + \frac{(x_1 + Xm)^3 \xi}{x_2} \hat{\theta} - R_2(x_2 - \bar{x}_2) \right\} \\ \dot{\xi} &= \bar{x}_2 + \bar{x}_2 \frac{(x_1 + Xm)^3 \hat{\theta}}{x_2} + R_1(x_1 - \xi) \end{aligned}$$

Para la simulación se tomó el siguiente conjunto de valores :

$$\theta = -2, \quad R_1 = 0.1, \quad R_2 = 0.5, \quad \gamma = 0.45, \quad \delta = 2, \quad Xm = 2$$

y para los puntos de equilibrio $\bar{x}_1 = 0$ $\bar{x}_2 = 2$.

Estos resultados son mostrados en la figura 2.

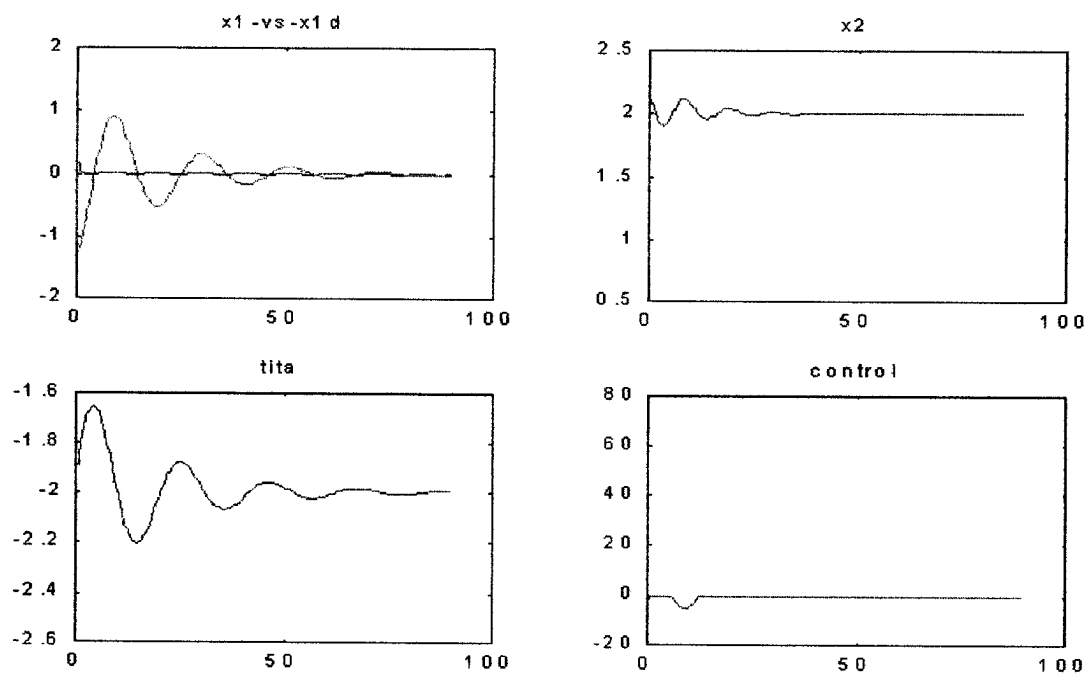


Figura 2. Simulación ejemplo académico 2

WWW.BDIGITAL.ULA.VE

CAPITULO 3

Aplicaciones físicas

En este capítulo se presenta la aplicación de la técnica desarrollada en el capítulo anterior a algunos procesos físicos, considerando casos monoparamétricos, biparamétricos y finalmente se presenta el caso de tres parámetros.

3.- Aplicaciones físicas

3.1 Sistema Bioreactor

Considere el siguiente sistema presentado en [6]

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= u + p - \frac{x_1 x_2}{x_1 + q} + \alpha x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\theta x_2 + \frac{x_1 x_2}{x_1 + q} \\ y &= x_2\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde x_1 y x_2 son concentraciones de masa de alimentos y microorganismos en un tiempo t , respectivamente. Los parámetros p, q y α son constantes conocidas del sistema, y θ es el parámetro desconocido del sistema.

Los puntos de equilibrio correspondientes a un valor constante \bar{u} de la variable de entrada u están dados por:

$$\bar{x}_1 = \frac{\theta q}{x_1 - \theta} \quad \bar{x}_2 = \frac{\bar{u} + p}{\theta - a}$$

En términos de la descripción de los campos vectoriales, el sistema afín (2.2) se tiene:

$$f(x) = \begin{bmatrix} p - \frac{x_1 x_2}{x_1 + q} + a x_2 \\ \frac{x_1 x_2}{x_1 + q} \end{bmatrix} \quad g(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \phi(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ -x_2 \end{bmatrix}$$

El sistema es de grado relativo dos. Físicamente, la región de operación del sistema (3.1) está dada por puntos estrictamente definidos en el primer cuadrante de \mathfrak{R}^2 , donde la evolución del sistema está definida, así $x_1, x_2 > 0$.

Considere la siguiente función de almacenamiento de energía

$$V(x) = \frac{1}{2} x^T x$$

la condición $L_g V(x) \neq 0$ es satisfecha en toda la región de operación, en este caso

$$L_g V(x) = x_1 \neq 0$$

El sistema es entonces pasivizable con respecto a la función de almacenamiento $V(x)$. La derivada temporal de $V(x)$ a lo largo de las trayectorias controladas del sistema está dada por:

$$\dot{V}(x, \theta) = x_1 p + a x_1 x_2 + \frac{x_1 x_2^2}{x_1 + q} - \frac{x_1^2}{x_1 + q} - x_2^2 \theta + x_1 u$$

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

$$\leq -\frac{x_1^2 x_2}{x_1 + q} + x_2 v - \delta x_2^2 \leq yv \quad (3.2)$$

donde la última desigualdad es obtenida bajo la suposición que las variables x_1 y x_2 son siempre positivas. En otras palabras, es posible realizar la descomposición de los campos vectoriales en sus componentes naturales, tomando en cuenta el parámetro como no disipativo; esta descomposición está dada por:

$$f_{nd}(x) = \begin{bmatrix} p + \alpha x_2 \\ \frac{x_1 x_2}{x_1 + q} - x_2 \hat{\theta} \end{bmatrix} \quad f_d(x) = \begin{bmatrix} -\frac{x_1 x_2}{x_1 + q} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Usando la transformación de coordenadas de entrada correspondientes

$$u = -p - \alpha x_2 - \frac{x_2^2}{x_1 + q} + \frac{x_2}{x_1} v - \delta x_2^2 + \frac{x_2^2 \hat{\theta}}{x_1} \quad (3.3)$$

hacemos el sistema pasivo.

La transformación del sistema puede ser escrita en la forma canónica pasiva (2.22).

$$\dot{x} = -R(x)x - J(x, \hat{\theta})x + M(x)v + \phi(x)(\theta - \hat{\theta})$$

donde

$$J(x, \hat{\theta}) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{x_2}{x_1 + q} + \frac{x_2}{x_1} \hat{\theta} \\ \frac{x_2}{x_1 + q} - \frac{x_2}{x_1} \hat{\theta} & 0 \end{bmatrix}; \quad R(x) = \begin{bmatrix} \frac{x_2}{x_1 + q} + \frac{\delta x_2^2}{x_1^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3.1.1 Diseño del controlador:

Consideremos la función de almacenamiento de energía modificada W definida en términos del vector de estado deseado como (2.25)

$$W(x, x_d, \hat{\theta}) = \frac{1}{2}(x - x_d)^T(x - x_d) + \frac{1}{2\gamma}(\theta - \hat{\theta})^2$$

con la ley de actualización del parámetro (2.27)

$$\dot{\hat{\theta}} = -\gamma x_2(x_2 - x_{2d}) \quad (3.4)$$

Añadiendo el término de amortiguamiento el sistema se representa

$$\dot{x}_{1d} = -\frac{x_2 x_{1d}}{x_1 + q} - \frac{\delta x_2^2 x_{1d}}{x_1^2} - \frac{x_2 x_{2d}}{x_1 + q} + \frac{x_2 v}{x_1} + \frac{x_2 \hat{\theta} x_{2d}}{x_1} + R_1(x_1 - x_{1d})$$

$$\dot{x}_{2d} = \frac{x_2 x_{1d}}{x_1 + q} - \frac{x_2 \hat{\theta} x_{1d}}{x_1} + R_2(x_2 - x_{2d})$$

$$y = x_2$$

donde R_1 y R_2 son las componentes diagonales de la matriz $R_{id}(x)$, las cuales son tomadas como constantes por simplicidad.

Haciendo $x_{1d} = \bar{x}_1$ constante y $x_{2d} = \xi$ se obtiene la siguiente expresión dinámica del control:

$$v = \frac{x_2}{x_1} \left\{ \frac{x_2 \bar{x}_1}{x_1 + q} + \frac{\delta x_2^2 \bar{x}_1}{x_1^2} + \frac{x_2 \xi}{x_1 + q} - R_1(x_1 - \bar{x}_1) \right\} - \hat{\theta} \xi$$

$$\dot{\xi} = -\frac{\hat{\theta} x_2 \bar{x}_1}{x_1} + \frac{x_2 \bar{x}_1}{x_1 + q} + R_2(x_2 - \xi)$$

Para la simulación se tomó el siguiente conjunto de valores:

$$\theta = 0.5, \quad R_1 = 0.1, \quad R_2 = 0.5, \quad \gamma = 2, \quad \delta = 0.009, \quad a = 0.3, \quad p = 0.04, \quad q = 0.7$$

y para los puntos de equilibrio:

$$\bar{x}_1 = 0.7 \quad \bar{x}_2 = 0.645 \quad \bar{u} = 0.089.$$

Estos resultados son mostrados en la figura 3.

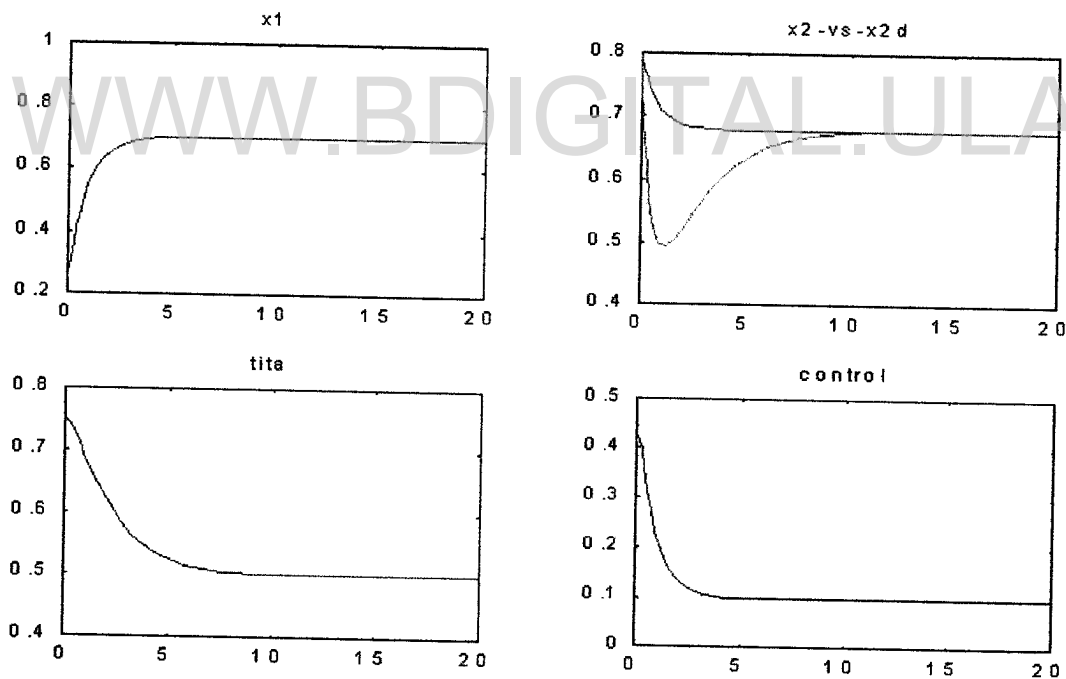


Figura 3. Simulación Sistema Bioreactor

3.2 Sistema Tanque de flujo gravitacional:

Considere el siguiente sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \frac{A_p g x_2}{L} - \theta \frac{x_1^2}{\rho A_p^2} \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{A_t} (F c_{max} \alpha^{-(1-u)} - x_1) \\ y &= x_2\end{aligned}\quad (3.5)$$

donde x_1 y x_2 son la tasa de flujo volumétrico de líquido que deja el tanque a través de la tubería y la altura del líquido en el tanque en un tiempo t respectivamente, $A_t, A_p, F c_{max}, \rho, g, L, \alpha$ son constantes conocidas del sistema, θ es el parámetro desconocido del sistema, y u es la posición de la válvula de entrada, la cual toma valores en el intervalo cerrado $[0,1]$.

Los puntos de equilibrio correspondientes a un valor constante de \bar{u} la variable de entrada u están dados por:

$$\bar{x}_1 = F c_{max} \alpha^{-(1-\bar{u})} \quad \bar{x}_2 = \frac{L \theta \bar{x}_1^2}{A_p^3 g \rho}$$

A fin de facilitar el manejo de las ecuaciones, se toma $w = F c_{max} \alpha^{-(1-u)}$ como una entrada auxiliar de control.

En términos de la descripción de los campos vectoriales, el sistema (2.2)

se tiene:

$$f(x) = \begin{bmatrix} \frac{A_p g x_2}{L} \\ x_1 \\ -\frac{1}{A_t} \end{bmatrix} \quad g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{A_t} \end{bmatrix} \quad \phi(x) = \begin{bmatrix} -\frac{x_1^2}{\rho A_p^2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

el sistema es de grado relativo uno y la región de operación del sistema (3.5) está dada por puntos estrictamente definidos en el primer cuadrante de \mathfrak{R}^2 , donde la evolución del sistema está definida, así $x_1, x_2 > 0$.

Considerando la función de almacenamiento de energía

$$V(x, \theta) = \frac{1}{2} x^T x$$

la condición $L_g V(x) \neq 0$ es satisfecha en toda la región de operación, en

este caso

$$L_g V(x) = \frac{x_2}{A_t} \neq 0 \quad (3.6)$$

El sistema es entonces pasivizable con respecto a la función de almacenamiento $V(x)$, así es posible realizar la descomposición de los campos vectoriales en sus componentes naturales; esta descomposición está dada por:

$$f_{nd}(x) = \begin{bmatrix} \frac{A_p g x_2}{L} - \frac{x_1^2 \theta}{\rho A_p^2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad f_d(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{x_1}{A_t} \end{bmatrix}$$

Usando la transformación de coordenadas de entrada

$$w = -\frac{A_t A_p g x_1}{L} + \frac{x_1^3 \hat{\theta} A_t}{x_2 \rho A_p^2} + A_t v - \delta A_t x_2 \quad (3.7)$$

hacemos el sistema pasivo y se representa en la forma canónica

$$\dot{x} = -R(x)x - J(x, \hat{\theta})x + M(x)v + \phi(x)(\theta - \hat{\theta})$$

donde

$$J(x, \hat{\theta}) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{A_p g}{L} + \frac{x_1^2 \hat{\theta}}{x_2 \rho A_p^2} \\ \frac{A_p g}{L} - \frac{x_1^2 \hat{\theta}}{x_2 \rho A_p^2} & 0 \end{bmatrix}; \quad R(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{x_1}{x_2 A_t} + \delta \end{bmatrix}$$

$$M(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Considerando la función de almacenamiento de energía modificada $W(x, x_d, \hat{\theta})$ definida en términos del vector de estado deseado.

$$W(x, x_d, \hat{\theta}) = \frac{1}{2}(x - x_d)^T (x - x_d) + \frac{1}{2\gamma} (\theta - \hat{\theta})^T (\theta - \hat{\theta})$$

con la ley de actualización del parámetro (2.27)

$$\dot{\hat{\theta}} = -\gamma(x_1 - x_{1d})\left(-\frac{x_1^2}{\rho A_p^2}\right) \quad (3.8)$$

y añadiendo el término de amortiguamiento el sistema se representa

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1d} &= -\frac{x_1^2 \hat{\theta} x_{2d}}{x_2 \rho A_p^2} + \frac{A_p g x_{2d}}{L} + R_1(x_1 - x_{1d}) \\ \dot{x}_{2d} &= -\frac{x_1 x_{2d}}{x_2 A_t} - \delta x_{2d} - \frac{A_p g x_{1d}}{L} + \frac{x_1^2 \hat{\theta} x_{1d}}{x_2 \rho A_p^2} + v + R_2(x_2 - x_{2d}) \end{aligned}$$

$$y = x_2$$

Haciendo $x_{1d} = \xi$ y $x_{2d} = \bar{x}_2$ se obtiene la siguiente expresión dinámica

del control:

$$v = \frac{x_1 \bar{x}_2}{x_2 A_1} + \delta \bar{x}_2 + \frac{A_p g \xi}{L} - \frac{\theta x_1^2 \xi}{\rho A_p^2 x_2} - R_2 (x_2 - \bar{x}_2)$$

$$\dot{\xi} = -\frac{\theta x_1^2 \bar{x}_2}{\rho A_p^2 x_2} + \frac{A_p g \bar{x}_2}{L} + R_1 (x_1 - \xi)$$

$$u = 1 + \frac{1}{\log \alpha} \log \frac{w}{F_{c_{max}}}$$

Los resultados de la simulación son presentados en la figura 4,

usando los siguientes valores:

$\theta = 4.41, R_1 = 0.3, R_2 = 0.1, \gamma = 20, \delta = 0.09, A_1 = 10.5 m^2, A_p = 0.653 m^2, g = 9.81 m/s^2, L = 914 m$
 $\rho = 998 Kg/m^3, \alpha = 10, F_{c_{max}} = 2 m^3/s$ y los puntos de

equilibrio $\bar{x}_1 = 1.8360, \bar{x}_2 = 5$ y $\bar{u} = 0.9627$

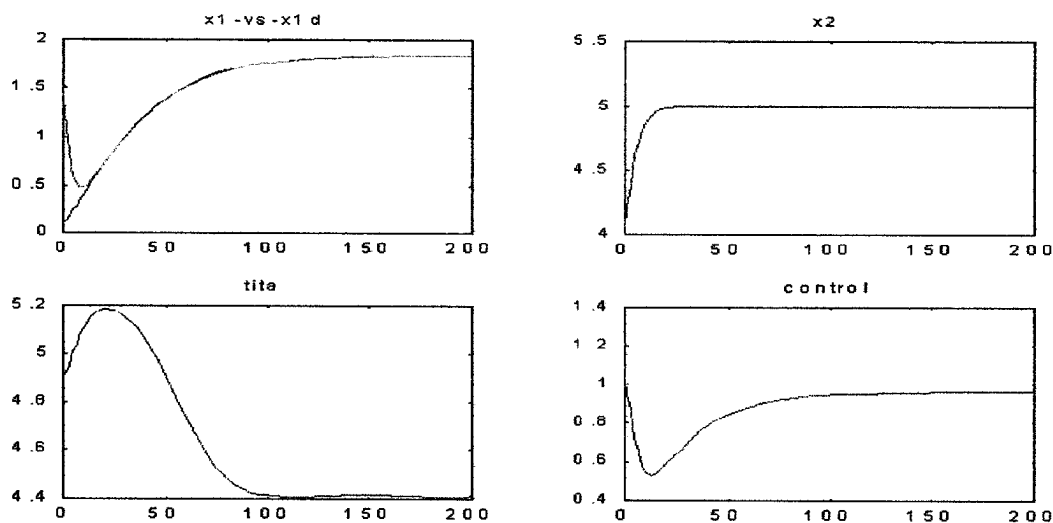


Figura 4. Simulación Tanque de flujo Gravitacional

3.3 Sistema de Tanque Reactor Isotérmico continuamente agitado (biparamétrico).

Considere el siguiente modelo dinámico de tercer orden, en el cual una reacción química multicomponente toma lugar:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= 1 - (1 + D_{a1})x_1 + \theta_1 x_2^2 \\
 \dot{x}_2 &= D_{a1}x_1 - x_2 - (\theta_1 + \theta_2)x_2^2 + u \\
 \dot{x}_3 &= \theta_2 x_2^2 - x_3 \\
 y &= x_3
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

donde x_1 , x_2 y x_3 representan la concentración normalizada de especies A, B y C en el reactor respectivamente. La variable de control u es definida como la razón por unidad volumétrica molar de la tasa de alimentación de la especie B. La constante D_{a1} es definida por el volumen del reactor en m^3 y una constante de primer orden en s^{-1} , θ_1 y θ_2 son los parámetros constantes desconocidos del sistema. Los puntos de equilibrio correspondientes a un valor constante \bar{u} de la variable de entrada u están dados por:

$$\bar{x}_1 = \frac{1 + \theta_1 \bar{x}_2}{1 + D_{a1}}$$

$$\bar{x}_2 = (1 + D_{a1}) \left[\frac{-1 + \left\{ 1 + 4 \left(\bar{u} + \frac{D_{a1}}{1 + D_{a1}} \right) \left(\frac{\theta_1 + \theta_2 + D_{a1} \theta_2}{1 + D_{a1}} \right) \right\}^{\frac{1}{2}}}{2(\theta_1 + \theta_2 + D_{a1} \theta_2)} \right]$$

$$\bar{x}_3 = \theta_2 \bar{x}_2^2$$

Al aplicar la técnica desarrollada la condición $LgV(x) \neq 0$ es satisfecha en toda la región de operación, en este caso

$$LgV(x) = x_2 \neq 0$$

el sistema es entonces pasivizable con respecto a la función de almacenamiento $V(x)$ y es posible realizar la descomposición de los campos vectoriales en sus componente naturales, tomando en cuenta el parámetro como no disipativo; esta descomposición está dada por:

$$f_{nd}(x) = \begin{bmatrix} 1 + \hat{\theta}_1 x_2^2 \\ D_{a1} x_1 - (\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2) x_2^2 \\ \hat{\theta}_2 x_2^2 \end{bmatrix} \quad f_d(x) = \begin{bmatrix} -(1 + D_{a1}) x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{bmatrix}$$

Usando la transformación de coordenadas de entrada correspondientes, el sistema se hace pasivo y puede ser representado en la forma canónica pasiva (2.22)

$$\dot{x} = -R(x)x - J(x, \hat{\theta})x + M(x)v + \phi(x)(\theta - \hat{\theta})$$

donde

$$J(x, \hat{\theta}) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{x_2} + \hat{\theta}x_2 & 0 \\ -\left(\frac{1}{x_2} + \hat{\theta}x_2\right) & 0 & -\hat{\theta}_2x_2 \\ 0 & \hat{\theta}_2x_2 & 0 \end{bmatrix}; R(x) = \begin{bmatrix} (1 + Da1) & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \frac{\delta x_3^2}{x_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

al considerar la función de almacenamiento de energía modificada

$W(x, x_d, \hat{\theta})$ definida en términos del vector de estado deseado.

$$W(x, x_d, \hat{\theta}) = \frac{1}{2}(x - x_d)^T(x - x_d) + \frac{1}{2}(\theta - \hat{\theta})^T \Gamma^{-1}(\theta - \hat{\theta})$$

con la ley de actualización del parámetro (2.27)

$$\dot{\hat{\theta}} = \begin{bmatrix} \gamma_1(x_2^2(x_1 - x_{1d}) - x_2^2(x_2 - x_{2d})) \\ \gamma_2(-x_2^2(x_2 - x_{2d}) + x_2^2(x_3 - x_{3d})) \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Añadiendo el término de amortiguamiento el sistema se representa

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1d} &= -(1 + D_{a1})x_{1d} + \left(\hat{\theta}_1x_2 + \frac{1}{x_2}\right)x_{2d} + R_1(x_1 - x_{1d}) \\ \dot{x}_{2d} &= -\left(1 + \frac{\delta x_3^2}{x_2^2}\right)x_{2d} - \left(\hat{\theta}_1x_2 + \frac{1}{x_2}\right)x_{1d} - \hat{\theta}_2x_2x_{3d} + \frac{x_3}{x_2}v + R_2(x_2 - x_{2d}) \\ \dot{x}_{3d} &= -x_3 + \hat{\theta}_2x_2x_{2d} + R_3(x_3 - x_{3d}) \\ y &= x_3 \end{aligned}$$

Haciendo $x_{1d} = \xi_1$, $x_{2d} = \bar{x}_2$ y $x_{3d} = \xi_2$ se obtiene la siguiente expresión dinámica del control:

$$v = \frac{x_2}{x_3} \left[\left(1 + \frac{\delta x_3^2}{x_2^2}\right) \bar{x}_2 + \left(\hat{\theta}_1 x_2 + \frac{1}{x_2}\right) \xi_1 + \hat{\theta}_1 x_2 \xi_2 - R_2 (x_2 - \bar{x}_2) \right]$$

$$\dot{\xi}_1 = -(1 + D_{a1}) \xi_1 + \left(\hat{\theta}_1 x_2 + \frac{1}{x_2}\right) \bar{x}_2 + R_1 (x_1 - \xi_1)$$

$$\dot{\xi}_2 = -\xi_2 + \hat{\theta}_2 x_2 \bar{x}_2 + R_3 (x_3 - \xi_2)$$

Para la simulación se utilizaron los siguientes datos:

$\theta_1 = 0.5, \theta_2 = 1, R_1 = 0.2, R_2 = 0.9, R_3 = 1, \gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0.5, \delta = 80, D_{a1} = 3$ y los

valores de equilibrio $x_2 = 0.8796, \bar{u} = 0.9856$

Estos resultados son presentados en la figura 5.

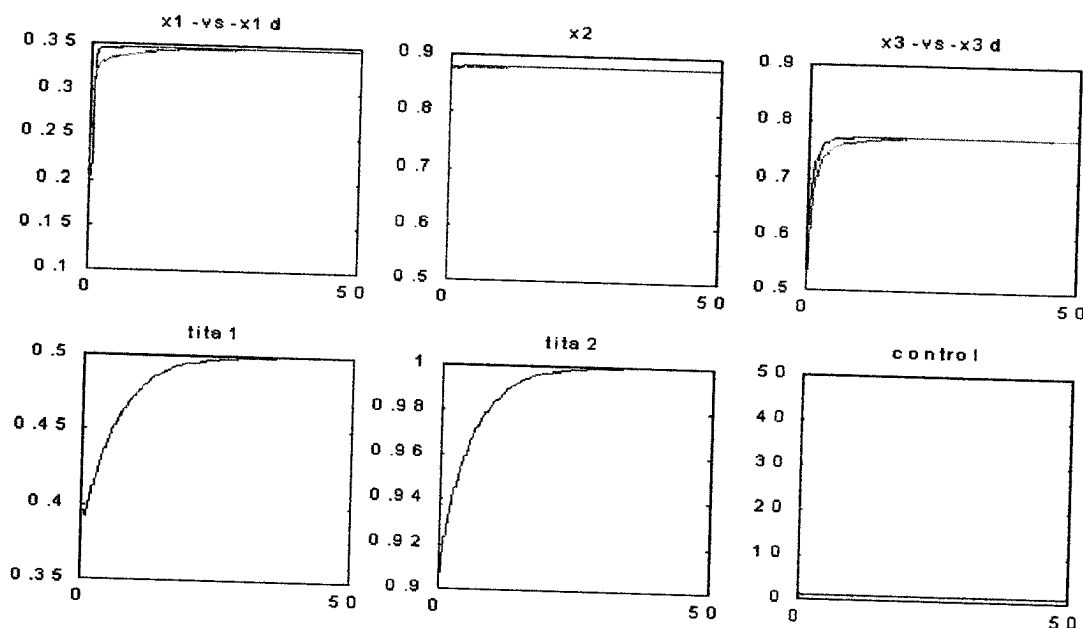


Figura 5. Simulación Tanque reactor isotérmico biparamétrico

3.4 Sistema de Tanque Reactor Isotérmico continuamente agitado, tomando en cuenta tres parámetros.

Considere el siguiente modelo dinámico de tercer orden, en el cual una reacción química multicomponente toma lugar:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= 1 - (1 + \theta_1)x_1 + \theta_2 x_2^2 \\
 x_2 &= \theta_1 x_1 - x_2 - (\theta_2 + \theta_3)x_2^2 + u \\
 x_3 &= \theta_3 x_2^2 - x_3 \\
 y &= x_3
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

donde x_1 , x_2 y x_3 representan la concentración normalizada de especies

A, B y C en el reactor respectivamente. La variable de control u es

definida como la razón por unidad volumétrica molar de la tasa de alimentación de la especie B. θ_1 , θ_2 y θ_3 son los parámetros constantes

desconocidos del sistema. Los puntos de equilibrio correspondientes a

un valor constante \bar{u} de la variable de entrada u están dados por:

$$\begin{aligned}
 \bar{x}_1 &= \frac{1 + \theta_2 \bar{x}_2}{1 + \theta_1} \\
 \bar{x}_2 &= (1 + \theta_1) \left[\frac{-1 + \left\{ 1 + 4 \left(\bar{u} + \frac{\theta_1}{1 + \theta_1} \right) \left(\frac{\theta_2 + \theta_3 + \theta_1 \theta_3}{1 + \theta_1} \right) \right\}^{\frac{1}{2}}}{2(\theta_2 + \theta_3 + \theta_1 \theta_3)} \right] \\
 \bar{x}_3 &= \theta_3 \bar{x}_2^2
 \end{aligned}$$

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

En términos de la descripción de los campos vectoriales el sistema afín (2.2) se tiene:

$$f(x) = \begin{bmatrix} -x_1 + 1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{bmatrix} \quad g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \phi(x) = \begin{bmatrix} -x_1 & x_2^2 & 0 \\ x_1 & -x_2^2 & -x_2^2 \\ 0 & 0 & x_2^2 \end{bmatrix}$$

Físicamente la región de operación del sistema (3.11) está dada por puntos estrictamente definidos en el primer octante de \mathfrak{R}^3 , donde la evolución del sistema está definida, así $x_1, x_2, x_3 > 0$.

Al aplicar la técnica desarrollada el sistema (3.11) se representa en la forma canónica (2.22) donde

$$J(x, \hat{\theta}) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{x_2} + \hat{\theta}_2 x_2 - \frac{\hat{\theta}_1 x_1}{x_2} & 0 \\ -\left(\frac{1}{x_2} + \hat{\theta}_2 x_2 - \frac{\hat{\theta}_1 x_1}{x_2}\right) & 0 & -\hat{\theta}_3 x_2 \\ 0 & \hat{\theta}_3 x_2 & 0 \end{bmatrix};$$

$$R(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \frac{\delta x_3^2}{x_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad M(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Al considerar la función de almacenamiento de energía modificada

$W(x, x_d, \hat{\theta})$ y la ley de actualización del parámetro (2.27) se tiene

$$\hat{\theta} = \begin{bmatrix} \gamma_1(-x_1(x_1 - \xi_1) + x_1(x_2 - \bar{x}_2)) \\ \gamma_2(x_2^2(x_1 - \xi_1) - x_2^2(x_2 - \bar{x}_2)) \\ \gamma_3(-x_2^2(x_2 - \bar{x}_2) + x_2^2(x_3 - \xi_2)) \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Añadiendo el término de amortiguamiento el sistema se representa

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1d} &= -x_{1d} + \left(\hat{\theta}_2 x_2 + \frac{1}{x_2} - \frac{\hat{\theta}_1 x_1}{x_2}\right) x_{2d} + R_1(x_1 - x_{1d}) \\ \dot{x}_{2d} &= -\left(1 + \frac{\delta x_3^2}{x_2^2}\right) x_{2d} - \left(\hat{\theta}_2 x_2 + \frac{1}{x_2} - \frac{\hat{\theta}_1 x_1}{x_2}\right) x_{1d} - \hat{\theta}_3 x_2 x_{3d} + \frac{x_3}{x_2} v + R_2(x_2 - x_{2d}) \\ \dot{x}_{3d} &= -x_3 + \hat{\theta}_3 x_2 x_{2d} + R_3(x_3 - x_{3d}) \\ y &= x_3 \end{aligned}$$

Haciendo $x_{1d} = \xi_1$, $x_{2d} = \bar{x}_2$ y $x_{3d} = \xi_2$ se obtiene la siguiente expresión

dinámica del control:

$$\begin{aligned} v &= \frac{x_2}{x_3} \left[\left(1 + \frac{\delta x_3^2}{x_2^2}\right) \bar{x}_2 + \left(\hat{\theta}_2 x_2 + \frac{1}{x_2} - \frac{\hat{\theta}_1 x_1}{x_2}\right) \xi_1 + \hat{\theta}_3 x_2 \xi_2 - R_2(x_2 - \bar{x}_2) \right] \\ \dot{\xi}_1 &= -\xi_1 + \left(\hat{\theta}_2 x_2 + \frac{1}{x_2} - \frac{\hat{\theta}_1 x_1}{x_2}\right) \bar{x}_2 + R_1(x_1 - \xi_1) \\ \dot{\xi}_2 &= -\xi_2 + \hat{\theta}_3 x_2 \bar{x}_2 + R_3(x_3 - \xi_2) \end{aligned}$$

Los resultados de la simulación utilizando los siguientes datos

$$\theta_1 = 3, \theta_2 = 0.5, \theta_3 = 0.95, R_1 = 0.2, R_2 = 0.4, R_3 = 1.5, \gamma_1 = 0.1, \gamma_2 = 4, \gamma_3 = 2, \delta = 90,$$

y los valores de equilibrio $\bar{x}_2 = 0.8796, \bar{u} = 0.9856$, son presentados en la figura 6.

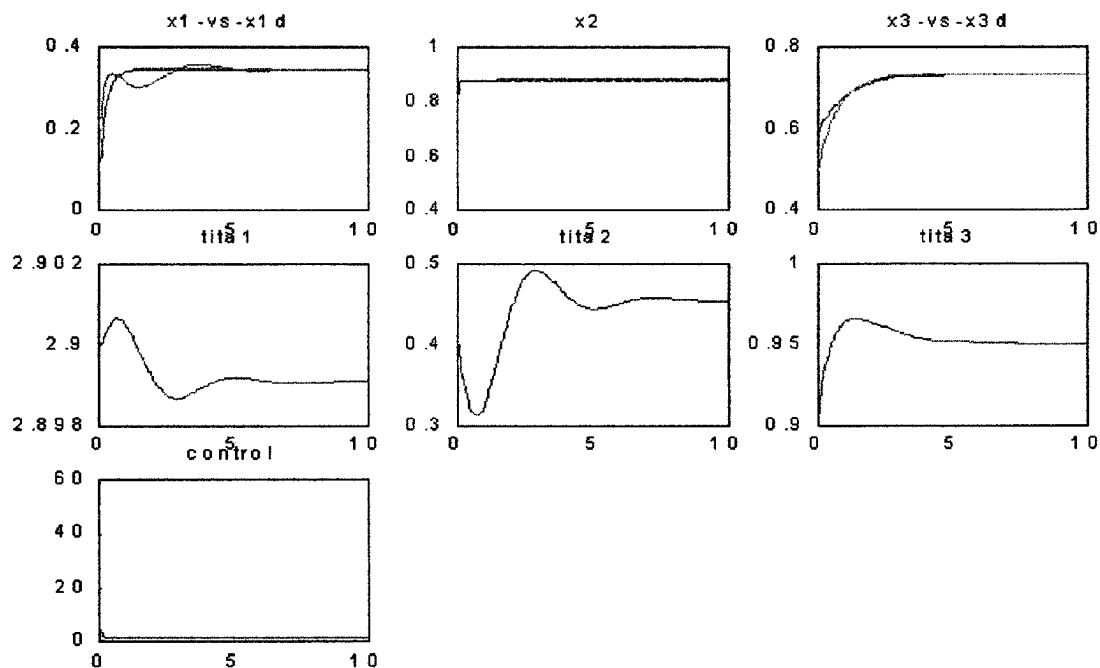


Figura 6. Simulación Tanque reactor isotérmico con 3 parámetros

WWW.BDIGITAL.ULA.VE

CAPITULO 4

Pasivización Adaptativa de Sistemas no Lineales con Incertidumbre conocido el signo del parámetro

En el enfoque adaptativo considerado en el capítulo dos, se realiza la descomposición natural de los campos vectoriales del sistema, en la que los términos paramétricos son considerados no disipativos. En el presente capítulo se aplica la técnica desarrollada a sistemas monoparamétricos con signo del parámetro conocido, lo cual genera una ley de control discontinua.

4.- Realimentación Adaptativa Pasiva.

Sea una clase de sistemas no lineales con incertidumbre de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + \phi(x)\theta + g(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (4.1)$$

donde $x \in X \subset \mathfrak{R}^n$ es el vector de estado, $u \in U \subset \mathfrak{R}$ es una función escalar y el control de entrada, $y \in Y \subset \mathfrak{R}$ es la función de salida del sistema, θ es el parámetro desconocido y constante del cual se conoce su signo. Los campos $f(x)$, $\phi(x)$ y $g(x)$ son campos vectoriales n -dimensionales y suaves en x .

Incorporando la estimación del parámetro desconocido $\hat{\theta}$, el sistema (4.1) puede ser escrito

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + \phi(x)(\theta - \hat{\theta}) + g(x)u + \phi(x)\hat{\theta} \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (4.2)$$

considerando la función de almacenamiento que incluye un término de estimación del error del parámetro

$$W(x, \hat{\theta}) = V(x) + \frac{(\theta - \hat{\theta})^2}{2\gamma} \quad (4.3)$$

donde $V(x)$ es la función de almacenamiento definida para el sistema sin incertidumbre y $\gamma > 0$ es una constante de ganancia de adaptación.

Se requiere una transformación de la variable de control dependiente del estado y la estimación de los parámetros desconocidos de la forma:

$$u = \alpha(x, \hat{\theta}) + \beta(x, \hat{\theta})v \quad (4.4)$$

tal que el nuevo sistema descrito sea un sistema pasivo con respecto a la función de almacenamiento $W(x, \hat{\theta})$, desde el nuevo control v y la salida dada del sistema. Esto se cumple bajo las condiciones de la proposición 2.1, donde la transformación de entrada que estrictamente pasiviza al sistema queda definida por una función discontinua dada por:

$$u(x, \hat{\theta}, v) = \begin{cases} \frac{1}{L_g V(x)} \left[-L_{fnd} V(x) - L_{\phi_d \hat{\theta}} V(x) + h(x)v - \delta h^2(x) \right] \dots si \hat{\theta} sign \theta > 0 \\ \frac{1}{L_g V(x)} \left[-L_{fnd} V(x) - L_{\phi_d \hat{\theta}} V(x) + h(x)v - \delta h^2(x) \right] \dots si \hat{\theta} sign \theta < 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

Usando la ley de actualización (2.27) se elimina el efecto del error de la estimación del parámetro en $W(x, \hat{\theta})$. Además se descomponen los campos vectoriales $f(x)$ y $\phi(x)$ en sus componentes naturales como en (1.6). Esto permite representar (2.11) de la forma:

$$W(x, \hat{\theta}) = L_{f_d} V(x) + L_{f_{nd}} V(x) + L_{\phi \hat{\theta}} V(x) + L_g V(x) u \quad (4.6)$$

Entonces, si la condición de transversalidad es satisfecha, se usa la transformación adaptativa de coordenadas de entrada (4.5) para obtener

$$W(x, \hat{\theta}) = \begin{cases} L_{f_d} V(x) + L_{f_{nd}} V(x) + L_{\phi_{nd} \hat{\theta}} V(x) + L_g V(x) u \leq yv \dots \text{si } \hat{\theta} \text{ sign } \theta > 0 \\ L_{f_d} V(x) + L_{f_{nd}} V(x) + L_{\phi_d \hat{\theta}} V(x) + L_g V(x) u \leq yv \dots \text{si } \hat{\theta} \text{ sign } \theta < 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

lo cual significa que la transformación del sistema es de salida estrictamente pasiva con respecto a la función de almacenamiento

$W(x, \hat{\theta})$.

Se requiere escribir el sistema en lazo parcialmente cerrado en la forma canónica pasiva, para lo cual se asume que $V(x) = \frac{1}{2}(x^T x)$ y que $L_g V(x) = x^T g(x) \neq 0$ para todo $x \in X$, entonces el sistema se representa como:

$$\begin{aligned} \dot{x} = & f_d(x) + f_I(x) + \left[I - \frac{g(x)x^T}{x^T g(x)} \right] f_{nd}(x) + \frac{h(x)g(x)v}{x^T g(x)} - \frac{\delta h^2(x)g(x)}{x^T g(x)} \\ & + \left[I - \frac{g(x)x^T}{x^T g(x)} \right] \phi(x)\hat{\theta} + \phi(x)(\theta - \hat{\theta}) \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\hat{\theta} = \Gamma \phi^T(x) \frac{\partial V^T(x)}{\partial x} \quad (4.9)$$

Como parte integrante de la derivada temporal de $W(x, \hat{\theta})$ se tiene:

a) si $\hat{\theta} \text{sign} \theta > 0$

$$x^T \left[f_a(x) + \phi_a(x) \hat{\theta} - \frac{\delta g(x) h^2(x)}{x^T g(x)} \right] \leq 0$$

$$x^T \left\{ f_l(x) + \left[I - \frac{g(x) x^T}{x^T g(x)} \right] (f_{nd}(x) + \phi_{nd}(x) \hat{\theta}) \right\} = 0$$

por factorización de las componentes del vector de estado en entradas no lineales comprendidas en la expresión (4.8), el sistema puede ser reescrito en la forma canónica pasiva de la siguiente manera:

$$\dot{x} = -R(x, \hat{\theta})x - J(x, \hat{\theta})x + M(x)v + \phi(x)(\theta - \hat{\theta})$$

$$\hat{\theta} = \Gamma \phi^T(x) \frac{\partial V^T(x)}{\partial x}$$

$$y = h(x) \quad (4.10)$$

con $R(x, \hat{\theta})$ una matriz semidefinida positiva, $J(x, \hat{\theta})$ una matriz antisimétrica, donde:

$$\begin{aligned} -R(x, \hat{\theta})x &= f_a(x) + \phi_a(x) \hat{\theta} - \frac{\delta h^2(x) g(x)}{x^T g(x)} \\ -J(x, \hat{\theta})x &= f_l(x) + \left[I - \frac{g(x) x^T}{x^T g(x)} \right] (f_{nd}(x) + \phi_{nd}(x) \hat{\theta}) \\ M(x) &= \frac{h(x) g(x)}{x^T g(x)} \end{aligned} \quad (4.11)$$

b) si $\hat{\theta} \text{sign} \theta < 0$

$$x^T \left[f_d(x) + \phi_{nd}(x)\hat{\theta} - \frac{\delta g(x)h^2(x)}{x^T g(x)} \right] \leq 0$$

$$x^T \left\{ f_I(x) + \left[I - \frac{g(x)x^T}{x^T g(x)} \right] (f_{nd}(x) + \phi_d(x)\hat{\theta}) \right\} = 0$$

por factorización de las componentes del vector de estado, el sistema puede ser reescrito en la forma canónica pasiva de la siguiente manera:

$$\dot{x} = -R(x, \hat{\theta})x - J(x, \hat{\theta})x + M(x)v + \phi(x)(\theta - \hat{\theta})$$

$$\dot{\hat{\theta}} = \Gamma \phi^T(x) \frac{\partial V^T(x)}{\partial x}$$

$$y = h(x) \quad (4.12)$$

con $R(x, \hat{\theta})$ una matriz semidefinida positiva, $J(x, \hat{\theta})$ una matriz

antisimétrica, donde:

$$-R(x, \hat{\theta})x = f_d(x) + \phi_{nd}(x)\hat{\theta} - \frac{\delta h^2(x)g(x)}{x^T g(x)}$$

$$-J(x, \hat{\theta})x = f_I(x) + \left[I - \frac{g(x)x^T}{x^T g(x)} \right] (f_{nd}(x) + \phi_d(x)\hat{\theta})$$

$$M(x) = \frac{h(x)g(x)}{x^T g(x)}$$

Para el diseño del control de realimentación pasivo se sigue el procedimiento descrito en 2.1.

4.1 Aplicaciones prácticas

Sistema Tanque de flujo gravitacional:

Considere el sistema presentado en el capítulo tres

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{A_p g x_2}{L} - \theta \frac{x_1^2}{\rho A_p^2} \\x_2 &= \frac{1}{A_t} (F C_{max} \alpha^{-(1-u)} - x_1) \\y &= x_2\end{aligned}\tag{4.12}$$

donde x_1 y x_2 son la tasa de flujo volumétrico de líquido que deja el tanque a través de la tubería y la altura del líquido en el tanque en un tiempo t respectivamente, $A_t, A_p, F C_{max}, \rho, g, L, \alpha$ son constantes conocidas del sistema, θ es el parámetro desconocido del sistema del cual se asume el signo conocido y positivo, y u es la posición de la válvula de entrada, la cual toma valores en el intervalo cerrado $[0,1]$.

Los puntos de equilibrio correspondientes a un valor constante \bar{u} de la variable de entrada u están dados por:

$$\bar{x}_1 = F C_{max} \alpha^{-(1-\bar{u})} \quad \bar{x}_2 = \frac{L \theta \bar{x}_1^2}{A_p^3 g \rho}$$

A fin de facilitar el manejo de las ecuaciones, se toma $w = F C_{max} \alpha^{-(1-u)}$ como una entrada auxiliar de control.

En términos de la descripción de los campos vectoriales, el sistema (4.12) se tiene:

$$f(x) = \begin{bmatrix} \frac{A_p g x_2}{L} \\ x_1 \\ -\frac{1}{A_t} \end{bmatrix} \quad g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{A_t} \end{bmatrix} \quad \phi(x) = \begin{bmatrix} -\frac{x_1^2}{\rho A_p^2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Claramente el sistema es de grado relativo uno, físicamente la región de operación del sistema (4.12) está dada por puntos estrictamente definidos en el primer cuadrante de \mathfrak{R}^2 , donde la evolución del sistema está definida, así $x_1, x_2 > 0$.

Considere la siguiente función de almacenamiento de energía

$$W(x, \hat{\theta}) = \frac{1}{2} x^T x + \frac{1}{2\gamma} (\theta - \hat{\theta})^2$$

la condición $L_g V(x) \neq 0$ es satisfecha en toda la región de operación, en este caso

$$L_g V(x) = \frac{x_2}{A_t} \neq 0$$

El sistema es entonces pasivizable con respecto a la función de almacenamiento $W(x, \hat{\theta})$. La derivada temporal a lo largo de las trayectorias controladas del sistema, está dada por:

$$\dot{W}(x, \hat{\theta}) = \frac{A_p g x_1 x_2}{L} - \frac{x_1 x_2}{A_t} - \frac{x_1^3 \hat{\theta}}{\rho A_p^2} + \frac{x_2 w}{A_t} + \frac{(\theta - \hat{\theta})}{\gamma} \left[-\dot{\hat{\theta}} - \frac{\gamma_1 x^3}{\rho A_p^2} \right]$$

$$\leq -\frac{x_1^3 \hat{\theta}}{\rho A_p^2} - \frac{x_1 x_2}{A_t} + x_2 v - \delta x_2^2 \leq yv \quad \text{si } \hat{\theta} \text{sign} \theta > 0 \quad (4.13)$$

$$\dot{W}(x, \hat{\theta}) = \frac{A_p g x_1 x_2}{L} - \frac{x_1 x_2}{A_t} - \frac{x_1^3 \hat{\theta}}{\rho A_p^2} + \frac{x_2 w}{A_t} + \frac{(\theta - \hat{\theta})}{\gamma} \left[-\hat{\theta} - \frac{\gamma_1 x^3}{\rho A_p^2} \right]$$

$$\leq -\frac{x_1 x_2}{A_t} + x_2 v - \delta x_2^2 \leq yv \quad \text{si } \hat{\theta} \text{sign} \theta > 0 \quad (4.14)$$

donde las desigualdades son obtenidas bajo la suposición que las variables x_1 y x_2 son siempre positivas. En otras palabras, es posible realizar la descomposición de los campos vectoriales en sus componentes naturales;

a) si $\hat{\theta} \text{sign} \theta < 0$ esto implica que $\text{sign} \hat{\theta} < 0$ y $\phi(x) = \phi_{nd}(x)$

$$f_{nd}(x) = \begin{bmatrix} \frac{A_p g x_2}{L} - \frac{x_1^2 \hat{\theta}}{\rho A_p^2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad f_d(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{x_1}{A_t} \end{bmatrix}$$

Usando la transformación de coordenadas de entrada correspondientes al estado adaptativo

$$w = -\frac{A_t A_p g x_1}{L} + \frac{x_1^3 \hat{\theta} A_t}{x_2 \rho A_p^2} + A_t v - \delta A_t x_2 \quad (4.15)$$

hacemos el sistema pasivo.

La transformación del sistema puede ser escrita en la forma canónica pasiva (2.22).

$$\dot{x} = -R(x)x - J(x, \hat{\theta})x + M(x)v + \phi(x)(\theta - \hat{\theta})$$

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

donde

$$J(x, \hat{\theta}) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{A_p g}{L} + \frac{x_1^2 \hat{\theta}}{x_2 \rho A_p^2} \\ \frac{A_p g}{L} - \frac{x_1^2 \hat{\theta}}{x_2 \rho A_p^2} & 0 \end{bmatrix}; R(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{x_1}{x_2 A_t} + \delta \end{bmatrix}$$

$$M(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para el diseño del controlador, consideremos la función de almacenamiento de energía modificada W definida en términos del vector de estado deseado, definida como en (2.25)

$$W(x, x_d, \hat{\theta}) = \frac{1}{2} (x - x_d)^T (x - x_d) + \frac{1}{2\gamma} (\theta - \hat{\theta})^T (\theta - \hat{\theta})$$

con la ley de actualización del parámetro (2.27)

$$\dot{\hat{\theta}} = -\gamma (x_1 - x_{1d}) \left(-\frac{x_1^2}{\rho A_p^2} \right) \quad (4.16)$$

Añadiendo el término de amortiguamiento el sistema se representa

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1d} &= -\frac{x_1^2 \hat{\theta} x_{2d}}{x_2 \rho A_p^2} + \frac{A_p g x_{2d}}{L} + R_1 (x_1 - x_{1d}) \\ \dot{x}_{2d} &= -\frac{x_1 x_{2d}}{x_2 A_t} - \delta x_{2d} - \frac{A_p g x_{1d}}{L} + \frac{x_1^2 \hat{\theta} x_{1d}}{x_2 \rho A_p^2} + v + R_2 (x_2 - x_{2d}) \\ y &= x_2 \end{aligned}$$

donde R_1 y R_2 son las componentes diagonales de la matriz $R_d(x)$, las cuales son tomadas como constante por simplicidad.

Haciendo $x_{1d} = \xi$ y $x_{2d} = \bar{x}_2$ se obtiene la siguiente expresión
dinámica del control:

$$v = \frac{x_1 \bar{x}_2}{x_2 A_t} + \delta \bar{x}_2 + \frac{A_p g \xi}{L} - \frac{\hat{\theta} x_1^2 \xi}{\rho A_p^2 x_2} - R_2 (x_2 - \bar{x}_2)$$

$$\xi = -\frac{\hat{\theta} x_1^2 \bar{x}_2}{\rho A_p^2 x_2} + \frac{A_p g \bar{x}_2}{L} + R_1 (x_1 - \xi)$$

$$u = 1 + \frac{1}{\log \alpha} \log \frac{w}{F_{c_{max}}}$$

b) si $\hat{\theta} \text{ sign } \theta > 0$ lo que implica que $\hat{\theta} > 0$

En este caso la descomposición de los campos vectoriales en sus
componente naturales es;

$$f_{nd}(x) = \begin{bmatrix} A_p g x_2 \\ L \\ 0 \end{bmatrix} \quad f_d(x) = \begin{bmatrix} x_1^2 \hat{\theta} \\ \rho A_p^2 \\ x_1 \\ A_t \end{bmatrix} \quad \phi(x) = \phi_d(x)$$

Usando la transformación de coordenadas de entrada correspondientes
al estado adaptativo

$$w = -\frac{x_1 x_2}{A_t} - \frac{x_1^3 \hat{\theta}}{\rho A_p^2} + A_t v - \delta A_t x_2^2 \quad (4.17)$$

la cual hace el sistema pasivo, esta transformación puede ser escrita en la
forma canónica pasiva (2.22), donde

$$J(x) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{A_p g}{L} \\ \frac{A_p g}{L} & 0 \end{bmatrix}; \quad R(x, \hat{\theta}) = \begin{bmatrix} \frac{x_1 \hat{\theta}}{\rho A_p^2} & 0 \\ 0 & \frac{x_1}{x_2 A_t} + \delta \end{bmatrix}$$

$$M(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Consideremos para el diseño del controlador la función de almacenamiento de energía modificada $W(x, x_d, \hat{\theta})$ definida en términos del vector de estado deseado como en (2.25) y la ley de actualización del parámetro (2.27)

$$\dot{\hat{\theta}} = -\gamma(x_1 - x_{1d}) \left(-\frac{x_1^2}{\rho A_p^2} \right) \quad (4.18)$$

Añadiendo el término de amortiguamiento el sistema se representa

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1d} &= -\frac{x_1 \hat{\theta} x_{1d}}{\rho A_p^2} + \frac{A_p g x_{2d}}{L} + R_1(x_1 - x_{1d}) \\ \dot{x}_{2d} &= -\frac{x_1 x_{2d}}{x_2 A_t} - \delta x_{2d} - \frac{A_p g x_{1d}}{L} + v + R_2(x_2 - x_{2d}) \\ y &= x_2 \end{aligned}$$

donde R_1 y R_2 son las componentes diagonales de la matriz $R_{id}(x)$, las cuales son tomadas como constante por simplicidad.

Haciendo $x_{1d} = \xi$ y $x_{2d} = \bar{x}_2$ se obtiene la siguiente expresión dinámica del control:

$$v = \frac{x_1 \bar{x}_2}{x_2 A_t} + \delta \bar{x}_2 + \frac{A_p g \xi}{L} - R_2 (x_2 - \bar{x}_2)$$

$$\xi = -\frac{\theta x_1 \xi}{\rho A_p^2} + \frac{A_p g \bar{x}_2}{L} + R_1 (x_1 - \xi)$$

$$u = 1 + \frac{1}{\log \alpha} \log \frac{w}{Fc_{max}}$$

Los resultados de la simulación son presentados en la figura 7, usando los siguientes valores:

$$\theta = 4.41, R_1 = 0.3, R_2 = 0.1, \gamma = 20, \delta = 0.09, A_t = 10.5 m^2, A_p = 0.653 m^2, g = 9.81 m/s^2,$$

$$L = 914 m \quad \rho = 998 Kg/m^3, \alpha = 10, Fc_{max} = 2 m^3/s \text{ y los puntos de equilibrio}$$

$$\bar{x}_1 = 1.8360, \bar{x}_2 = 5 \text{ y } \bar{u} = 0.9627$$

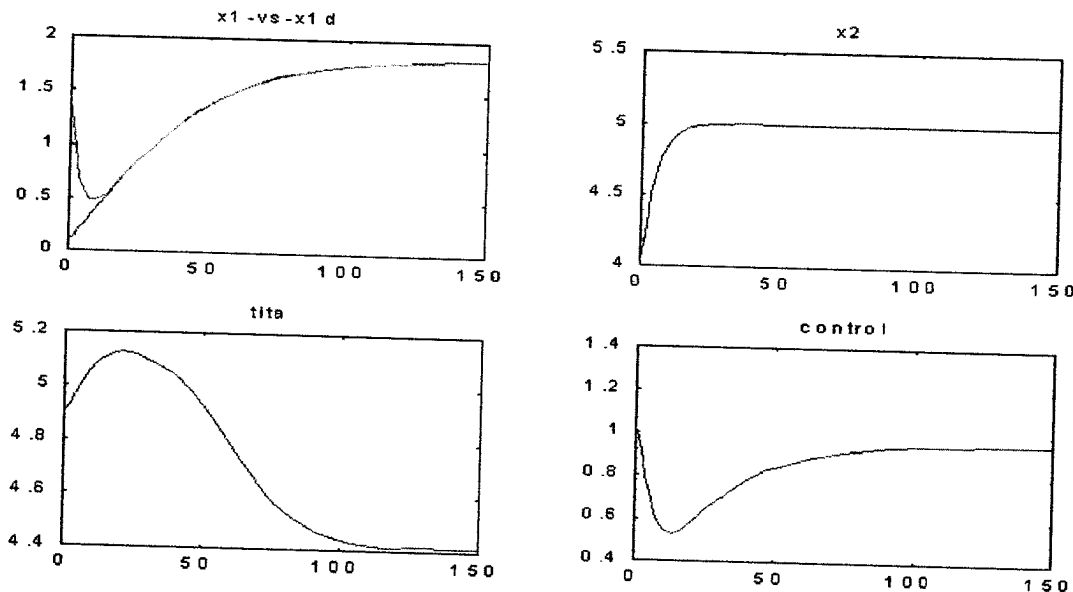


Figura 7. Simulación Sistema Bioreactor con signo conocido

Conclusiones y recomendaciones para trabajos futuros

En este trabajo se propuso un procedimiento sistemático para el diseño de controladores adaptativos basados en pasividad para la estabilización de sistemas no lineales con incertidumbre paramétrica. La pasivización adaptativa se basa en la estimación de los parámetros desconocidos al obtener una ley de control equivalente, usando una función de Lyapunov cuadrática.

El procedimiento desarrollado se inicia con la consideración de que los campos vectoriales dependientes de los valores estimados de los parámetros son no disipativos, por lo cual, éstos no contribuyen a la estabilidad y son compensados adaptativamente. El buen desempeño de la técnica es mostrado en varias aplicaciones, donde las trayectorias controladas del sistema convergen asintóticamente a los valores deseados.

Una variante de la técnica desarrollada es asumir conocido el signo del parámetro, la cual se aplica a sistemas no lineales monoparamétricos, obteniendo un control discontinuo que logra la estabilización del sistema. Una ampliación de esta propuesta sería

Bibliografía

- [1] Byrnes, C, Isidori, A. (1991), “ Passivity, Feedback Equivalence, and the Global Stabilization of Minimum Phase Nonlinear Systems”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol 36 No. 11 pp 1228-1240.
- [2] Hill D.J, Moylan,P.J (1976). “The Stability of Nonlinear Dissipative Systems” *IEEE transactions on Automatic Control*, vol 21 pp 708-711.
- [3] Hill, D. J., Moylan, P. J.(1977). “Stability Results for Nonlinear Feedback Systems”. *Automatica*, vol 13 pp 377- 382.
- [4] Lin, W.(1995), “Global Asymptotic Stabilization of General Nonlinear Systems with Stable Free Dynamics via Passivity and Bounded Feedback” *Automatica*, vol 32 No. 6 pp 915-924.
- [5] Seron, M., Hill D (1995), “Nonlinear Adaptive Control of Feedback Passive Systems.” *Automatica*, vol 31 N°7 pp 1053-1060.
- [6] Sira, H, Delgado, M (1996), “Passivity Based Regulation of Nonlinear Continuous Processes”.(a ser publicado)